МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

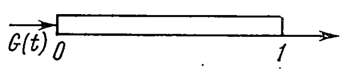
УДК 624.07:534.1

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОДОЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ СТЕРЖНЯ

СОКОЛОВ Б. Н.

Рассматривается задача оптимального продольного перемещения стержня на заданное расстояние с гашением колебаний при помощи силы, приложенной к одному из торцов стержня. В качестве критерия оптимальности выбран квадратичный функционал управления. Задачи управления системами с бесконечным числом степеней свободы рассматривались в [1, 2]. Решение некоторых задач оптимального управления движением колебательных систем с конечным числом степеней свободы приведено в [3]. В публикуемой работе продолжено изучение задач оптимального перемещения колебательных систем.

1. Рассмотрим стержень, который может перемещаться вдоль своей оси силой G, приложенной к левому концу (фигура). Предполагается, что в начальный момент $t=0$ стержень движется совершая продольные колебания. Требуется к фиксированному моменту $t=T$ переместить стержень на заданное расстояние x_0, придав ему скорость v_0 с гашением колебаний стержня. Уравнения движения стержня в безразмерной форме с начальными и конечными условиями имеют вид [4] (x_0, v_0 — const):



$$\partial^2 v/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x^2 \quad u(x,0)=u_0(x), \quad \partial u/\partial t(x,0)=u_1(x) \tag{1.1}$$

$$u(x,T)=x_0, \quad \partial u/\partial t(x,T)=v_0 \tag{1.2}$$

Сила G приложена к левому концу стержня, а правый конец предполагается свободным. Это приводит к следующим краевым условиям:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -G, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0 \tag{1.3}$$

Ставится задача: выбором управляющей функции $G(t)$ перевести систему (1.1) к фиксированному моменту T из начального положения в конечное (1.2) так, чтобы интеграл J принимал наименьшее значение

$$J = \int_0^T G^2(\tau)\,d\tau \to \min \tag{1.4}$$

Заметим, что при $T<2\pi$ поставленная задача, как показано в [1], имеет решение только при специальном подборе начальных данных, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $T \geqslant 2\pi$.

2. Будем искать решение уравнения (1.1) при граничном условии (1.3) в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos nx \tag{2.1}$$

где $\cos nx$ — нормальные функции, соответствующие продольным колебаниям стержня со свободными концами, $T_n(t)$ — некоторые функции времени.

Подставим (2.1) в уравнение (1.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{\cdot\cdot}(t) \cos nx = u''$$

где точкой и штрихом обозначены частные производные по времени t и координате x. Умножим обе части предыдущего уравнения на $\cos mx$ и проинтегрируем от нуля до π:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{\cdot\cdot} \int_0^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \int_0^{\pi} u'' \cos mx\, dx$$

Интегрируя дважды по частям последний интеграл, приходим к соотношению

$$\frac{\pi}{2} T_m^{\cdot\cdot} = u' \cos mx \Big|_0^{\pi} + mu \sin mx \Big|_0^{\pi} - m^2 \int_0^{\pi} u \cos mx\, dx \tag{2.2}$$

Заметим, что

$$\int_0^{\pi} u \cos mx\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} T_n(t) \cos nx \cos mx\, dx = \frac{\pi}{2} T_m(t)$$

Отсюда и из (2.2) получаем уравнение для T_m

$$T_0^{\cdot\cdot}(t) = G(t) / \pi \quad (m=0) \tag{2.3}$$

$$T_m^{\cdot\cdot}(t) + m^2 T_m(t) = 2G(t) / \pi \quad (m \geqslant 1) \tag{2.4}$$

Представим начальные условия (1.2) в виде рядов Фурье по $\cos ix$ (p_i, q_i=const):

$$u(x, 0) = p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cos ix, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i \cos ix \tag{2.5}$$

Решение уравнений (2.4), (2.3) имеет вид (A_m, B_m=const):

$$T_m(t) = A_m \sin mt + B_m \cos mt + \frac{2}{\pi m} \int_0^t \sin m(t-\tau) G(\tau)\, d\tau$$

$$T_m^{\cdot}(t) = mA_m \cos mt - mB_m \sin mt + \frac{2}{\pi} \int_0^t \cos m(t-\tau) G(\tau)\, d\tau$$

$$\tag{2.6}$$

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t + \frac{1}{\pi} \int_0^t (t-\tau) G(\tau)\, d\tau$$

$$T_0^{\cdot}(t) = B_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^t G(\tau)\, d\tau$$

Из соотношений (2.1), (2.6) следует, что общее решение уравнения (1.1) может быть записано в виде

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \sin mt + B_m \cos mt + \frac{2}{\pi m} \int_0^t \sin m(t-\tau) G(\tau)\, d\tau \right) \cos mx +$$

$$+ A_0 + B_0 t + \frac{1}{\pi} \int_0^t (t-\tau) G(\tau)\, d\tau \tag{2.7}$$

Положим в $u(x, t)$ время $t=0$ и воспользуемся краевыми условиями (2.5) для определения коэффициентов A_m, B_m:

$$A_m=m^{-1}q_m, \quad B_m=p_m, \quad A_0=p_0, \quad B_0=q_0 \tag{2.8}$$

С учетом (2.8) функции $u(x, t)$ и $\partial u(x, t) / \partial t$ запишутся в виде

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q_m}{m}\sin mt+p_m\cos mt+\frac{2}{m\pi}\int_0^t \sin m(t-\tau)G(\tau)d\tau \times$$

$$\times\cos mx+p_0+q_0t+\frac{1}{\pi}\int_0^t (t-\tau)G(\tau)d\tau \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(q_m\cos mt-p_m m\sin mt+\frac{2}{\pi}\int_0^t \cos m(t-\tau)G(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times\cos mx+q_0+\frac{1}{\pi}\int_0^t G(\tau)d\tau$$

Система функций $\cos mx$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ полна на $[0, \pi]$, поэтому учет условий (2.8) приводит к следующей бесконечной системе уравнений:

$$\frac{q_m}{m}\sin mT+p_m\cos mT+\frac{2}{\pi m}\int_0^T \sin m(T-\tau)G(\tau)d\tau=0$$

$$q_0T+p_0+\frac{1}{\pi}\int_0^T (T-\tau)G(\tau)d\tau=x_0 \tag{2.10}$$

$$q_m\cos mT-mp_m\sin mT+\frac{2}{\pi}\int_0^T \cos m(T-\tau)G(\tau)d\tau=0$$

$$q_0+\frac{1}{\pi}\int_0^T G(\tau)d\tau=v_0$$

3. Для определения структуры оптимального управления $G(t)$ запишем уравнения (2.3), (2.4) в нормальной форме

$$\dot T_{m,1}=T_{m,2}(t), \quad \dot T_{m,2}=-m^2T_{m,1}(t)+2G(t)/\pi$$
$$\dot T_{0,1}=T_{0,2}, \quad \dot T_{0,2}=\pi^{-1}G(t), \quad T_{m,1}=T_m, \quad T_{m,2}=\dot T_m \tag{3.1}$$

Введем сопряженные переменные $\psi_{m,1}$, $\psi_{m,2}$ и запишем систему уравнений, сопряженную (3.1):

$$\dot\psi_{m,1}=m_2\psi_{m,2}, \quad \psi_{m,2}=-\psi_{m,1} \quad (m=1,2,3,\ldots) \quad \dot\psi_{0,1}=0, \quad \dot\psi_{0,2}=\psi_{0,1} \tag{3.2}$$

Оптимальное управление $G(t)$ определим из условия максимума функции H по G:

$$H=\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{m,1}T_{m,2}+\varphi_{m,2}\left(-m^2T_{m,1}+\frac{2}{\pi}G\right)+\psi_{0,1}T_{0,2}+\psi_{0,2}\frac{G}{\pi}-G^2$$

Отсюда оптимальное управление G равно

$$G=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{m,2}+\frac{1}{\pi}\psi_{0,2}\right) \tag{3.3}$$

Подставляя в формулу (3.3) общее решение уравнений (3.2), получим

$$G = \frac{\pi}{2}(C_0 t + G_1), \qquad G_1 = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin mt + D_m \cos mt \tag{3.4}$$

где G_1 — периодическая функция с периодом 2π; C_0, D_0, C_m, D_m — некоторые постоянные.

Подставим функцию $G(t)$ в уравнения (2.10) и проинтегрируем их

$$m^{-1} q_m \sin mT + p_m \cos mT + m^{-2} C_0 T - m^{-3} C_0 \sin mT +$$

$$+ \frac{1}{m} \int_0^T G_1 \sin m(T-\tau)\, d\tau = 0$$

$$q_0 T + p_0 + {}^1/_2 \left[C_0 \frac{T^3}{6} + \int_0^T G_1(\tau)\,(T-\tau)\, d\tau \right] = x_0$$

$$(3.5)$$

$$q_m \cos mT - m p_m \sin mT + m^{-2} C_0 - m^{-2} C_0 \cos mT + \int_0^T G_1(\tau) \cos m(T-\tau)\, d\tau = 0$$

$$q_0 + {}^1/_2 \left[C_0 \frac{T^2}{2} + \int_0^T G_1(\tau)\, d\tau \right] = v_0$$

Функция G_1 — периодическая, поэтому интегралы в первом и третьем уравнениях (3.5) могут быть представлены в виде

$$\int_0^T G_1(\tau) \sin m(T-\tau)\, d\tau = \int_0 \psi(\tau) \sin m(T-\tau)\, d\tau$$

$$(3.6)$$

$$\int_0^T G_1(\tau) \cos m(T-\tau)\, d\tau = \int_0^{2\pi} \psi(\tau) \cos m(T-\tau)\, d\tau$$

$$\psi(\tau) = (k+1)\, G_1(\tau) \qquad (\tau \in [0, \varepsilon]), \qquad k = [T/2\pi]$$

$$\psi(\tau) = k G_1(\tau) \qquad (\tau \in [\varepsilon, 2\pi]), \qquad \varepsilon = T - 2\pi k$$

где [...] означает целую часть заключенного в квадратные скобки числа.

С учетом соотношений (3.6) первое и третье уравнения (3.5) могут быть переписаны в виде

$$\int_0^{2\pi} \psi(\tau) \sin m(T-\tau)\, d\tau = -[\, q_m \sin mT + m p_m \cos mT + m^{-1} C_0 T - m^{-2} C_0 \sin mT \,]$$

$$(3.7)$$

$$\int_0^{2\pi} \psi(\tau) \cos m(T-\tau)\, d\tau = -[\, q_m \cos mT - m p_m \sin mT + m^{-2} C_0 - m^{-2} C_0 \cos mT \,]$$

Умножим первое уравнение (3.7) на $i = \sqrt{-1}$ и сложим со вторым. После преобразований получим

$$\int_0^{2\pi} \psi e^{-im\tau}\, d\tau = -q_m - i m p_m + \frac{1}{m^2} C_0 - \frac{1}{m} \left[i C_0 T + \frac{1}{m} C_0 \right] e^{-imT}$$

Разделим в этом уравнении действительные и мнимые части

$$\int_0^{2\pi}\psi(\tau)\cos m\tau\,d\tau=-q_m+\frac{1}{m^2}C_0-\frac{1}{m}C_0T\sin mT-\frac{1}{m^2}C_0\quad\cos mT$$

$$\int_0^{2\pi}\psi(\tau)\sin m\tau\,d\tau=mp_m+\frac{1}{m}C_0T\cos mT-\frac{1}{m^2}C_0\sin mT$$

В результате функция $\psi(t)$ восстанавливается с точностью до произвольной постоянной C_1

$$\psi(t)=C_1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\left(-q_m+\frac{1}{m^2}C_0-\frac{1}{m}C_0T\sin mT-\frac{1}{m^2}C_0\cos mT\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos mt+(mp_m+m^{-1}C_0T\cos mT-m^{-2}C_0\sin mT)\sin mt\right] \tag{3.8}$$

Отсюда и из формулы (3.6) найдем функцию

$$G_1=(k+1)^{-1}\psi \quad \text{при} \quad t\in[0,\varepsilon], \quad G_1=k^{-1}\psi \quad \text{при} \quad t\in[\varepsilon,2\pi] \tag{3.9}$$

Нетрудно убедиться, используя периодичность G_1 и формулу (3.9), в справедливости следующих соотношений:

$$\int_0^T\tau G_1(\tau)\,d\tau=\int_0^{2\pi}\psi(\tau)\tau\,d\tau+\pi k\int_0^{2\pi}\psi\,d\tau-\pi\int_\varepsilon^{2\pi}\psi\,d\tau$$

$$\int_0^T G_1(\tau)\,d\tau=\int_0^{2\pi}\psi(\tau)\,d\tau=2\pi C_1 \tag{3.10}$$

$$\int_0^{2\pi}\tau\psi(\tau)\,d\tau=2\pi^2C_1-2\sum_{m=1}^{\infty}\left(p_m-\frac{C_0}{m^2}T\cos mT-\frac{C_0}{m^3}\sin mT\right)$$

$$\int_0^T(T-\tau)G_1(\tau)\,d\tau=2\pi C_1T-\int_0^{2\pi}\tau\psi\,d\tau-\pi k\int_0^{2\pi}\psi\,d\tau+\pi\int_\varepsilon^{2\pi}\psi\,d\tau=$$

$$=\pi C_1T+\sum_{m=1}^{\infty}\left(p_m-\frac{C_0}{m^2}T\cos mT-\frac{C_0}{m^3}\sin mT\right)(1+\cos m\varepsilon)-$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(-q_m+\frac{C_0}{m^2}-\frac{C_0}{m}T\sin mT-\frac{C_0}{m^2}\cos mT\right)\sin m\varepsilon$$

Подставим функцию $G_1(t)$ во второе и четвертое уравнения (3.5) и вычислим стоящие там интегралы, используя соотношения (3.10). Получим систему двух уравнений для определения неизвестных постоянных C_0, C_1:

$$2q_0+{}^1/_2C_0T^2+2\pi C_1=2v_0,\qquad 2q_0T+2p_0+C_0\frac{T^3}{6}+\pi C_1T-$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(-q_m+\frac{C_0}{m^2}-\frac{C_0}{m}T\sin mT-\frac{C_0}{m^2}\cos mT\right)\sin m\varepsilon+$$

$$+\sum_{m=1}\left(p_m+\frac{C_0}{m^2}T\cos mT-\frac{C_0}{m^3}\sin mT\right)(1+\cos m\varepsilon)=2x_0 \tag{3.11}$$

Упростим последнее уравнение в (3.11). Заметим, что

$$(m^{-1}C_0T\cos mT-m^{-2}C_0\sin mT)\cos m\varepsilon+$$
$$+(m^{-1}C_0T\sin mT+m^{-2}C_0\cos mT)\sin m\varepsilon=m^{-1}C_0T$$

Поэтому последнее уравнение (3.11) можно переписать

$$2q_0T+2p_0+C_0\frac{T^3}{6}+\pi C_1T+\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}[m^{-1}C_0T(\cos mT+1)+$$
$$+mp_m(\cos mT+1)-2m^{-2}C_0\sin mT+q_m\sin mT)=2x_0$$

Исключим C_1 из этого уравнения, используя первое уравнение (3.11). Получим уравнение, которое разрешим относительно C_0:

$$C_0=\frac{2x_0-q_0T-2p_0-Tv_0-\Sigma m^{-1}[mp_m(1+\cos mT)+q^m\sin mT]}{\Sigma m^{-1}[m^{-1}T(1+\cos mT)-2m^{-2}\sin mT]-{}^1/_{12}T^3} \tag{3.12}$$

$$(m=1,2,\ldots)$$

Для C_1 имеем соотношение

$$C_1=(2\pi)^{-1}(2v_0-2q_0-{}^1/_2C_0T^2) \tag{3.13}$$

где C_0 определяется формулой (3.12).

Таким образом, оптимальное управление полностью построено и определяется соотношениями (3.4), (3.9), где C_0, C_1 заданы формулами (3.12), (3.13).

4. При $T=2\pi k$ $(k=1,\ 2,\ldots)$ формулы, определяющие вид оптимального управления, упрощаются и приобретают простой физический смысл. В этом случае

$$C_0=(x_0-\pi kq_0-\pi kv_0-\Sigma p_m-p_0)\ /\ \{2\pi k[\Sigma m^{-2}-{}^1/_{24}(2\pi k)^2]\}$$

суммирование производится от $m=1$. Согласно (2.5), верно равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty}p_i=u(0,0)=u_0(0)$$

Сумма ряда Σm^{-2} $(m=1,\ 2,\ldots)$ известна [5] и равна $\pi^2/6$. Поэтому C_0 можно представить

$$C_0=[x_0-\pi kq_0-\pi kv_0-u_0(0)]\ /\ ([{}^1/_3\pi^3k(1-k^2)] \tag{4.1}$$

Выражение для $\psi(t)$ (3.8) при $T=2\pi k$ также упрощается. Используя формулу (3.13), получим

$$\psi(t)=C_1+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[-q_m\cos mt+\left(mp_m+\frac{C_0}{m}2\pi k\right)\sin mt\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}[-q_m\cos mt+mp_m\sin mt]+\frac{1}{\pi}(v_0-q_0)+C_0\left(2k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mt}{m}-\pi k^2\right) \tag{4.2}$$

Определим функцию $u^*(x,\ t)$ как решение уравнения (1.1) при начальных условиях (1.2) и $G=0$, т. е. функция $u^*(x,\ t)$ отвечает свободным колебаниям стержня при отсутствии управляющей силы G. Согласно (2.9), функции $u^*(x,\ t)$ и $\partial u^*(x,\ t)\ /\ \partial x$ задаются соотношениями

$$u^*(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q_m}{m}\sin mt+p_m\cos mt\right)\cos mx+p_0+q_0t$$

$$\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty}(q_m\cos mt-mp_m\sin mt)\cos mx+q_0$$

В этом случае имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos mt - mp_m \sin mt = \frac{\partial u^*(0,t)}{\partial x} - q_0$$

Выражение для $\psi(t)$ (4.2) с учетом соотношений (3.13), (4.1) перепишется в виде

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi}\left\{\left[v_0 - \frac{\partial u^*(0,t)}{\partial t}\right] + 2\pi k C_0 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mt}{m} - \frac{\pi k}{2}\right)\right\} \qquad (4.3)$$

Верно равенство [5]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \sin mx = \frac{1}{2}(\pi - x) \qquad (0<x<2\pi)$$

Представим текущее время в виде $t=2\pi[t/2\pi]+\tau$, где $[\ldots]$ означает целую часть заключенного в квадратные скобки числа, $0\leqslant\tau<2\pi$. Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \sin mt = \frac{1}{2}(\pi - \tau) \quad \left(2\pi\left[\frac{t}{2\pi}\right] < t < 2\pi\left(\left[\frac{t}{2\pi}\right] + 1\right)\right)$$

С учетом этой формулы выражение для $\psi(t)$ перепишется в виде (4.4)

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi}\left[\left(v_0 - \frac{\partial u^*(0,t)}{\partial t}\right) + \frac{x_0 - \pi k q_0 - \pi k v_0 - u_0(0)}{{}^1/_3\pi^2(1-k^2)}(\pi - \tau - \pi k)\right.$$

Подставляя $\psi(t)$ в выражение (3.9) и (3.4), получим выражение для управляющей функции

$$G(t) = \frac{\pi}{2}\left[C_0 t + \frac{\psi}{k}(t)\right] = \frac{1}{2k}\left(v_0 - \frac{\partial u^*(0,t)}{\partial t}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2k}\frac{x_0 - v_0 k\pi - q_0 k\pi - u_0(0)}{{}^1/_3\pi^2(1-k^2)}(t - \tau - \pi(k-1)) \qquad (4.5)$$

Управление $G(t)$ (4.5) представлено в виде двух слагаемых, которые имеют простой физический смысл. Первое слагаемое обеспечивает перевод стержня из произвольного начального состояния в состояние поступательного движения с ростом скорости центра масс на $v_0 - q_0$ к моменту $T=2\pi k$. При этом, как показывают несложные расчеты, центр масс стержня перемещается на расстояние

$$(v_0+q_0)k\pi + \sum_{i=1}^{\infty} p_i = (v_0+q_0)k\pi + u(0,0) - p_0$$

Второе слагаемое обеспечивает перемещение центра масс стержня на расстояние $x_0-(v_0+q_0)k\pi-u(0,\,0)$. При этом стержень перемещается как жесткое тело. Управление, соответствующее второму слагаемому,— кусочно-постоянная функция времени. Однако колебаний стержня в конце перемещения не возникает, так как продолжительность интервалов постоянства управления равна 2π, суммарное перемещение центра масс стержня при управлении $G(t)$ (4.5) составляет $x_0 - p_0$. Первоначальное отклонение центра масс от равновесного состояния равно p_0. Поэтому в конечном итоге центр масс оказывается перемещенным на расстояние x_0, что и требовалось.

Отметим, что аналогичная задача решена независимо и опубликована в [6]. В публикуемой работе приводится иное представление оптимального управления через текущее фазовое состояние и время движения системы, дана механическая интерпретация найденного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
3. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.
5. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. М.– Л.: Гостехиздат, 1951. 396 с.
6. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством граничного силового воздействия.– ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1095 – 1103.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1981