МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1982

УДК 539.3:534.1

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

ЗОРИЙ Л. М.

Для аналитического исследования динамического поведения многопараметрических деформируемых систем существенное значение имеет процесс построения характеристических определителей и характеристических рядов соответствующих обобщенных краевых задач [1–6].

В публикуемой работе на основе известных результатов [6–9] разрабатывается общий способ построения характеристических определителей, являющихся универсальными для упругих систем, изучение которых сводится к одномерным задачам. Рассматриваются также вопросы развития метода характеристических рядов.

Указанный способ применяется к типичным краевым задачам для дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков. Строятся соответствующие характеристические определители универсального вида и устанавливаются дифференциальные зависимости между определяющими их функциями. Приводятся примеры применения данных универсальных уравнений к получению ряда расчетных формул.

1. Рассматриваются упругие системы, исследование малых колебаний и устойчивости которых сводится к обобщенной краевой задаче такого вида

$$L[y]-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_{ij}a_{ij}(x)\left[y^{(j-1)}(x)\delta(x-x_i)\right]^{(j-1)}=0 \tag{1.1}$$

$$V_s[y(a),y'(a),\ldots,y^{(n-1)}(a),y(b),y'(b),\ldots,y^{(n-1)}(b)]=0\quad (s=1,2,\ldots,n) \tag{1.2}$$

$$L[y]\equiv y^{(n)}(x)+\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu(x)y^{(n-\nu)}(x) \tag{1.3}$$

где $p_\nu(x)$, $a_{ij}(x)$ — заданные на промежутке $a\leqslant x\leqslant b$ функции, непрерывно дифференцируемые до порядков $n-\nu$ и r_n-1 соответственно, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; $r_n=E[n/2]$, α_{ij} — некоторые параметры (зависящие от характеристического показателя λ, характеристик сосредоточенных масс, коэффициентов жесткости сингулярных упругих связей и других величин), x_i — данные точки, причем $a<x_1<x_2<\ldots<x_m<b$.

Предлагаемый способ построения характеристических определителей рассматриваемых задач основывается на следующей формуле общего решения уравнения (1.1):

$$y(x,\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}[Q_m(x,x_m,x_{m-1},\ldots,x_1,\alpha)] \tag{1.4}$$

$$Q_q(x,x_q,x_{q-1},\ldots,x_1,\alpha)=Q_{q-1}(x,x_{q-1},\ldots,x_1,\alpha)+$$
$$+\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_{qj}Q_{q-1}^{(j-1)}(x_q,x_{q-1},\ldots,x_1,\alpha)f_{qj}(x,x_q) \tag{1.5}$$

$$f_{ij}(x,x_i)=(-1)^{j-1}\frac{\partial^{j-1}(K(x,\alpha)a_{ij}(\alpha))}{\partial\alpha^{j-1}}\bigg|_{\alpha=x_i}\theta(x-x_i) \tag{1.6}$$

$$Q_0(x,\alpha)=K(x,\alpha)\quad (q=1,2,\ldots,m) \tag{1.7}$$

где $K(x, \alpha)$ — функция влияния (основная фундаментальная функция) уравнения $L[y]=0$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда, A_k — произвольные постоянные. Формула (1.4) непосредственно следует из [7, 8].

Подстановка данного общего решения при $\alpha=a$ в краевые условия вида (1.2) приводит к характеристическому определителю задачи, зависящему в конечном счете явным образом от значений функции влияния $K(x, \alpha)$, ее производных и указанных выше параметров. Из этого определителя можно в конкретных случаях получать универсальные характеристические уравнения колебаний и устойчивости многопараметрических систем. Поскольку исследование указанных уравнений, как и определение функции $K(x, \alpha)$, может оказаться весьма сложной проблемой, то здесь целесообразно применять метод характеристических рядов [5, 8]. Для построения характеристического ряда задачи достаточно, учитывая аналитическую зависимость от λ коэффициентов $p_\nu(x)$ и параметров α_{ij}, представлять функцию влияния в виде

$$K(x, \alpha)=K_0(x, \alpha)+\lambda K_1(x, \alpha)+\lambda^2 K_2(x, \alpha)+\ldots \tag{1.8}$$

и группировать слагаемые характеристического определителя по степеням $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots$.

Отметим, что если при этом основная фундаментальная функция уравнения $L[y]=0$ и данные рассматриваемой задачи определены с точностью до λ^k включительно, то будут получены точные аналитические формулы для первых k коэффициентов ее характеристического ряда.

В случаях, когда $p_\nu(x)$ — голоморфные функции аргумента x, представления (1.8) для функции $K(x, \alpha)$ и ее производных можно получить предложенным ранее методом [9], причем коэффициенты $K_i(x, \alpha)$ определяются рядами по степеням $x-\alpha$. Структура этих рядов может быть сложной, поэтому полезно иметь также соответствующие интегральные представления.

В рассматриваемых задачах дифференциальное выражение (1.3), как правило, можно записать так:

$$L[y]\equiv L_0[y]-pM[y] \tag{1.9}$$

$$M[y]\equiv \sum_{\mu=0}^{r} b_\mu(x)\, y^{(r-\mu)}(x) \qquad (r<n) \tag{1.10}$$

где p — некоторый параметр (вещественный или комплексный), причем коэффициенты в $L_0[y]$ и $M[y]$ от p не зависят.

Решение задачи Коши, определяющей функцию влияния $K(x, \alpha)$ уравнения $L[y]=0$, равносильно решению следующего интегродифференциального уравнения Вольтерра второго рода

$$K(x, \alpha)=K_0(x, \alpha)+p\int_\alpha^x K_0(x, t)M[K(t, \alpha)]dt \tag{1.11}$$

где $K_0(x, \alpha)$ — функция влияния уравнения $L_0[y]=0$.

Представляя в (1.11) функцию $K(x, \alpha)$ в виде ряда по параметру p, нетрудно получить для его коэффициентов такие соотношения

$$K_i(x, \alpha)=\int_\alpha^x K_0(x, t)\,U_{i-1}(t, \alpha)\,dt, \quad U_{i-1}(x, \alpha)=M[K_{i-1}(x, \alpha)] \quad (i=1,2,\ldots) \tag{1.12}$$

Следовательно

$$K_1(x, \alpha)=\int_\alpha^x K_0(x, t)M[K_0(t, \alpha)]dt, \quad K_2(x, \alpha)=\int_\alpha^x\int_\alpha^z K_0(x, z)M[K_0(z, t)]\times$$
$$\times M[K_0(t, \alpha)]dzdt, \ldots \tag{1.13}$$

(в частном случае $M[y]=f(x)y$, отсюда получаются хорошо известные формулы для определения итерированных ядер соответствующего интегрального уравнения Вольтерра).

Таким образом, задача представления основной фундаментальной функции в виде ряда по параметру и построения соответствующих характеристических рядов в общем решена. При этом коэффициенты $K_i(x, \alpha)$ в разложении вида (1.8) определяются квадратурными формулами (1.12), (1.13) или указанными степенными рядами.

Заметим, что аналогичные формулы можно построить также для таких уравнений

$$L[y]=\sum_{s=1}^{k} p^s M_s[y] \quad (m_s<n) \tag{1.14}$$

(m_s — порядок дифференциального выражения $M_s[y]$).

2. При изучении поперечных колебаний струны с сосредоточенными массами и упругими связями, продольных и крутильных колебаний упругих (невполне упругих) стержней, несущих массы или диски и имеющих сингулярные упругие закрепления, а также в некоторых других случаях задача (1.1), (1.2) имеет следующий вид:

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y-\sum_{i=1}\alpha_i a_i(x)y(x)\delta(x-x_i)=0 \tag{2.1}$$

$$y'(a)-\alpha_0 y(a)=0, \quad y'(b)+\beta_0 y(b)=0 \tag{2.2}$$

Применение данного выше способа приводит здесь к такому характеристическому уравнению

$$\Phi'(b, a)+\beta_0\Phi(b, a)=0, \quad \Phi(x, \alpha)\equiv Q_m^{\boldsymbol{\cdot}}(x, \alpha)-[\alpha_0+p_1(\alpha)]Q_m(x, \alpha) \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}Q_m(x, \alpha)=K(x, \alpha)+\sum_{i=1}^{m} r_i K(x_i, \alpha)K(x, x_i)+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=2}^{m} r_i r_j K(x_i, \alpha)K(x_j, x_i)\times \\ \times K(x, x_j)+\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=2}^{m-1}\sum_{k=3}^{m} r_i r_j r_k K(x_i, \alpha)K(x_j, x_i)K(x_k, x_j)K(x, x_k)+\ldots+r_1 r_2\ldots \\ \ldots r_m K(x_1, \alpha)K(x_2, x_1)\ldots K(x_m, x_{m-1})K(x, x_m) \\ r_s=\alpha_s a_s(x_s) \quad (s=1, 2, \ldots, m)\end{gathered} \tag{2.4}$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по параметру α.

Построенное уравнение (2.3) является общим для многопараметрической задачи (2.1), (2.2). Оно зависит явным образом от основной фундаментальной функции $K(x, \alpha)$, определяемой «гладкой частью» уравнения (2.1), и от параметров, характеризующих граничные условия и «включения». Из него в любых частных случаях получаются характеристические (в том числе частотные) уравнения соответствующих континуально-дискретных, континуальных (сосредоточенные массы отсутствуют) и дискретных колебательных систем (распределенная масса пренебрежимо мала по сравнению с сосредоточенными). Поэтому данное уравнение можно назвать универсальным характеристическим уравнением колебаний (устойчивости) деформируемых систем, изучение которых сводится к задачам вида (2.1), (2.2). Некоторые его применения иллюстрируются на задаче о продольных колебаниях упругого стержня. Исходные данные определяются при этом формулами

$$\begin{gathered}p_1(x)=v'v^{-1}, \quad p_2(x)=\rho(x)[S(x)\lambda^2+B(x)\lambda]v^{-1} \\ \alpha_i=M_i\lambda^2+b_i\lambda+c_i, \quad a_i=v^{-1}(x_i) \quad (i=1, 2, \ldots, m) \\ v=E(x)S(x), \quad \alpha_0=cv^{-1}(a), \quad \beta_0=ev^{-1}(b)\end{gathered} \tag{2.5}$$

где $E(x)$ — модуль Юнга, $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня, $\rho(x)$ — его плотность, $B(x)$ — коэффициент распределенного внешнего трения, c, e — коэффициенты упругости закреплений концов, M_i, b_i, c_i — параметры массы, трения и жесткости упругой связи в точке x_i $(i=1, 2, \ldots, m)$.

Если выполняется неравенство

$$\int_a^b \rho(x) S(x)\, dx \ll \sum_{i=1}^m M_i \tag{2.6}$$

то целесообразно рассмотреть сначала соответствующую дискретную систему $(p_2(x)\equiv 0)$. В этом случае функция влияния не зависит от характеристического показателя λ и определяется формулой

$$K(x,\alpha)=v(\alpha)J(x,\alpha), \quad J(x,\alpha)=\int_\alpha^x v^{-1}(t)\,dt \tag{2.7}$$

причем левая часть уравнения (2.3) становится характеристическим полиномом указанной системы с m степенями свободы.

Например, для системы с двумя степенями свободы уравнение (2.3) нетрудно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{gathered}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2J_{21}+e(1+\alpha_1J_{31}+\alpha_2J_{32}+\alpha_1\alpha_2J_{21}J_{32})+\\ +c(1+\alpha_1J_{10}+\alpha_2J_{20}+\alpha_1\alpha_2J_{21}J_{10})+\\ +ce(J_{30}+\alpha_1J_{10}J_{31}+\alpha_2J_{20}J_{32}+\alpha_1\alpha_2J_{10}J_{21}J_{32})=0\\ J_{kl}=J(x_k, x_l), \quad x_0=a, \quad x_3=b\end{gathered} \tag{2.8}$$

Отсюда можно получать многие расчетные соотношения. Так, частота собственных колебаний $(\lambda=i\omega)$ соответствующей системы с одной степенью свободы $(\alpha_2=0,\ b_1=0)$ определяется формулой

$$\omega^2=c_1+\frac{c+e+ceJ(b,a)}{1+cJ(x_1,a)+eJ(x_1,b)+ceJ(x_1,a)J(b,x_1)} \tag{2.9}$$

(подобные формулы имеют место для аналогичных систем при $m\leqslant 4$).

Для консольного конического стержня с двумя сосредоточенными массами (M_1 в точке x_1 и M_2 на свободном конце) из (2.8) после вычисления соответствующих интегралов следует, что

$$\begin{gathered}(\omega^2)_{1,2}=\frac{q\pi E r_2^2}{2M_1M_2lx_1(l-x_1)}(M_1x_1+M_2q\mp\sqrt{D})\\ D=(M_1x_1-M_2q)^2+4M_1M_2x_1^2, \quad q=x_1+\frac{r_1}{r_2}(l-x_1)\end{gathered} \tag{2.10}$$

(r_1, r_2 — радиусы поперечных сечений защемленного и свободного концов стержня). В частных случаях из (2.8)—(2.10) получаются известные формулы [6, 10—12].

Если в рассматриваемых задачах $m\geqslant 4$, или необходимо учитывать распределенную массу, то к определению низших частот (критических значений) и форм колебаний как функций параметров рационально применять отмеченный выше метод [5, 11]. Исходя из (2.3) нетрудно найти последовательно коэффициенты соответствующих характеристических рядов. Например, для консольного стержня с одной массой

$$\begin{gathered}B_0=1, \quad B_2=\frac{v(b)}{v(a)}K_1'(b,a)+M_1J_{10}\\ B_4=\frac{v(b)}{v(a)}K_2'(b,a)+M_1K_1(b,a), \ldots\end{gathered} \tag{2.11}$$

причем функции $K_i(x, \alpha)$ определены формулами (1.12). Теперь в любом конкретном случае можно вычислять величины (2.11) и определять с недостатком и с избытком низшие частоты [10]. Аналогично находятся критические значения нагрузок и исследуется влияние на них различных параметров [5, 11].

Следует отметить, что при исчезающе малой распределенной массе (левая часть в (2.6) стремится к нулю) величины $K_i'(b, a)$ и $K_1(b, a)$ в (2.11) также исчезают, причем соответствующие нижняя (ω_-^2) и верхняя (ω_+^2) оценки совпадают с точной формулой вида (2.9). В подобных случаях

$$(\omega_+^2-\omega_-^2)\,\omega_+^{-2}<\varepsilon^2=(B_4B_2^{-2})^2 \quad (\varepsilon\ll 1) \tag{2.12}$$

С учетом формул (2.11), например, можно показать, что

$$\begin{gathered}\varepsilon<{}^1/_4\varkappa J_{30}^2[M_1v(a)+\varkappa]\,[M_1\mu_1(x_1-a)+\mu_2\varkappa]^{-1}\\ \mu_1=\min_{a\leqslant u\leqslant x_1} v^{-1}(u), \qquad 0\leqslant\mu_2\leqslant J_{30}\end{gathered} \tag{2.13}$$

где $\varkappa$ — левая часть неравенства (2.6).

Соотношениями (2.12), (2.13) и аналогичными им определяются пределы применимости уравнений и формул вида (2.8)—(2.10) к рассматриваемым континуально-дискретным системам.

3. Рассматривается краевая задача вида (1.1)—(1.2) для уравнения четвертого порядка (n—4, r_n=2) при таких граничных условиях:

$$\left.\begin{aligned}&fy''-\psi_0y'-d_0y=0\\ &(fy'')'-c_0y'+\varkappa_0y=0\end{aligned}\right\}\ \text{при } x=a \qquad \left.\begin{aligned}&fy''+\psi_1y'-d_1y=0\\ &(fy'')'-c_1y'-\varkappa_1y=0\end{aligned}\right\}\ \text{при } x=b \tag{3.1}$$

Ее характеристический определитель, построенный тем же способом, определяется формулой

$$\Delta=\{(c_1d_1+\varkappa_1\psi_1)T_1+(\psi_1f'+c_1f)T_2+f^2T_3-fd_1T_4-(d_1f'+\varkappa_1f)T_1'+\psi_1fT_2'\}\,|_{x=b} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}T_1=-\gamma_{01}F_4+\beta_0F_4^{\boldsymbol{\cdot}}+\beta_1F_{22}-\alpha_1F_{22}^{\boldsymbol{\cdot}}-F_{02}-\alpha_0\Phi_{22}\\ T_2=-\gamma_{01}F_{21}+\beta_0F_{21}^{\boldsymbol{\cdot}}+\beta_1F_0-\alpha_1F_0^{\boldsymbol{\cdot}}-W_{02}-\alpha_0\Phi_{11}\\ T_3=-\gamma_{01}F_{01}+\beta_0F_{01}^{\boldsymbol{\cdot}}+\beta_1W_{01}-\alpha_1W_{01}^{\boldsymbol{\cdot}}-W_{10}-\alpha_0\Phi_{01}\\ T_4=-\gamma_{01}\Phi_{21}+\beta_0\Phi_{21}^{\boldsymbol{\cdot}}+\beta_1\Phi_{12}-\alpha_1\Phi_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}-\Phi_{02}-\alpha_0V_0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Величины α_r, β_r (r=0, 1) являются целыми функциями от параметров краевых условий (3.1) и значений при $x=\alpha$ коэффициентов выражения $L[y]$ и их производных; $\gamma_{01}=\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0$; все другие функции, содержащиеся в соотношениях (3.3), выражаются через основную фундаментальную функцию $Q(x, \alpha)$ и ее производные следующими формулами (в которых индекс m при Q_m ради простоты записи пропущен):

$$\begin{gathered}F_4=QQ^{\boldsymbol{\cdot}\prime}-Q^{\boldsymbol{\cdot}}Q', \quad F_{21}=Q'Q^{\boldsymbol{\cdot}\prime\prime}-Q''Q^{\boldsymbol{\cdot}\prime}\\ F_{22}=Q^{\boldsymbol{\cdot}}Q^{\boldsymbol{\cdot\cdot}\prime}-Q^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}Q^{\boldsymbol{\cdot}\prime}, \quad F_0=\frac{\partial^2Q}{\partial\alpha\,\partial x}\frac{\partial^4Q}{\partial\alpha^2\,\partial x^2}-\frac{\partial^3Q}{\partial\alpha\,\partial x^2}\frac{\partial^3Q}{\partial\alpha^2\,\partial x}\\ F_{01}=\frac{\partial^2Q}{\partial x^2}\frac{\partial^4Q}{\partial\alpha\,\partial x^3}-\frac{\partial^3Q}{\partial x^3}\frac{\partial^3Q}{\partial\alpha\,\partial x^2} \qquad F_{02}=\frac{\partial^2Q}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^4Q}{\partial\alpha^3\,\partial x}-\frac{\partial^3Q}{\partial\alpha^2\,\partial x}\frac{\partial^3Q}{\partial\alpha^3}\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$W_{10}=\frac{\partial^4 Q}{\partial\alpha^2\,\partial x^2}\cdot\frac{\partial^6 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x^3}-\frac{\partial^5 Q}{\partial\alpha^2\,\partial x^3}\frac{\partial^5 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x^2},$$

$$W_{01}=\frac{\partial^5 Q}{\partial\alpha^2\,\partial x^3}\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha\,\partial x}-\frac{\partial^4 Q}{\partial\alpha\,\partial x^3}\frac{\partial^4 Q}{\partial\alpha^2\,\partial x^2},$$

$$W_{02}=\frac{\partial^3 Q}{\partial\alpha^2\,\partial x}\cdot\frac{\partial^5 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x^2}-\frac{\partial^4 Q}{\partial\alpha^2\,\partial x^2}\frac{\partial^4 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x},$$

$$V_0=Q\frac{\partial^6 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x^3}-\frac{\partial^3 Q}{\partial\alpha^3}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}$$

$$\Phi_{01}=\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\frac{\partial^6 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x^3}-\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\frac{\partial^5 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x^2},$$

$$\Phi_{02}=\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^6 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x^3}-\frac{\partial^3 Q}{\partial\alpha^3}\frac{\partial^5 Q}{\partial\alpha^2\,\partial x^3}$$

$$\Phi_{11}=\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial^5 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\frac{\partial^4 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x},\qquad \Phi_{12}=\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\frac{\partial^5 Q}{\partial\alpha^2\,\partial x^3}-\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^4 Q}{\partial\alpha\,\partial x^3}\tag{3.5}$$

$$\Phi_{21}=Q\frac{\partial^4 Q}{\partial\alpha\,\partial x^3}-\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\frac{\partial Q}{\partial\alpha},\qquad \Phi_{22}=Q\frac{\partial^4 Q}{\partial\alpha^3\,\partial x}-\frac{\partial^3 Q}{\partial\alpha^3}\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Имеют место тождественные соотношения

$$\Phi_{01}\equiv F_{01}{}^{\cdot\cdot}-W_{01},\quad \Phi_{02}\equiv F_{02}{}''-W_{02},\quad \Phi_{11}\equiv F_{21}{}^{\cdot\cdot}-F_0$$

$$\Phi_{12}\equiv F_{22}{}''-F_0,\quad \Phi_{21}\equiv F_4{}''-F_{21},\quad \Phi_{22}\equiv F_4{}^{\cdot\cdot}-F_{22}\tag{3.6}$$

$$V_0\equiv\Phi_{22}{}''-\Phi_{11},\quad V_0\equiv\Phi_{21}{}^{\cdot\cdot}-\Phi_{12}$$

$$V_0\equiv\frac{\partial^4 F_4}{\partial\alpha^2\,\partial x^2}-\frac{\partial^2 F_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial\alpha^2}+F_0$$

Поэтому функции (3.5) и V_0 нетрудно построить имея остальные. Таким образом, справедлив такой вывод: для рассматриваемого класса задач достаточно определять девять функций (3.4).

Следует отметить, что при исследовании малых колебаний и устойчивости равновесия конкретных систем характеристический определитель (3.2), как правило, существенно упрощается. В частности, имеют место уравнения

$$F_4(b,a)=0,\quad F_4{}'(b,a)=0,\quad S(b,a)=0,\quad S'(b,a)=0\tag{3.7}$$

$$S(x,\alpha)\equiv\dot f(\alpha)F_4{}^{\cdot}(x,\alpha)-2f'(\alpha)F_4(x,\alpha)$$

Первое из них отвечает жесткой заделке концов стержня (прямоугольной пластинки, два параллельных края которой оперты и др.); второе — левому, заделанному концу и правому, шарнирно-опертому; третье — левому, шарнирно-опертому и правому, заделанному; четвертое — шарнирно-опертым концам.

Для консоли, левый конец которой заделан упруго (ψ), а к правому приложена сжимающая (растягивающая) нагрузка (p), имеем

$$[1+\psi p_1(a)]R(b,a)-\psi R^{\cdot}(b,a)=0$$

$$R(x,\alpha)\equiv f(x)F_{01}(x,\alpha)-pF_{21}(x,\alpha)\tag{3.8}$$

При этом, например

$$p_1(x)=2f'f^{-1},\quad p_2(x)=(f''+N-\lambda^2\mu-b_2\lambda)f^{-1}$$

$$p_3(x)=(N'-\lambda^2\mu'-b_2{}'\lambda)f^{-1},\quad p_4(x)=(k+\lambda^2 g+b_1\lambda)f^{-1}\tag{3.9}$$

$$a_{ij}(x)=f^{-1};\quad -\alpha_{i1}=k_i+\lambda^2 M_i+\lambda\varepsilon_{i1},\quad \alpha_{i2}=c_i+\lambda^2 J_i+\lambda\varepsilon_{i2}$$

где $f(x)$ — изгибная жесткость стержня, $g(x)$, $\mu(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$ — его распределенные масса, момент инерции и соответствующие коэффициенты трения; $N(x)$, $k(x)$ — продольное усилие и коэффициент жесткости упругого основания, M_i, J_i, ε_{i1}, ε_{i2} — масса и момент инерции i-го твердого тела и соответствующие коэффициенты трения, k_i, c_i — коэффициенты жесткости сингулярностей основания.

Следует отметить, что здесь в случае $\alpha_{i2}=0$ функция Q_m также определяется формулой (2.4), в которой $K(x,\alpha)$ — функция влияния уравнения $L[y]=0$ четвертого порядка (аналогичное положение имеет место и для уравнений высших порядков). Формулу вида (2.4) можно построить таким же способом и при $\alpha_{i2}\neq 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$. Поэтому уравнения (3.7), (3.8) и подобные им можно получать в развернутой (явной) форме. При этом учет данных выше дифференциальных зависимостей между характеристическими определителями (или между их слагаемыми) существенно уменьшает объем аналитических преобразований, необходимых для построения соответствующих универсальных уравнений и их исследования.

Здесь, как и для задачи (2.1), (2.2), справедливы аналогичные выводы и соотношения вида (2.6), (2.7), (2.11)—(2.13). При этом нетрудно прийти к ряду расчетных формул. Например, в случае $m=1$ первое из уравнений (3.7) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\{F_4[K(x,\alpha)]-\alpha_{11}a_{11}(x_1)[K(x,x_1)S_1'-K'(x,x_1)S_1]+\\ +\alpha_{12}[f_{12}'(x,x_1)S_2-f_{12}(x,x_1)S_2']-\\ -\alpha_{11}\alpha_{12}a_{11}(x_1)a_{12}(x_1)F_4[K(x_1,\alpha)]F_4[K(x,x_1)]\}\Big|_{\substack{x=b\\ \alpha=a}}=0\\ S_j=K^{\cdot(j-1)}(x_1,\alpha)K(x,\alpha)-K^{(j-1)}(x_1,\alpha)K^{\cdot}(x,\alpha)\quad (j=1,2)\end{gathered}\tag{3.10}$$

Отсюда, в частности, при $\alpha_{12}=0$, $N(x)\equiv k(x)\equiv 0$ и достаточно малой распределенной массе будем иметь

$$\begin{gathered}(\alpha_{11})_S=F_4^{(s)}[K(b,a)]/a_{11}(x_1)[K(x,x_1)S_1'-K'(x,x_1)S_1]^{(s)}\Big|_{\substack{x=b\\ \beta=a}}\\ K(x,\alpha)=f(\alpha)\int\limits_{\alpha}^{x}\frac{(x-t)(t-\alpha)}{f(t)}\,dt\end{gathered}\tag{3.11}$$

где значения индекса $s=0, 1$ отвечают двум первым уравнениям (3.7). При $f(x)=\text{const}$ из (3.11) следуют известные формулы [12].

Предложенный способ построения характеристических определителей и характеристических рядов обобщается в различных направлениях. Он применим также к системам с жесткими промежуточными опорами (характеристические уравнения в таких случаях получаются из рассмотренных выше более общих уравнений при устремлении к бесконечности соответствующих параметров жесткости упругих опор). Например, из уравнения (3.8) для случая незагруженной безмассовой консоли постоянной жесткости с левым шарнирно-опертым концом, упругими опорами и сосредоточенными массами в точках x_1, x_3 и с жесткой опорой в точке x_2 будем иметь

$$\begin{gathered}x_2^2-{}^1/{}_3x_2[\alpha_{11}x_1^2(x_2-x_1)^2+\alpha_{31}x_2x_3(x_3-x_2)^2]/f+\\ +{}^1/{}_{36}\alpha_{11}\alpha_{31}x_1(x_2-x_1)^2(x_3-x_2)[x_3(x_2-x_1)(x_1^2+x_2^2-2x_2x_3)+\\ +x_2(x_1+x_2)(x_3-x_1)(2x_3-x_1-x_2)]/f^2=0\end{gathered}\tag{3.12}$$

Данное частотное уравнение (одно из простейших для систем с промежуточными жесткими опорами) также является универсальным, так как в (3.12) параметрам x_i (i=1, 2, 3), k_i M_i, ε_{i1} (i=1, 3) можно придавать любые допустимые значения. В частных случаях из (3.12) нетрудно прийти к уравнениям, построенным иным путем [10, 12].

Аналогично строятся характеристические определители универсального вида обобщенных краевых задач для уравнений более высоких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
4. *Леонов М. Я.* Основы механики упругого тела. Т. 1. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1963. 328 с.
5. *Зорий Л. М.* К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем.— Математические методы и физико-механические поля: Сб. статей. К.: Наук. думка, 1978, вып. 7, с. 16—20.
6. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М.: Машиностроение, 1973. 659 с.
7. *Зорий Л. М.* Об одном фундаментальном свойстве функции влияния.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 9, с. 806—808.
8. *Зорий Л. М.* К применению обобщенных функций в аналитических методах исследования сложных упругих систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 11, с. 991—994.
9. *Зорий Л. М.* О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 5, с. 353—356.
10. *Бернштейн С. А., Керопян К. К.* Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции. М.: Госстройиздат, 1960. 281 с.
11. *Зорий Л. М.* К теории устойчивости систем с распределенными параметрами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1968, № 11, с. 992—995.
12. Вибрации в технике. Справочник / Под ред. И. И. Артоболевского. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

Львов

Поступила в редакцию
23.II.1981