

УДК 624.07:534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

БАНИЧУК Н. В., БАРСУК А. А.

Исследуется устойчивость упругих стержней, нагруженных у концов сосредоточенными моментами, и изучается влияние распределенных жесткостных характеристик на величины критических моментов. В публикуемой работе для стержней, обладающих одинаковыми жесткостями на изгиб в различных плоскостях в рамках статического подхода, исследовано влияние переменности распределений вдоль стержней изгибных жесткостей на критические значения скручивающих моментов, при которых происходит потеря устойчивости. Решение задач устойчивости при условиях защемления краев стержней сведено к вычислению квадратур и отысканию корней системы двух трансцендентных уравнений. Для симметричных (относительно середины стержней) распределений жесткостей отыскание собственных значений сводится к решению одного трансцендентного уравнения. Приводятся конкретные примеры.

Аналогичное интегрирование уравнений проведено для шарнирно-закрепленных стержней (задача Гринхилла). В этом случае отыскание дивергентных форм потери устойчивости также сводится к решению системы двух трансцендентных уравнений для критических значений крутящих моментов. Даны конкретные примеры несимметричных распределений изгибных жесткостей, для которых при любых значениях крутящих моментов отсутствуют нетривиальные формы равновесия. В общем случае показано, что наложение на исходные симметричные распределения жесткостей малых несимметричных вариаций приводит к несуществованию дивергентных решений.

Приведены постановка и решение задачи максимизации критического значения скручивающего момента за счет оптимального распределения изгибной жесткости (распределения толщин) вдоль стержня при ограничениях на его объем и допустимые значения толщин.

1. Прямолинейный упругий стержень длины l расположен вдоль оси x прямоугольной системы координат x, y, z , зашпелен в точках $x=0$, $x=l$ и скручивается под действием момента M , приложенного к концу стержня (фиг. 1).

Предполагается, что стержень обладает одинаковыми жесткостями на изгиб в различных плоскостях, поэтому $EI_y = EI_z = a$, где E — модуль Юнга материала, I_y , I_z — моменты инерции поперечного сечения относительно осей, проходящих через нейтральную линию стержня и параллельных осям y , z . При исследовании устойчивости стержня и вычислении критических величин скручивающих моментов учитывается консервативность рассматриваемой задачи [4] и применяется статический метод Эйлера. Обозначим $y = y(x)$, $z = z(x)$ функции, определяющие положение осевой линии искривленного стержня, и запишем соответствующие уравнения равновесия и граничные условия

$$\begin{aligned} (ay_{xx})_{xx} &= Mz_{xxxx}, & (az_{xx})_{xx} &= -My_{xxxx} \\ y(0) = y_x(0) = z(0) = z_x(0) &= 0, & y(l) = y_x(l) = z(l) = z_x(l) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Заметим, что используемые уравнения (1.1) справедливы при предположении малости деформаций и функции $y(x) = z(x) = 0$, описывающие неискривленное положение осевой линии, удовлетворяют уравнениям и граничным условиям (1.1) при любых значениях M . Согласно концепции

Эйлера, величина критической нагрузки и форма потери устойчивости определяются как минимальное собственное значение и соответствующие ему собственные функции $y(x) \neq 0$, $z(x) \neq 0$ краевой задачи (1.1).

Для частного случая постоянного распределения жесткостей $a = \text{const}$ определение величины момента потери устойчивости сводится, как известно [3, 4], к отысканию минимального положительного корня уравнения $\text{tg}(Ml/2a) = Ml/2a$. Величина критического момента равна $\pm 8,988 a/l$. Получим аналог этого уравнения для общего случая, когда распределение жесткостей a — произвольная функция переменной x . Для этого выполним двукратное интегрирование системы уравнений (1.1). Умножим второе из проинтегрированных уравнений на i (i — мнимая единица) и сложим почленно эти уравнения. Полученное равенство и граничные условия после введения комплексной функции $w(x) = y(x) + iz(x)$ примут вид

$$aw_{xxx} = -iMw_x + c_1x + c_2 \quad (1.2)$$

где c_1, c_2 — комплексные постоянные интегрирования. Интегрируя линейное дифференциальное уравнение (1.2) дважды и удовлетворяя приведенным граничным условиям, получим

$$w = \int_0^{\infty} e^{-iM\varphi(t)} \int_0^l \frac{c_1\xi + c_2}{a(\xi)} e^{iM\varphi(\xi)} d\xi dt \quad (1.3)$$

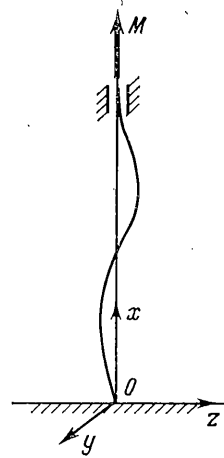
и соотношения, которым подчинены константы

$$c_1 \int_0^l \frac{x}{a(x)} e^{iM\varphi(x)} dx + c_2 \int_0^l \frac{1}{a(x)} e^{iM\varphi(x)} dx = 0$$

$$\left(\varphi(x) \equiv \int_0^{\infty} \frac{dt}{a(t)} \right)$$

$$c_1 \int_0^l e^{-iM\varphi(x)} \int_0^{\infty} \frac{t}{a(t)} e^{iM\varphi(t)} dt dx +$$

$$+ c_2 \int_0^l e^{-iM\varphi(x)} \int_0^{\infty} \frac{e^{iM\varphi(t)}}{a(t)} dt dx = 0 \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Соотношения (1.4) представляют собой систему двух линейных однородных уравнений, служащих для определения неизвестных постоянных c_1, c_2 . Условие существования нетривиального решения (1.3) (равенство нулю определителя системы (1.4)) приводит к уравнению, предназначенному для нахождения критических моментов

$$f(M) \equiv \int_0^l \frac{e^{iM\varphi(x)}}{a(x)} dx \int_0^l e^{-iM\varphi(x)} \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{iM\varphi(\xi)}}{a(\xi)} d\xi dx -$$

$$- \int_0^l \frac{x e^{iM\varphi(x)}}{a(x)} dx \int_0^l e^{-iM\varphi(x)} \int_0^{\infty} \frac{e^{iM\varphi(\xi)}}{a(\xi)} d\xi dx = 0 \quad (1.5)$$

В случае постоянного распределения изгибной жесткости по стержню ($a = \text{const}$) из (1.5) приходим к известному уравнению $\text{tg}(Ml/2a) = Ml/2a$. Заметим, что комплексное уравнение (1.5) можно представить в виде двух вещественных уравнений: $\text{Re} f(M) = 0$, $\text{Im} f(M) = 0$. Таким образом, исследование устойчивости скручиваемых стержней переменной жесткости свелось к вычислениям квадратур по заданным распределениям $a(x)$ и решению трансцендентного уравнения (1.5) для M .

Отдельно рассмотрим случай симметричного распределения изгибных жесткостей, когда $a(x) = a(l-x)$. В этом случае $\varphi(x) = \varphi(l/2) + \psi(x)$, $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(l/2)$, где $\psi(x)$ — антисимметричная функция, т. е. $\psi(x) = -\psi(l-x)$. С учетом свойств функций $a(x)$ и $\psi(x)$, а также правил интегрирования в симметричных пределах симметричных и антисимметричных функций уравнение (1.5) может быть преобразовано к виду

$$f(M) = \int_0^{l/2} \frac{\cos M\psi(x)}{a(x)} dx \int_0^{l/2} [\chi_1(x) \cos M\psi(x) + \chi_2(x) \sin M\psi(x)] dx + \quad (1.6)$$

$$+ \int_0^{l/2} \frac{x-l/2}{a(x)} \sin M\psi(x) dx \int_0^{l/2} [\chi_3(x) \cos M\psi(x) - \chi_4(x) \sin M\psi(x)] dx = 0$$

$$\chi_1(x) = \int_0^x \frac{\xi-l/2}{a(\xi)} \cos M\psi(\xi) d\xi, \quad \chi_2(x) = \int_0^x \frac{\xi-l/2}{a(\xi)} \sin M\psi(\xi) d\xi$$

$$\chi_3(x) = \int_0^x \frac{\sin M\psi(\xi)}{a(\xi)} d\xi, \quad \chi_4(x) = \int_0^x \frac{\cos M\psi(\xi)}{a(\xi)} d\xi$$

В отличие от (1.5) равенство (1.6) представляет собой не систему, а одно вещественное уравнение относительно M .

При помощи уравнений (1.5), (1.6) исследовалась устойчивость скручиваемых стержней с несимметричными и симметричными распределениями жесткостей, обладающих одинаковыми объемами V (объем равен интегралу по длине l от функции распределения площадей поперечных сечений стержней $S(x)$). Рассматривались стержни с подобными поперечными сечениями, для которых $a(x) = kS^2(x)$. Вычисления проводились в безразмерных переменных (штрихи в дальнейшем опускаем): $x' = x/l$, $S' = lS/V$, $M' = Ml^3/(kV^2)$.

С применением уравнения (1.5) проводились расчеты для однопараметрического семейства (γ — параметр) стержней с линейным распределением площадей поперечных сечений (кривая 1, фиг. 2) $S = b_1(x, \gamma) = 1 + \gamma(2x-1)$ и единичным объемом. Кривые 1 (фиг. 3) соответствуют полученным в результате расчетов по методу Ньютона (с невязкой $\epsilon = 10^{-6}$) зависимости первых двух собственных значений от параметра γ . Показанная нижней кривой зависимость критического момента от γ , а также зависимость второго собственного значения от рассматриваемого параметра имеют максимум при $\gamma = 0$, т. е. для стержней постоянного поперечного сечения, и монотонно убывают с увеличением γ .

Аналогичные расчеты проводились для стержней с симметричным распределением площадей сечений и единичным (в безразмерных переменных) объемом. Рассматривались семейства площадей поперечных сечений $S = b_2(x, \gamma) = 1 - \gamma[1 - 6x(1-x)]$, $S = b_3(x, \gamma) = 1 + 2\gamma[1 - 12x|1-2x|]$. Распределения площадей $S = b_2$ и $S = b_3$ показаны соответственно кривыми 2 и 3 (фиг. 2). Вычисления основывались на применении к уравнению (1.6) метода Ньютона. Полученные зависимости двух первых собственных значений от параметра γ отмечены кривыми 2 (фиг. 3) для стержней с распределением сечений $S = b_2(x, \gamma)$.

Как показывает график фиг. 3, величина критического момента (нижняя кривая 2) возрастает при увеличении параметра γ , достигая максимума при $\gamma \approx 0,2$, а затем при дальнейшем возрастании γ монотонно убывает.

Кривые 3 (фиг. 3) показывают соответствующие зависимости для стержней с распределением сечений $S = b_3(x, \gamma)$. Зависимость величины критического момента от параметра γ для $\gamma \geq 0,05$ оказывается монотонно убывающей. Заметим, что распределения сечений $S = b_3(x, \gamma)$ являются квазиоптимальными в задаче максимизации критической величины сжимающей силы для колонны при условии защемления ее концов.

2. Скручиваемый стержень шарнирно закреплен в точках $x=0$, $x=l$. Отыскание статических форм потери устойчивости (задача Гринхилла [1-4]) приводит к следующей краевой задаче на собственные значения:

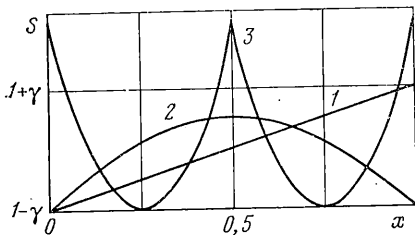
$$ay_{xx} = Mz_x, \quad az_{xx} = -My_x \quad (2.1)$$

$$y(0) = y(l) = z(0) = z(l) = 0$$

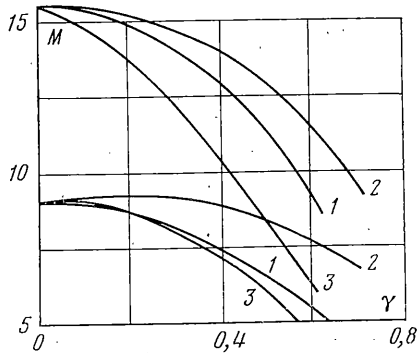
Умножим второе уравнение в (2.1) на i и сложим эти уравнения почленно. Вводя далее в рассмотрение функцию $w(x) = y(x) + iz(x)$ преобразуем краевую задачу (2.1) к виду

$$aw_{xx} = -iMw_x, \quad w(0) = w(l) = 0 \quad (2.2)$$

Интегрируя уравнение (2.2) дважды и удовлетворяя указанным граничным условиям, получим выражение для w и систему двух линейных



Фиг. 2



Фиг. 3

однородных уравнений, служащих для определения констант интегрирования. Из условия существования нетривиальных решений (обращение в нуль определителя системы) приходим к одному комплексному уравнению для M , которое может быть записано в эквивалентной форме в виде системы двух вещественных уравнений

$$\int_0^l \cos M\varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^l \sin M\varphi(x) dx = 0 \quad (2.3)$$

Минимальный общий корень этих уравнений определяет критический момент дивергенции. Таким образом, нахождение критических значений моментов дивергенции эквивалентно отысканию совместных решений системы (2.3).

Выполним некоторые вспомогательные преобразования, используемые в дальнейших рассмотренных, и покажем, что для симметричных распределений жесткостей система (2.3) сводится к одному уравнению. Пусть $a(x)$ — произвольное заданное распределение изгибной жесткости. Представим функцию $1/a$ в виде суммы двух слагаемых $1/a(x) = \Omega(x) + \Psi(x)$, где $\Omega(x)$ и $\Psi(x)$ — соответственно симметричная и антисимметричная относительно середины интервала $[0, l]$ функции. Тогда функция $\varphi(x)$ также может быть представлена в виде суммы симметричного слагаемого $\omega(x)$ и антисимметричного слагаемого $\psi(x)$:

$$\varphi(x) = \omega(x) + \psi(x), \quad \omega(x) = \int_0^{l/2} \Omega(t) dt + \int_0^{\infty} \Psi(t) dt \quad (2.4)$$

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} \Omega(t) dt - \int_0^{l/2} \Omega(t) dt$$

С учетом свойств интегралов в симметричных пределах от симметричных и антисимметричных функций и соотношений (2.4) преобразуем уравнения (2.3). Имеем

$$\int_0^l \cos M\psi \cos M\omega dx = 0, \quad \int_0^l \cos M\psi \sin M\omega dx = 0 \quad (2.5)$$

Для симметричных распределений жесткостей ($\Psi(x) \equiv 0$, $1/a(x) = \Omega(x)$, $\omega(x) = \varphi(l/2)$) уравнения (2.5) примут вид

$$\cos M\varphi\left(\frac{l}{2}\right) \int_0^l \cos M\psi(x) dx = 0, \quad \sin M\varphi\left(\frac{l}{2}\right) \int_0^l \cos M\psi(x) dx = 0$$

отсюда следует, что система (2.3) в этом случае сводится к одному уравнению

$$\int_0^l \cos M\psi(x) dx = 0, \quad \psi(x) = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{l}{2}\right) \quad (2.6)$$

В случае постоянного распределения жесткостей уравнение (2.6) приводит к известному значению критической величины момента дивергенции $M = 2\pi EI/l$. Решение уравнения (2.6) эффективно находится различными аналитическими и численными методами, в частности при помощи используемого метода Ньютона. Поэтому применение уравнения (2.6) приводит к существенным упрощениям, особенно при решении таких задач, как задачи оптимизации распределения жесткостей, для которых необходимо многократно подсчитывать критические значения M для различных приближений $a(x)$ (см. п. 3).

Ниже применим полученные уравнения (2.3) для исследования дивергенции несимметричных шарнирно-закрепленных стержней. Приведем два примера несимметричных распределений жесткостей, для которых отсутствуют дивергентные решения (потеря устойчивости и скручивание стержня происходит по динамическим формам). Пусть распределение изгибной жесткости по стержню дается формулой $a = 1/(d+ex)$. В этом случае уравнения (2.3) приводятся к виду

$$S((el+d)\sqrt{M/2e}) - S(d\sqrt{M/2e}) = 0 \quad (2.7)$$

$$C((el+d)\sqrt{M/2e}) - C(d\sqrt{M/2e}) = 0$$

где $S(x)$ и $C(x)$ — интегралы Френеля, определяемые формулами [6, 7]:

$$S(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt, \quad C(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt$$

При $d=0$ система (2.7) сводится к уравнениям $S(l(Me/2)^{1/2}) = 0$, $C(l(Me/2)^{1/2}) = 0$ и отличных от нуля решений не имеет. Из графиков функций $C(x)$, $S(x)$, приведенных в [7], следует, что и для произвольных значений $d \geq 0$ не существует совместных решений (2.7). Заметим, что при выводе уравнений (2.7) использовано предположение, что $e \neq 0$, т. е. случай постоянного распределения жесткости исключен из рассмотрения.

Приведем другой пример несимметричного распределения площадей поперечных сечений $a = (b+cx)^{1/2}$. В этом случае после вычисления квадратур и соответствующих преобразований в (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{b+cl} \sin \frac{2M}{c} (\sqrt{b+cl} - \sqrt{b}) + \frac{c}{2M} \cos \frac{2M}{c} (\sqrt{b+cl} - \sqrt{b}) &= \frac{c}{2M} \\ \sqrt{b+cl} \cos \frac{2M}{c} (\sqrt{b+cl} - \sqrt{b}) - \frac{c}{2M} \sin \frac{2M}{c} (\sqrt{b+cl} - \sqrt{b}) &= \sqrt{b} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Возводя обе части уравнений (2.8) в квадрат и складывая уравнения (при этом потери корней и появление новых не происходит), получим соотношение $(b+cl) + (c/2M)^2 = (c/2M)^2 + (b)$, которое удовлетворяется только при выполнении условия $cl=0$. Случай $c=0$ отвечает постоянному распределению изгибной жесткости. Для остальных случаев ($c \neq 0$) решений системы (2.8) не существует и, следовательно, дивергенция не происходит.

Покажем, что наложение на исходные симметричные распределения жесткостей малых несимметричных вариаций приводит к несуществованию дивергентных решений. Обозначим $a^0(x)$ и $\delta a(x)$ симметричное распределение изгибной жесткости и малую антисимметричную добавку, т. е.

$a'(x) = a^\circ(x) + \delta a(x)$, и пусть величины M° , ω° , ψ° соответствуют распределению $a^\circ(x)$, а вариации δM , $\delta \omega(x)$ обусловлены малой добавкой $\delta a(x)$. Воспользуемся следующими представлениями:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \omega^\circ(x) + \delta \omega(x), & \omega^\circ &= \varphi^\circ\left(\frac{l}{2}\right), & \delta \omega(x) &= \int_0^x \delta a(t) dt \\ \cos M\omega(x) &= \cos M^\circ \omega^\circ(x) - [\omega^\circ \delta M + M^\circ \delta \omega(x)] \sin M^\circ \omega^\circ(x) \\ \sin M\omega(x) &= \sin M^\circ \omega^\circ(x) + [\omega^\circ \delta M + M^\circ \delta \omega(x)] \cos M^\circ \omega^\circ(x) \\ \delta \psi &= 0, & \cos M\psi(x) &= \cos M^\circ \psi^\circ(x) - \psi^\circ(x) \delta M \sin M^\circ \psi^\circ(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставим выражения (2.9) в (2.5) и удержим в полученных соотношениях только члены не выше первого порядка малости. Из этих соотношений с учетом равенства

$$\int_0^l \cos M^\circ \psi^\circ(x) dx = 0 \quad (2.10)$$

которое выполняется для симметричного распределения $a^\circ(x)$, получим уравнения

$$\delta M \int_0^l \psi^\circ(x) \sin M^\circ \psi^\circ(x) dx = -M^\circ \operatorname{tg}(M^\circ \omega^\circ) \int_0^l \delta \omega(x) \cos M^\circ \psi^\circ(x) dx \quad (2.11)$$

$$\delta M \int_0^l \psi^\circ(x) \sin M^\circ \psi^\circ(x) dx = M^\circ \operatorname{ctg}(M^\circ \omega^\circ) \int_0^l \delta \omega(x) \cos M^\circ \psi^\circ(x) dx$$

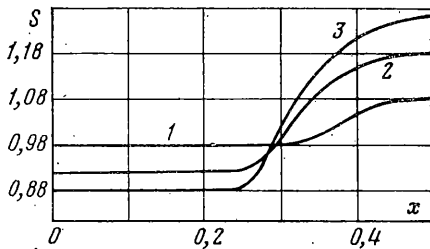
Приравнивание выражений для δM , вытекающих из первого и второго уравнений, приводит к невыполнимому равенству $\cos^2(M^\circ \omega^\circ) + \sin^2(M^\circ \omega^\circ) = 0$. Тем самым устанавливается отсутствие дивергентных решений для слабонесимметричных распределений жесткости.

3. Применение полученных выше результатов позволяет эффективно находить величины критических моментов и существенно упрощает решение оптимальных задач для скручиваемых стержней. Рассмотрим некоторые простейшие задачи оптимизации устойчивости.

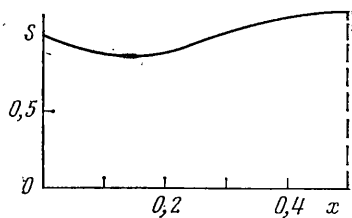
Пусть стержни имеют подобные поперечные сечения, поэтому $a(x) = kS(x)^2$, где $S(x)$ — распределение площадей сечений. В безразмерных переменных сформулируем следующую задачу. Требуется найти распределение площадей поперечных сечений, удовлетворяющее ограничению $s_{\min} \leq S(x)$, условию постоянства объема и доставляющее максимум критическому значению скручивающего момента $M_* = \max_S M$, где M вычисляется на основе соотношений (1.6) или (2.7), s_{\min} — заданная безразмерная величина.

Эти задачи решались численно с использованием алгоритма последовательной оптимизации (см. [8]). Применительно к рассматриваемой задаче алгоритм заключается в отыскании в процессе итераций критических значений M для текущих приближений $a(x)$ методом Ньютона и последующих расчетах улучшающих вариаций управляющей функции $a(x)$ методом проектирования градиентов. Вычисление критических значений M на основе уравнений (1.6), (2.7) проводилось с точностью 10^{-5} . Расчеты заканчивались, когда величина градиента оптимизируемого функционала (невязка в выполнении условий оптимальности) становилась меньше 10^{-3} . Оптимальные распределения $S(x)$ находились для различных значений параметра s_{\min} .

Фиг. 4 показывает найденные в результате расчетов распределения площадей $S(x)$ шарнирно-закрепленного стержня. Кривым 1, 2, 3 соответ-



Фиг. 4



Фиг. 5

вуют значения параметра $s_{\min} = 0,98; 0,92; 0,88$. Для показанных распределений значения критических моментов M соответственно равны 6,56; 7,24; 7,80. Достижимый при этом выигрыш по сравнению со стержнями постоянной толщины и единичного объема составляет 4,45, 14,9 и 24,2%.

Численное решение проводилось также для заземленных стержней. Выражение для градиента в задаче оптимизации устойчивости строилось в этом случае с использованием следующего представления собственного значения M краевой задачи (1.1):

$$M = - \int_0^1 S^2 \operatorname{Re}(w_{xx} w_{xx}^*) dx / \int_0^1 \operatorname{Im}(w_x^* w_{xx}) dx$$

где $w(x)$ вычисляется по формуле (1.4), а w^* — комплексно-сопряженная функция. Расчеты показали, что при $s_{\min} < 0,865$ ограничение $s_{\min} \leq S$ становится неактивным. Фиг. 5 показывает оптимальное распределение площадей поперечных сечений при $s_{\min} < 0,865$. Критическое значение крутящего момента M для оптимального стержня равно 9,2789. Для сравнения приведем первые четыре собственных значения M оптимального стержня 9,2789; 14,9503; 21,149; 27,274 и соответствующие значения M для стержня постоянного поперечного сечения ($S(x) \equiv 1$) 8,98688; 15,4506; 21,808; 28,132.

ЛИТЕРАТУРА

1. Greenhill A. G. On the strength of shafting when exposed both to torsion and end thrust. — Proc. Inst. Mech. Engrs, London, 1883, p. 182–209.
2. Николаи Е. Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 584 с.
3. Бологин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
5. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
8. Баннчук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 285 с.

Москва, Кишинев

Поступила в редакцию
21.V.1981