МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

УДК 531.74

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ПРИБОРНОГО ТРЕХГРАННИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УГЛОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

ТКАЧЕНКО А. И.

Предполагается, что с движущимся недеформируемым объектом связаны два правых ортогональных трехгранника, взаимное положение которых не известно. Измеряются проекции абсолютной угловой скорости объекта на оси первого (приборного) трехгранника и кинематические параметры, характеризующие положение второго связанного трехгранника относительно заданного инерциального координатного трехгранника. Решается методом векторного согласования задача определения ориентации первого связанного трехгранника относительно упомянутого инерциального трехгранника. Существенным моментом предлагаемого решения этой задачи является вычисление векторных частей кватернионов, характеризующих изменение ориентации объекта в течение двух последовательных интервалов времени.

1. Свяжем с корпусом движущегося объекта, который будем считать абсолютно жестким, ортонормированный базис E – правую тройку взаимно ортогональных единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Пусть на объекте установлен пространственный измеритель угловой скорости в виде совокупности чувствительных элементов, связанных с корпусом объекта так, что по показаниям этих чувствительных элементов, не содержащим погрешностей измерений, однозначно определяются компоненты ω_1, ω_2, ω_3 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости объекта в базисе E. Свяжем с объектом еще один ортонормированный базис $J(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$, предполагая, что его положение относительно некоторого ортонормированного базиса $I(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, сохраняющего неизменную ориентацию в инерциальном пространстве, характеризуется доступными определению углами Эйлера ψ, ϑ, φ. Взаимная ориентация базисов E и J не известна. Необходимо, используя измерения величин ω_1, ω_2, ω_3 и углов ψ, ϑ, φ, определить положение базиса E относительно базиса I.

Рассматриваемое ниже решение этой задачи основано на использовании метода векторного согласования [1, 2]. Особенность предлагаемого решения состоит в том, что в качестве промежуточных величин находятся векторные части кватернионов, характеризующих изменение ориентации объекта в течение двух последовательных интервалов времени. Излагаемая процедура определения ориентации базиса E является развитием результатов работ [3, 4].

В качестве параметров, характеризующих ориентацию базиса E относительно I, выберем параметры Родрига – Гамильтона λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 [5, 6]. Введем кватернион Λ, определив его выражением $\Lambda_E=\lambda_0+\lambda_1\mathbf{i}_1+\lambda_2\mathbf{i}_2+\lambda_3\mathbf{i}_3$. Здесь и далее нижний индекс в виде прописной буквы указывает базис, на который отображается кватернион или вектор. Кватернион Λ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Lambda}_E={}^1/_2\Lambda_E\circ\boldsymbol{\omega}_E,\qquad \Lambda_E(t_0)=\Lambda_0 \tag{1.1}$$

и условию нормировки $\Lambda\circ\bar{\Lambda}=1$. Здесь $\boldsymbol{\omega}_E=\omega_1\mathbf{i}_1+\omega_2\mathbf{i}_2+\omega_3\mathbf{i}_3$; чертой отмечается сопряженный кватернион.

Считая положение базиса E относительно I в начальный момент времени t_0 не известным даже приближенно, выберем в качестве начальных условий для интегрирования уравнения (1.1) произвольную четверку чисел, образующую кватернион $M_0=\mu_0(t_0)+\mu_1(t_0)\mathbf{i}_1+\mu_2(t_0)\mathbf{i}_2+\mu_3(t_0)\mathbf{i}_3$ и не стесненную никакими ограничениями, кроме условия нормировки $M_0\circ\overline{M}_0=1$. Тогда при $t\geqslant t_0$ вместо Λ_E определяется нормированный кватернион $M_E=\mu_0+\mu_1\mathbf{i}_1+\mu_2\mathbf{i}_2+\mu_3\mathbf{i}_3$ — решение уравнения

$$M_E^{\bullet}={}^1/_2 M_E\circ\boldsymbol{\omega}_E,\qquad M_E(t_0)=M_0 \tag{1.2}$$

Можно рассматривать компоненты кватерниона M_E как параметры Родрига — Гамильтона, характеризующие ориентацию триады E относительно некоторого ортонормированного базиса $K(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$, который при $t\geqslant t_0$ сохраняет неизменное положение в инерциальном пространстве, но не совпадает с базисом I. Теперь задача определения ориентации базиса E сводится к нахождению операций, которые были бы эквивалентны совмещению «модельного» базиса K с базисом I.

2. Введем нормированный кватернион $\Gamma_J=\gamma_0+\gamma_1\mathbf{i}_1+\gamma_2\mathbf{i}_2+\gamma_3\mathbf{i}_3$, задающий преобразование базиса I в базис J. Это преобразование может быть представлено как результат трех последовательных преобразований — поворотов на углы ψ, ϑ, φ вокруг соответствующих направлений. Поэтому $\Gamma_J=\Gamma_J(\psi, \vartheta, \varphi)$. Точнее, каждой совокупности значений ψ, ϑ, φ соответствуют два кватерниона (Γ и $-\Gamma$), задающие одно и то же преобразование $\mathbf{j}_n=\Gamma\circ\mathbf{i}_n\circ\overline{\Gamma}$ $(n=1, 2, 3)$. Если условиться о выборе знака Γ, то зависимость параметров Родрига — Гамильтона γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 от ψ, ϑ, φ можно считать известной и однозначной.

В некоторые моменты времени $t_1\geqslant t_0$ и $t_2>t_1$ определим значения углов ψ, ϑ, φ и сформируем соответствующие значения $\Gamma_J(t_1)$ и $\Gamma_J(t_2)$ кватерниона Γ_J. Так как $\Gamma_I=\Gamma_J$, то отображение на базис I кватерниона P, характеризующего изменение ориентации базиса J в течение интервала (t_1, t_2), определяется выражением [3]

$$P_I=p_0+\mathbf{p}=\Gamma_J(t_2)\circ\overline{\Gamma}_J(t_1) \tag{2.1}$$

Для определения ориентации базиса E необходима лишь векторная часть $\mathbf{p}=p_1\mathbf{i}_1+p_2\mathbf{i}_2+p_3\mathbf{i}_3$ кватерниона P_I. Единственным условием, налагаемым на выбор моментов измерений t_1 и t_2, является выполнение неравенства $\Gamma_J(t_2)\neq\pm\Gamma_J(t_1)$, из которого следует $\mathbf{p}\neq 0$.

Кватернион P задает также поворот базиса E вместе с объектом из положения, занимаемого этим базисом при $t=t_1$, в его положение при $t=t_2$. Согласно теореме о сложении преобразований, заданных кватернионами в одном базисе [6], $M_K(t_2)=P_K\circ M_K(t_1)$. Одновременно с измерением углов ψ, ϑ, φ в моменты времени t_1 и t_2 запомним значения $M_E(t_1)$ и $M_E(t_2)$ кватерниона M_E, полученного в результате интегрирования уравнения (1.2). Так как $M_E=M_K$, то

$$P_K=M_E(t_2)\circ\overline{M}_E(t_1) \tag{2.2}$$

В дальнейшем понадобится лишь векторная часть кватерниона P_K, которую в отличие от $\mathbf{p}$ обозначим $\boldsymbol{\nu}=\nu_1\mathbf{i}_1+\nu_2\mathbf{i}_2+\nu_3\mathbf{i}_3$. Подчеркнем, что здесь, наряду с нахождением по формуле (2.1) отображения вектора $\mathbf{p}$ на опорный базис I, вместо традиционного для метода векторного согласования отображения того же вектора на приборный базис E определяется по формуле (2.2) его отображение непосредственно на модельный базис K.

Перейдем к единичным векторам $\mathbf{p}^\circ=p_1{}^\circ\mathbf{i}_1+p_2{}^\circ\mathbf{i}_2+p_3{}^\circ\mathbf{i}_3$ и $\boldsymbol{\nu}^\circ=\nu_1{}^\circ\mathbf{i}_1+\nu_2{}^\circ\mathbf{i}_2+\nu_3{}^\circ\mathbf{i}_3$, пронормировав векторы $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\nu}$:

$$p_1{}^\circ=p^{-1}p_1,\qquad \nu_1{}^\circ=\nu^{-1}\nu_1\quad{\scriptstyle(1\,2\,3)},\qquad p=(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})^{1/2},\qquad \nu=(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})^{1/2} \tag{2.3}$$

Здесь (1 2 3) — символ циклической перестановки индексов в формулах. При отсутствии погрешностей измерений $\nu=p$.

3. Представим преобразование $\mathbf{e}_n=\Lambda\circ\mathbf{i}_n\circ\overline{\Lambda}$ $(n=1, 2, 3)$, задающее переход от базиса I к E, в виде последовательности двух преобразований: $\mathbf{k}_n=F\circ\mathbf{i}_n\circ\overline{F}$ и $\mathbf{e}_n=M\circ\mathbf{k}_n\circ\overline{M}$. Здесь F — нормированный кватернион, характеризующий ориентацию триады K относительно I. Используя теорему о сложении преобразований, заданных параметрами Родрига — Гамильтона [6], и учитывая $F_K=F_I$, получим

$$\Lambda_E=F_I\circ M_E, \qquad M_E=\overline{F}_I\circ\Lambda_E \tag{3.1}$$

Из формул (1.1), (1.2), (3.1) следует известное положение [7] $F_I=\mathrm{const}$, сохраняющее силу, пока взаимная ориентация базисов I и K остается неизменной.

Кватерниону F поставим в соответствие постоянный вектор конечного поворота $\boldsymbol{\theta}_f$, задающий переход триады I в положение K. Так как $\mathbf{p}^\circ$ и $\boldsymbol{\nu}^\circ$ суть отображения одного и того же единичного вектора на базисы I и K соответственно, то по теореме о преобразовании координат неизменного вектора [6] можно рассматривать ν_1°, ν_2°, ν_3° как координаты в базисе I единичного вектора, отличного от $\mathbf{p}^\circ$ и представляющего собой результат применения к $\mathbf{p}^\circ$ конечного поворота $-\boldsymbol{\theta}_f$. По формуле Родрига [5]

$$\boldsymbol{\nu}^\circ+{}^1/_2\boldsymbol{\theta}_f\times\boldsymbol{\nu}^\circ=\mathbf{p}^\circ-{}^1/_2\boldsymbol{\theta}_f\times\mathbf{p}^\circ \tag{3.2}$$

Кроме конечного поворота $-\boldsymbol{\theta}_f$ существует бесконечное множество поворотов, переводящих вектор $\mathbf{p}^\circ$ в положение $\boldsymbol{\nu}^\circ$. В частности, такой переход может быть задан некоторым конечным поворотом $-\boldsymbol{\theta}_q$ вокруг направления, перпендикулярного $\mathbf{p}^\circ$ и $\boldsymbol{\nu}^\circ$. Единичный вектор этого направления обозначим через $\mathbf{b}$. Полагая $\boldsymbol{\nu}^\circ\times\mathbf{p}^\circ\neq0$, запишем

$$\mathbf{b}=(\boldsymbol{\nu}^\circ\times\mathbf{p}^\circ)/\sqrt{1-(\boldsymbol{\nu}^\circ\cdot\mathbf{p}^\circ)^2} \tag{3.3}$$

Положим $\boldsymbol{\theta}_q=2\mathbf{b}\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\beta$. Для определения угла β заметим, что равенство (3.2) сохраняет силу при замене в нем $\boldsymbol{\theta}_f$ на $\boldsymbol{\theta}_q$, так что

$$\boldsymbol{\nu}^\circ+\mathbf{b}\times\boldsymbol{\nu}^\circ\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\beta=\mathbf{p}^\circ-\mathbf{b}\times\mathbf{p}^\circ\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\beta \tag{3.4}$$

Умножив обе части равенства (3.4) векторно на p° и учитывая $\mathbf{p}^\circ\cdot\mathbf{b}=0$, $\boldsymbol{\nu}^\circ\cdot\mathbf{b}=0$, получим

$$\boldsymbol{\nu}^\circ\times\mathbf{p}^\circ=\mathbf{b}(1+\mathbf{p}^\circ\cdot\boldsymbol{\nu}^\circ)\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\beta \tag{3.5}$$

Умножим обе части равенства (3.5) скалярно на $\mathbf{b}$. Используя выражение (3.3), находим

$$\mathrm{tg}\,{}^1/_2\beta=[(1-\mathbf{p}^\circ\cdot\boldsymbol{\nu}^\circ)/(1+\mathbf{p}^\circ\cdot\boldsymbol{\nu}^\circ)]^{1/2} \tag{3.6}$$

Обозначим через Q нормированный кватернион, задающий то же преобразование, что и вектор конечного поворота $\boldsymbol{\theta}_q$. Таких кватернионов должно быть два, отличающихся только знаками. Представим их в виде $Q=q_0+\mathbf{q}$, $q_0=\pm\cos{}^1/_2\beta$, $\mathbf{q}=\pm\mathbf{b}\sin{}^1/_2\beta$.

Полагая для определенности $q_0>0$, с помощью выражений (3.3), (3.6) получим

$$q_0=\sqrt{{}^1/_2(1+\mathbf{p}^\circ\cdot\boldsymbol{\nu}^\circ)}, \qquad \mathbf{q}={}^1/_2(\boldsymbol{\nu}^\circ\times\mathbf{p}^\circ)/q_0 \tag{3.7}$$

В алгоритме определения ориентации базиса E используются координаты вектора $\mathbf{q}_I=q_1\mathbf{i}_1+q_2\mathbf{i}_2+q_3\mathbf{i}_3$ в базисе I:

$$q_1=(2q_0)^{-1}(\nu_2^\circ p_3^\circ-\nu_3^\circ p_2^\circ) \quad {\scriptstyle(1\,2\,3)} \tag{3.8}$$

4. Представим преобразование, заданное конечным поворотом $\boldsymbol{\theta}_f$, в виде последовательности двух преобразований. Первое из них зададим посредством определенного выше конечного поворота $\boldsymbol{\theta}_q$, второе же охарактеризуем некоторым вектором конечного поворота $\boldsymbol{\theta}_s$. По формуле сложения конечных поворотов [5]

$$\boldsymbol{\theta}_f=(1-{}^1/_4\boldsymbol{\theta}_q\cdot\boldsymbol{\theta}_s)^{-1}(\boldsymbol{\theta}_q+\boldsymbol{\theta}_s+{}^1/_2\boldsymbol{\theta}_s\times\boldsymbol{\theta}_q) \tag{4.1}$$

Подставим выражение (4.1) в формулу (3.2). Учитывая определение вектора θ_q, получим

$$\begin{aligned}&\mathbf{p}^\circ-{}^1/_2(1-{}^1/_4\theta_q\cdot\theta_s)^{-1}[(\theta_s+\theta_q)\times\mathbf{p}^\circ+{}^1/_2\theta_q(\mathbf{p}^\circ\cdot\theta_s)]=\\&=\mathbf{v}^\circ+{}^1/_2(1-{}^1/_4\theta_q\cdot\theta_s)^{-1}[(\theta_s+\theta_q)\times\mathbf{v}^\circ+{}^1/_2\theta_q(\mathbf{v}^\circ\cdot\theta_s)]\end{aligned}\tag{4.2}$$

Используем еще одну запись формулы Родрига для вектора $-\theta_q$ [5], принимая при этом во внимание $\mathbf{p}^\circ\cdot\theta_q=0$:

$$\mathbf{v}^\circ=\mathbf{p}^\circ-(1+{}^1/_4\theta_q^2)^{-1}(\theta_q\times\mathbf{p}^\circ+{}^1/_2\theta_q^2\mathbf{p}^\circ)\tag{4.3}$$

Здесь $\theta_q^2=\theta_q\cdot\theta_q$. Подставив выражение (4.3) вместо $\mathbf{v}^\circ$ в формулу (4.2), получим после упрощений

$$\begin{aligned}&\theta_q\times\mathbf{p}^\circ+{}^1/_2\theta_q^2\mathbf{p}^\circ=(1-{}^1/_4\theta_q\cdot\theta_s)^{-1}\{(\theta_s+\theta_q)\times\mathbf{p}^\circ+\\&+{}^1/_2(\theta_q^2+\theta_q\cdot\theta_s)\mathbf{p}^\circ-{}^1/_4[\theta_s\cdot(\theta_q\times\mathbf{p}^\circ)]\theta_q\}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Равенство (4.4) удовлетворяется, если вектор конечного поворота θ_s параллелен $\mathbf{p}^\circ$. Таким образом, переход от базиса I к базису K может быть представлен в виде последовательности двух конечных поворотов, первый из которых совершается вокруг направления, перпендикулярного $\mathbf{p}^\circ$, а второй — вокруг направления $\mathbf{p}^\circ$. Можно показать, что при $\mathbf{v}^\circ\times\mathbf{p}^\circ\neq0$ вектор θ_s, удовлетворяющий уравнению (4.4), с необходимостью параллелен $\mathbf{p}^\circ$. Конечному повороту θ_s поставим в соответствие нормированный кватернион S. В силу сказанного выше $F_I=S_I\circ Q_I$ и на основании формулы (3.1) $Q_I\circ M_E=\bar{S}_I\circ\Lambda_E$.

Вычислив компоненты кватерниона Q_I по формулам (3.7), (3.8), в некоторый момент времени $t_3\geqslant t_2$ найдем кватернион $N_0=Q_I\circ M_E(t_3)$. При $t\geqslant t_3$ будем вместо уравнения (1.2) интегрировать уравнение

$$N_E^{\bullet}={}^1/_2N_E\circ\omega_E,\qquad N_E(t_3)=N_0\tag{4.5}$$

Найденный таким образом нормированный кватернион N удовлетворяет условию

$$\Lambda_E=S_I\circ N_E\tag{4.6}$$

и задает при $t\geqslant t_3$ положение базиса E относительно невращающейся ортонормированной триады $L(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$, повернутой относительно I на некоторый пока не известный угол α.

Нарушение предположения $\mathbf{v}^\circ\times\mathbf{p}^\circ\neq0$, использованного при выводе формул (3.7), означает либо тривиальный случай $\mathbf{v}^\circ=\mathbf{p}^\circ$ (при этом $Q=1$ и формулы (3.7), (3.8) сохраняют силу), либо особый случай $\mathbf{v}^\circ=-\mathbf{p}^\circ$. В последнем случае, который нетрудно обнаружить, $\beta=\pi$ и формулы (3.7), (3.8) непригодны для вычисления кватерниона Q_I. Вместо их использования положим $q_0=0$, а в качестве $\mathbf{q}_I$ возьмем любой единичный вектор, перпендикулярный $\mathbf{p}^\circ$. Тогда кватернион N будет обладать теми же свойствами, что и в общем случае [4].

5. В некоторые моменты времени $t_4>t_3$ и $t_5>t_4$ запомним значения кватерниона N_E, полученные в результате интегрирования уравнения (4.5). В те же моменты времени измерим углы ψ, ϑ, φ и сформируем кватернионы $\Gamma_J(t_4)$ и $\Gamma_J(t_5)$. Обозначим через $R=r_0+\mathbf{r}$ кватернион, характеризующий изменение ориентации объекта в пространстве в течение интервала (t_4, t_5). По аналогии с формулами (5.1), (5.2)

$$R_I=\Gamma_J(t_5)\circ\bar{\Gamma}_J(t_4),\qquad R_L=N_E(t_5)\circ\bar{N}_E(t_4)\tag{5.1}$$

В процессе определения ориентации базиса E по формулам (5.1) находятся векторные части $\mathbf{r}=r_1\mathbf{i}_1+r_2\mathbf{i}_2+r_3\mathbf{i}_3$ и $\rho=\rho_1\mathbf{i}_1+\rho_2\mathbf{i}_2+\rho_3\mathbf{i}_3$ соответственно кватернионов R_I и R_L. Если, как это предполагается в дальнейшем, $\Gamma_J(t_5)\neq\pm\Gamma_J(t_4)$, то $\mathbf{r}\neq0$ и $\rho\neq0$. Пронормировав векторы $\mathbf{r}$ и ρ, получим орты $\mathbf{r}^\circ=r_1^\circ\mathbf{i}_1+r_2^\circ\mathbf{i}_2+r_3^\circ\mathbf{i}_3$ и $\rho^\circ=\rho_1^\circ\mathbf{i}_1+\rho_2^\circ\mathbf{i}_2+\rho_3^\circ\mathbf{i}_3$:

$$r_1^\circ=r^{-1}r_1,\qquad \rho_1^\circ=\rho^{-1}\rho_1\ _{(1\,2\,3)}\qquad r=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{1/2},\qquad \rho=(\rho\cdot\rho)^{1/2}=r\tag{5.2}$$

Введем существенное для дальнейшего предположение о неколлинеарности векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$. При помощи формулы Родрига получим по аналогии с выражением (3.2)

$$\boldsymbol{\rho}^\circ + {}^1/_2\boldsymbol{\theta}_s \times \boldsymbol{\rho}^\circ = \mathbf{r}^\circ - {}^1/_2\boldsymbol{\theta}_s \times \mathbf{r}^\circ \qquad (5.3)$$

Подставим в формулу (5.3) выражение $\boldsymbol{\theta}_s = 2\mathbf{p}^\circ \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha$ и умножим скалярно обе части полученного равенства на $\mathbf{r}^\circ$. Считая $\mathbf{p}^\circ \cdot (\boldsymbol{\rho}^\circ \times \mathbf{r}^\circ) \neq 0$, получим

$$a = \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha = (1 - \mathbf{r}^\circ \cdot \boldsymbol{\rho}^\circ) / [\mathbf{p}^\circ \cdot (\boldsymbol{\rho}^\circ \times \mathbf{r}^\circ)] \qquad (5.4)$$

Представим кватернион S_I в виде

$$S_I = s_0 + \mathbf{s}, \qquad s_0 = \pm\cos {}^1/_2\alpha$$
$$\mathbf{s} = s_1\mathbf{i}_1 + s_2\mathbf{i}_2 + s_3\mathbf{i}_3 = \pm\mathbf{p}^\circ \sin {}^1/_2\alpha \qquad (5.5)$$

Удержим в выражениях (5.5) только верхний знак:

$$s_0 = (1 + a^2)^{-1/2}, \qquad s_1 = p_1{}^\circ a s_0 \quad (1\ 2\ 3) \qquad (5.6)$$

Вычислив кватернион S_I по формулам (5.4), (5.6), в некоторый момент $t = t_6$ найдем нормированный кватернион

$$\Lambda_E{}^*(t_6) = S_I \circ N_E(t_6) \qquad (5.7)$$

Согласно (4.6), $\Lambda_E{}^*(t_6) = \Lambda_E(t_6)$. Тем самым в момент $t = t_6$ становятся известными точные значения параметров, задающих ориентацию базиса E относительно базиса I.

Формулы (5.4), (5.6) непригодны для вычисления S_I, если векторы $\mathbf{r}^\circ$, $\boldsymbol{\rho}^\circ$ и $\mathbf{p}^\circ$ компланарны. Так как $\mathbf{p}^\circ \times \mathbf{r}^\circ \neq 0$, то упомянутая компланарность имеет место только при $\alpha = 0$ либо при $\alpha = \pi$. В первом из этих случаев, который обнаруживается при выполнении равенства $\boldsymbol{\rho}^\circ = \mathbf{r}^\circ$, имеем $S_I = 1$ и $\Lambda_E(t_6) = N_E(t_6)$. В случае $\alpha = \pi$ из формулы (5.5) находим $s_0 = 0$, $s_n = p_n{}^\circ$ $(n = 1, 2, 3)$.

6. Пусть вместо точных значений ω_n $(n = 1, 2, 3)$ компонент вектора $\boldsymbol{\omega}_E$ с помощью пространственного измерителя угловой скорости определяются приближенные значения $\omega_n{}^* = \omega_n + \Delta\omega_n$, где $\Delta\omega_n$ — малые погрешности измерения угловой скорости объекта. Тогда вместо уравнения (1.2) при $t_0 \leqslant t \leqslant t_3$ решается уравнение

$$M_E{}^{*\cdot} = {}^1/_2 M_E{}^* \circ (\boldsymbol{\omega}_E + \Delta\boldsymbol{\omega}_E), \qquad M_E{}^*(t_0) = M_0 \qquad (6.1)$$
$$\Delta\boldsymbol{\omega}_E = \Delta\omega_1\mathbf{i}_1 + \Delta\omega_2\mathbf{i}_2 + \Delta\omega_3\mathbf{i}_3$$

Оценим ошибку определения ориентации базиса E, вызванную погрешностями $\Delta\omega_n$, пренебрегая величинами выше первого порядка малости относительно $\Delta\boldsymbol{\omega}_E$. Хотя погрешности такой оценки могут неограниченно возрастать при $t \to \infty$, тем не менее, принимая во внимание конечную продолжительность процесса определения ориентации базиса E, можно считать указанную точность оценки допустимой. При этом нормированные кватернионы могут приближенно оцениваться кватернионами, нормы которых отличаются от единицы слагаемыми второго порядка малости.

Кватернион $M_E{}^*$ при $\Delta\boldsymbol{\omega}_E \neq 0$ задает ориентацию базиса E относительно ортонормированной триады K, медленно поворачивающейся в инерциальном пространстве. Ориентацию триады K относительно I охарактеризуем нормированным кватернионом $F^* \neq \mathrm{const}$, так что $\Lambda_E = F_I{}^*(t) \circ M_E{}^*$. Из формул (1.1), (6.1) следует $F_I{}^{*\cdot} = -{}^1/_2 \Delta\boldsymbol{\omega}_I \circ F_I{}^*$, где $\Delta\boldsymbol{\omega}_I = \Lambda \circ \Delta\boldsymbol{\omega}_E \circ \overline{\Lambda}$. Оперируя вместо $M_E(t_1)$ и $M_E(t_2)$ соответственно кватернионами $M_E{}^*(t_1)$ и $M_E{}^*(t_2)$, по формуле (2.2) вместо P_K найдем кватернион

$$P^* = \nu_0{}^* + \boldsymbol{\nu}^* = M_E{}^*(t_2) \circ \overline{M}_E{}^*(t_1) \qquad (6.2)$$

Через K' обозначим положение, занимаемое триадой K в момент $t = t_2$, а через M° — нормированный кватернион, задающий ориентацию базиса E

относительно K' при $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$. Тогда $\Lambda_E(t) = F_I^*(t_2) \circ M_E^\circ(t)$. Если кватернион P определяется формулой (2.1), то его отображение на базис K' имеет вид

$$P_K' = \nu_0 + \mathbf{v} = M_E^\circ(t_2) \circ \overline{M}_E^\circ(t_1) = \overline{F}_I^*(t_2) \circ P_I \circ F_I^*(t_2) \tag{6.3}$$

так как $\Lambda_E(t_2) \circ \overline{\Lambda}_E(t_1) = P_I$. Положим $F_I^*(t) \approx F_I^*(t_1) \circ [1 + \mathbf{u}(t)]$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, где $\mathbf{u} = O(\Delta\boldsymbol{\omega})$ и $\mathbf{u}(t_1) = 0$. С принятой точностью

$$\mathbf{u}^{\cdot} = -{}^1/_2\Delta\boldsymbol{\omega}', \qquad F_I^*(t_1) = F_I^*(t_2) \circ [1 - \mathbf{u}(t_2)] \tag{6.4}$$

Здесь $\Delta\boldsymbol{\omega}' = \overline{F}_I^*(t_1) \circ \Delta\boldsymbol{\omega}_I \circ F_I^*(t_1)$ — отображение вектора $\Delta\boldsymbol{\omega}$ на неподвижный базис, представляющий собой положение базиса K в момент $t = t_1$. Из формул (6.2), (6.3), (6.4) следует $P^* = P_K' \circ [1 - \mathbf{u}(t_2)]$.

Положим $F_I^*(t_2) = S_I(t_2) \circ Q_I(t_2)$. Кватернион $Q_I(t_2) = q_0 + \mathbf{q}$ при $\mathbf{v} \neq \pm\mathbf{p}$ связан с ортами $\mathbf{p}^\circ$ и $\mathbf{v}^\circ$, полученными в результате нормировки векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$ соответственно, посредством формул (3.7) и задает поворот триады I вокруг направления, перпендикулярного $\mathbf{p}^\circ$ и $\mathbf{v}^\circ$; тогда кватернион $S_I(t_2)$ задает последующий поворот триады I вокруг направления $\mathbf{p}^\circ$ до совмещения с K'. Но вместо $\mathbf{v}$ определяется по формуле (6.2) вектор $\mathbf{v}^*$. Пронормировав его по правилу (2.3), получим орт $\mathbf{v}^{\circ *} = \mathbf{v}^\circ + \Delta\mathbf{v}^\circ$, где $\Delta\mathbf{v}^\circ = p^{-1} p_0 \mathbf{v}^\circ \times [\mathbf{v}^\circ \times \mathbf{u}(t_2)] + \mathbf{u}(t_2) \times \mathbf{v}^\circ$.

Используя $\mathbf{v}^{\circ *}$ вместо $\mathbf{v}^\circ$ при вычислениях по формулам (3.7), получим вместо $Q_I(t_2)$ кватернион Q^*:

$$Q^* = q_0 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^\circ \cdot \Delta\mathbf{v}^\circ}{4q_0^2}\right) + \mathbf{q}\left(1 - \frac{\mathbf{p}^\circ \cdot \Delta\mathbf{v}^\circ}{4q_0^2}\right) + \frac{\Delta\mathbf{v}^\circ \times \mathbf{p}^\circ}{2q_0}$$

Пусть $t_3 = t_2$. В момент t_3 найдем нормированный кватернион $N_0^* = Q^* \circ \overline{M}_E^*(t_3)$, который служит начальным условием для интегрирования уравнения $N_E^{*\cdot} = {}^1/_2 N_E^* \circ (\boldsymbol{\omega}_E + \Delta\boldsymbol{\omega}_E)$ вместо уравнения (4.5) при $t \geqslant t_3$. Кватернион $N_E^*(t)$ задает ориентацию базиса E относительно подвижной триады L. С принятой точностью

$$\Lambda_E(t_3) = G_I(t_3) \circ N_E^*(t_3), \qquad G_I(t_3) = S_I(t_2) \circ (1 - \mathbf{c})$$

$$\mathbf{c} = \frac{\Delta\mathbf{v}^\circ \times \mathbf{p}^\circ}{2} - \frac{\mathbf{p}^\circ \cdot \Delta\mathbf{v}^\circ}{2q_0}\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \Delta\mathbf{v}^\circ}{2q_0}\mathbf{p}^\circ \tag{6.5}$$

При $t \geqslant t_3$ положим $\Lambda_E = G_I \circ N_E^*$. Кватернион $G_I(t)$, задающий мгновенное положение базиса L относительно I, представим в виде $G_I(t) = G_I(t_3) \circ [1 + \mathbf{v}(t)]$, где $\mathbf{v} = O(\Delta\boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{v}(t_3) = 0$. В первом приближении $\mathbf{v}^{\cdot} = -{}^1/_2 \overline{G}_I(t_3) \circ \Delta\boldsymbol{\omega}_I \circ G_I(t_3)$.

Определив в моменты t_4 и t_5 значения кватернионов Γ_J и N_E^*, вместо R_L найдем по формуле (5.1) нормированный кватернион

$$R^* = \rho_0^* + \boldsymbol{\rho}^* = N_E^*(t_5) \circ \overline{N}_E^*(t_4) \tag{6.6}$$

Пусть кватернион $N^\circ(t)$ задает при $t_3 \leqslant t \leqslant t_5$ ориентацию базиса E относительно положения L', занимаемого триадой L в момент t_5. Очевидно, $\Lambda_E(t) = G_I(t_5) \circ N_E^\circ(t)$. Отображение R_L' кватерниона R на базис L' с учетом $R_I = \Lambda_E(t_5) \circ \overline{\Lambda}_E(t_4)$ имеет вид

$$R_L' = \rho_0' + \boldsymbol{\rho}' = N_E^\circ(t_5) \circ \overline{N}_E^\circ(t_4) = \overline{G}_I(t_5) \circ R_I \circ G_I(t_5) \tag{6.7}$$

Так как $G_I(t_4) = G_I(t_5) \circ (1 - \Delta\mathbf{v})$, где $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_5) - \mathbf{v}(t_4)$, то в силу (6.6), (6.7):

$$R^* = R_L' \circ (1 - \Delta\mathbf{v}) \tag{6.8}$$

Обращаясь с векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{v}(t_5)$ как с бесконечно малыми поворотами [8], представим их в виде $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, $\mathbf{v}(t_5) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{p}^\circ = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p}^\circ = 0$, $\mathbf{c}_2 \times \mathbf{p}^\circ = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{p}^\circ = 0$. Согласно формуле (6.5):

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2}\left[\Delta\mathbf{v}^\circ \times \mathbf{p}^\circ - \frac{\mathbf{p}^\circ \cdot \Delta\mathbf{v}^\circ}{q_0}\mathbf{q}\right], \qquad \mathbf{c}_2 = -\frac{\mathbf{q} \cdot \Delta\mathbf{v}^\circ}{2q_0}\mathbf{p}^\circ$$

Теперь

$$\begin{aligned} G_I(t_5) &= S_I(t_2)\circ[1-\mathbf{c}+\mathbf{v}(t_5)] = S_I(t_5)\circ Q' \\ S_I(t_5) &= S_I(t_2)\circ(1-\mathbf{c}_2+\mathbf{v}_2), \qquad Q'=1-\mathbf{c}_1+\mathbf{v}_1 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Кватернион $S(t_5)$ задает поворот базиса I вокруг направления $\mathbf{p}^\circ$ в положение некоторой ортонормированной триады $H(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$ ($\mathbf{h}_n = S(t_5)\circ \mathbf{i}_n \circ \bar{S}(t_5)$, $n=1, 2, 3$), а кватернион Q' — малый поворот триады H в положение L' вокруг направления, перпендикулярного $\mathbf{p}^\circ$. Запишем

$$R_H = \rho_0 + \boldsymbol{\rho} = \bar{S}_I(t_5)\circ R_I \circ S_I(t_5) \tag{6.10}$$

Выражения (5.4), (5.6) связывают скаляр a и кватернион $S_I(t_5) = s_0 + \mathbf{s}$ с результатами нормировки вектора $\mathbf{r}$, найденного по формуле (5.1), и вектора $\boldsymbol{\rho}$, удовлетворяющего равенству (6.10). Однако вместо вектора $\boldsymbol{\rho}$ может быть найден по формуле (6.6) лишь аппроксимирующий его вектор $\boldsymbol{\rho}^*$. Подставив $\boldsymbol{\rho}^*$ вместо $\boldsymbol{\rho}$ в формулу нормировки (5.2), получим единичный вектор $\boldsymbol{\rho}^{\circ *}$. С помощью выражений (6.7), (6.8), (6.9), (6.10) находим $\boldsymbol{\rho}^{\circ *} = \boldsymbol{\rho}^\circ + \Delta\boldsymbol{\rho}^\circ$

$$\Delta\boldsymbol{\rho}^\circ = \boldsymbol{\rho}^\circ \times [\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{c}_1 + r^{-1} r_0 \boldsymbol{\rho}^\circ \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)]$$

Подставив $\boldsymbol{\rho}^{\circ *}$ вместо $\boldsymbol{\rho}^\circ$ в формулы (5.4), (5.6), определим вместо $S_I(t_5)$ кватернион $S^* = S_I(t_5) + s_0 \varkappa (a - \mathbf{p}^\circ)$, где

$$\varkappa = s_0^2 [\Delta\boldsymbol{\rho}^\circ \cdot (\mathbf{r}^\circ + a\mathbf{r}^\circ \times \mathbf{p}^\circ)] / [\mathbf{p}^\circ \cdot (\boldsymbol{\rho}^\circ \times \mathbf{r}^\circ)]$$

Кватернион S^*, как и $S(t_5)$, задает вращение вокруг направления $\mathbf{p}^\circ$. Выберем $t_6 = t_5$. Используя N_E^* и S^* соответственно вместо N_E и S_I в формуле (5.7), получим $\Lambda_E^*(t_6) = S_I' \circ \bar{Q}'' \circ \Lambda_E(t_6)$. Здесь $S_I' = 1 + \varkappa \mathbf{p}^\circ$, $Q'' = S_I(t_5)\circ Q' \circ \bar{S}_I(t_5)$. В общем случае $\Lambda_E^*(t_6) \neq \Lambda_E(t_6)$. Произведение $S_I' \circ \bar{Q}''$ оценивает погрешность определения ориентации базиса E, вызванную ошибками измерения угловой скорости объекта. Так как $G_I(t_5) = Q'' \circ S_I(t_5)$, то в соответствии с теоремой о переставимости конечных поворотов кватернион $\bar{Q}''$ задает малый поворот вокруг направления, перпендикулярного $\mathbf{p}^\circ$: кватернион же S_I' задает малый поворот вокруг направления $\mathbf{p}^\circ$.

Из изложенного выше следует, что ошибки опредления ориентации базиса E имеют тот же порядок малости, что и $\Delta\omega_E$, если ни одна из величин $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, $|\mathbf{p}^\circ \times \mathbf{r}^\circ|$ и q_0 не является весьма малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Липтон А.* Выставка инерциальных систем на подвижном основании. М.: Наука, 1971. 167 с.
2. *Парусников Н. А.* Некоторые задачи определения ориентации приборных трехгранников.– Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6, с. 27–35.
3. *Ткаченко А. И.* Измерение конечных поворотов при выставке бесплатформенной инерциальной системы.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 32–36.
4. *Ткаченко А. И.* Уточнение ориентации бесплатформенного инерциального приборного блока путем последовательных поворотов.– Прикл. механика, 1979, т. 15, № 1, с. 58–62.
5. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
6. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
7. *Ишлинский А. Ю.* Геометрическое рассмотрение устойчивости решения основной задачи инерциальной навигации.– Инж. ж. МТТ, 1968, № 3, с. 12–16.
8. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.

Киев

Поступила в редакцию 20.V.1981