

УДК 539.3

## ИЗГИБ СЕТЧАТОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

ИШЕНИЧНОВ Г. И., ТАГИ-ЗАДЕ Э. Д.

Рассматривается поперечный изгиб прямоугольной пластинки, состоящей из большого числа жестко сопряженных стержней, оси которых расположены на плоскости, называемой срединной. Одна из главных центральных осей поперечного сечения каждого стержня пластинки принадлежит ее срединной плоскости. Считается также, что все стержни пластинки можно разделить на ряд семейств, каждое из которых характеризуется тем, что оси его стержней образуют на срединной плоскости семейство густо расположенных гладких непересекающихся кривых. Число  $n$  таких семейств произвольно, но больше единицы.

Решение задачи получено на основе континуальной расчетной модели. Такая модель в теории сетчатых оболочек при отсутствии деформации поперечного сдвига рассматривалась в [1].

Показано, что если жесткость стержней на кручение можно не учитывать, расчет пластинки с ромбической сеткой сводится к расчету пластинки с квадратной сеткой. Приводятся некоторые численные результаты.

1. За расчетную модель исследуемой системы стержней примем некоторую сплошную пластинку. Считается, что совпадают: срединные поверхности сетчатой пластинки и ее расчетной модели; деформации стержней сетчатой пластинки с соответствующими деформациями расчетной модели; погонные усилия и моменты в одних и тех же сечениях сетчатой пластинки (сосредоточенные усилия и моменты относятся к шагу стержней соответствующего семейства) и ее расчетной модели.

При рассмотрении расчетной модели используются три группы уравнений: статические уравнения в усилиях и моментах; геометрические уравнения, связывающие деформацию с перемещениями, и соотношения упругости. Первые две группы совпадают с соответствующими уравнениями теории сплошных пластинок, последняя — зависит от структуры сетки и материала ее стержней.

Перейдем к выводу соотношений упругости. Зафиксируем  $i$ -е семейство стержней и примем следующие обозначения:  $F_i$ ,  $J_{ii}$  — площадь и главный центральный момент инерции поперечного сечения стержня,  $a_i$  — расстояние между осями стержней,  $\varphi_i$  — угол между осью стержня и осью  $x$ ,  $E_i$ ,  $G_i$  — модуль Юнга и модуль упругости при сдвиге материала.

Углы поворота отрезка нормали к срединной плоскости пластинки в плоскостях  $y = \text{const}$  и  $x = \text{const}$  обозначим  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Тогда соответствующие углы поперечного сдвига расчетной модели сетчатой пластинки равны

$$\beta_1 = \partial w / \partial x + \theta_1, \quad \beta_2 = \partial w / \partial y + \theta_2 \quad (1.1)$$

Для поперечных сил и изгибающих моментов стержней  $i$ -го семейства (жесткости стержней на кручение считаем равными нулю) получим

$$Q_i^* = k_i^2 G_i F_i \beta_i^*, \quad M_i^* = -E_i J_{ii} \nabla_i \theta_i^* \quad (1.2)$$

$$\nabla_i = c_i (\partial / \partial x) + s_i (\partial / \partial y)$$

$$\theta_i^* = \theta_1 c_i + \theta_2 s_i, \quad \beta_i^* = \beta_1 c_i + \beta_2 s_i, \quad s_i = \sin \varphi_i, \quad c_i = \cos \varphi_i \quad (1.3)$$

Значение  $k_i^2$  зависит, как известно, от формы поперечного сечения стержня.

Используя условия статической эквивалентности расчетной модели и сетчатой пластинки, а также формулы (1.1)–(1.3), найдем значения погонных поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов расчетной модели (соотношения упругости) в следующем виде:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^n c_i K_i^* (\nabla_i w + c_i \theta_1 + s_i \theta_2), \quad Q_2 = \sum_{i=1}^n s_i K_i^* (\nabla_i w + c_i \theta_1 + s_i \theta_2) \quad (1.4)$$

$$M_1 = - \sum_{i=1}^n c_i^2 I_i \nabla_i (\theta_1 c_i + \theta_2 s_i), \quad M_2 = - \sum_{i=1}^n s_i^2 I_i \nabla_i (\theta_1 c_i + \theta_2 s_i)$$

$$H = \sum_{i=1}^n s_i c_i I_i \nabla_i (\theta_1 c_i + \theta_2 s_i), \quad K_i^* = k_i^2 G_i F_i / a_i, \quad I_i = E_i J_{i1} / a_i$$

Дифференциальные уравнения изгиба пластинки при помощи формул (1.4) приведем к системе из трех дифференциальных уравнений относительно функций  $w$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} L_{11}(w) + L_{12}(\theta_1) + L_{13}(\theta_2) &= Z \\ L_{12}(w) + L_{22}(\theta_1) + L_{23}(\theta_2) &= 0 \\ L_{13}(w) + L_{23}(\theta_1) + L_{33}(\theta_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$L_{11} = \sum_{i=1}^n K_i^* \nabla_i^2, \quad L_{12} = \sum_{i=1}^n c_i K_i^* \nabla_i, \quad L_{13} = \sum_{i=1}^n s_i K_i^* \nabla_i,$$

$$L_{22} = \sum_{i=1}^n c_i^2 (K_i^* - I_i \nabla_i^2), \quad L_{23} = \sum_{i=1}^n s_i c_i (K_i^* - I_i \nabla_i^2), \quad L_{33} = \sum_{i=1}^n s_i^2 (K_i^* - I_i \nabla_i^2)$$

2. Рассмотрим пластинку с ромбической сеткой. Будем считать, что диагонали ромбов сетки совпадают с направлениями осей координат, а стержни обоих семейств — одинаковые.

В этом случае система дифференциальных уравнений (1.5) принимает вид

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + s^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} &= \frac{Z}{2K^*} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{I}{K^*} \left( c^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + s^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + 2s^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial y} \right) + \theta_1 &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{I}{K^*} \left( 2c^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y} + c^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + s^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} \right) + \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и далее индекс  $i$  ( $i=1$ ) у всех величин опущен. Формулы (1.4), позволяющие определять усилия и моменты расчетной модели при известном ее деформированном состоянии, упрощаются:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2K^* c^2 (\partial w / \partial x + \theta_1), \quad Q_2 = 2K^* s^2 (\partial w / \partial y + \theta_2) \\ M_1 &= M_2 \operatorname{ctg}^2 \varphi = -2Ic^2 \left( c^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + s^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) \\ H &= 2Is^2 c^2 (\partial \theta_1 / \partial y + \partial \theta_2 / \partial x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) в частном случае, когда сетка стержней квадратная ( $\varphi=\pi/4$ ), переходят в следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} &= \frac{Z}{K^*} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{I}{2K^*} \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial y} \right) + \theta_1 &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{I}{2K^*} \left( 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} \right) + \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для расчетной модели пластинки с квадратной сеткой из (2.2), полагая  $\varphi=\pi/4$ , имеем

$$\begin{aligned} Q_1 &= K^* (\partial w / \partial x + \theta_1), \quad Q_2 = K^* (\partial w / \partial y + \theta_2) \\ M_1 = M_2 = M &= -\frac{I}{2} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right), \quad H = \frac{I}{2} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Установим связь между краевыми задачами расчета пластинок с ромбической и квадратной сетками. Для этого сделаем следующую замену переменных:

$$x = \xi \operatorname{ctg} \varphi, \quad \theta_1 = \theta_1^\circ \operatorname{tg} \varphi \quad (2.5)$$

Тогда формулы (2.2) примут вид

$$\begin{aligned} Q_1 &= K^* \sin 2\varphi \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} + \theta_1^\circ \right), \quad Q_2 = 2K^* s^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_2 \right) \\ M_1 = M_2 \operatorname{ctg} \varphi &= -2I s^2 c^2 (\partial \theta_1^\circ / \partial \xi + \partial \theta_2 / \partial y) \\ H &= 2I s^3 c (\partial \theta_1^\circ / \partial y + \partial \theta_2 / \partial \xi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

а система дифференциальных уравнений (2.1) приобретает форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_1^\circ}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} &= \frac{Z}{2K^* s^2} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{I s^2}{K^*} \left( \frac{\partial^2 \theta_1^\circ}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_1^\circ}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi \partial y} \right) + \theta_1^\circ &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{I s^2}{K^*} \left( 2 \frac{\partial^2 \theta_1^\circ}{\partial \xi \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} \right) + \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Видно, что система уравнений (2.3) для пластинки с квадратной сеткой будет совпадать с (2.7), если в ней сделать замену<sup>1)</sup>  $x$ ,  $\theta_1$ ,  $K^*$ ,  $Z$  на  $\xi$ ,  $\theta_1^\circ$ ,  $K^*$ ,  $Z^*$ , где  $K^* = 1/2 K^* s^{-2}$ ,  $Z^* = 1/4 Z s^{-4}$ .

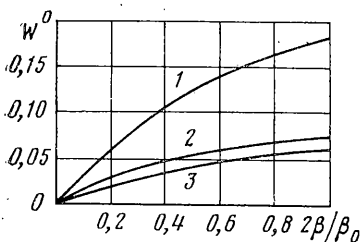
Из сравнения величин погонных сил и моментов расчетных моделей пластинки с ромбической и квадратной сетками стержней, которые определяются по формулам (2.6) и (2.4) соответственно, можно найти, что в случае ромбической сетки

$$Q_1 = Q_{1*} \sin 2\varphi, \quad Q_2 = 2s^2 Q_{2*}, \quad H = 4s^3 c H^*, \quad M_1 = M_2 \operatorname{ctg} \varphi = 4s^2 c^2 M^* \quad (2.8)$$

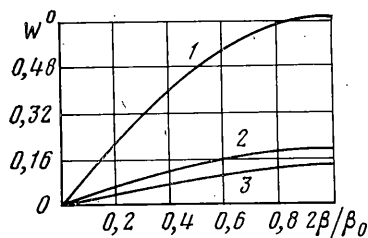
где отмеченные звездочкой величины определяются по формулам (2.4) в пластинке с квадратной сеткой после замены в них  $x$  и  $\theta_1$  соответственно на  $\xi$  и  $\theta_1^\circ$ .

Эти последние формулы получены при условии, что значения  $K^*$  для пластинки с ромбической и квадратной сетками равны. Если же принять

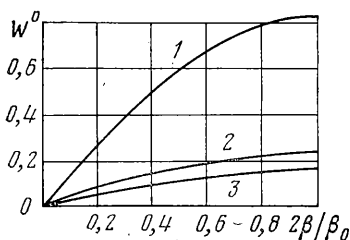
<sup>1</sup> Можно предложить и другие варианты: например, изменить  $I$  и  $K^*$ , сохранив значение поперечной нагрузки  $Z$ .



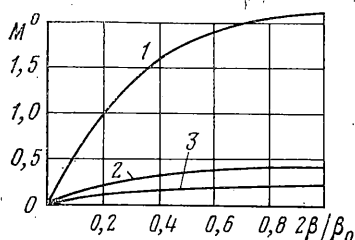
Фиг. 1



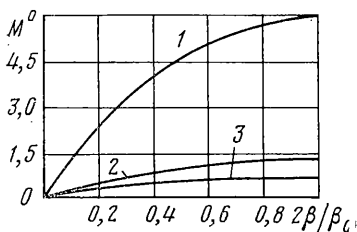
Фиг. 2



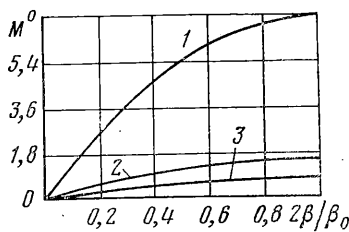
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

во внимание последнюю замену, согласно которой в пластинке с квадратной сеткой  $K^*$  заменено на  $1/2 K^* s^{-2}$ , формулы (2.8) необходимо изменить на следующие:

$$Q_1 = 4s^2 c Q_{1*}, \quad Q_2 = 4s^2 Q_{2*}, \quad H = 4s^3 c H_*, \quad M_1 = M_2 \operatorname{ctg} \varphi = 4s^2 c^2 M_* \quad (2.9)$$

Проведенные преобразования, основанные на замене переменных, позволяют задачу расчета пластинки с ромбической сеткой заменить решением некоторой краевой задачи для пластинки с квадратной сеткой стержней.

Сведение одной задачи к другой осуществляется по следующей схеме: размер  $l$  стороны пластинки с ромбической сеткой в направлении оси  $x$  заменяется на  $l \operatorname{tg} \varphi$ ; заданное значение  $K^*$  заменяется на  $K_* = 1/2 K^* s^{-2}$ ; поперечная нагрузка  $Z$  считается равной  $Z_* = 1/4 Z s^{-4}$ ; при помощи второй формулы из (2.5), а также (2.9) находят значения на контуре функций со звездочками и  $\theta_1^\circ$  по заданным граничным условиям краевой задачи.

В результате приходим к краевой задаче для системы уравнений (2.7), причем  $0 \leq \xi \leq l \operatorname{tg} \varphi$ .

Решение этой задачи и представляет собой расчет пластинки с квадратной сеткой при указанных выше измененных параметрах.

После выполнения расчета такой фиктивной пластинки следует от полученного решения ( $\theta_1^\circ$  и функций со звездочками) по формулам (2.5), (2.9) перейти к  $\theta_1$  и соответствующим искомым функциям без звездочек, в которых затем считать  $\xi = x \operatorname{tg} \varphi$ .

3. Рассмотрим прямоугольную пластинку с квадратной сеткой стержней, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $Z=q$ . По контуру пластинка опирается шарнирно:  $w=\theta_2=M=0$  при  $\alpha=0, \alpha=\alpha_0$ ;  $w=\theta_1=M=0$  при  $\beta=0, \beta=\beta_0$ . В этом случае решение системы (2.3) получено в виде двойных тригонометрических рядов.

Приведем окончательные численные результаты для значений безразмерных функций, которые позволяют переходить к размерным величинам по формулам  $w=16b^2qw^0/\pi^2K^*$ ,  $M=8IqM^0/\pi^2K^*$ ,  $H=8IqH^0/\pi^2K^*$ .

Была исследована зависимость решения задачи от соотношения сторон  $\lambda=l/b$  и значения параметра  $\eta=0,5EJ_1/k^2b^2GF$  (поскольку  $K^*=0,5EJ_1/ab^2\eta$ , при сопоставлении результатов безразмерные величины необходимо умножать на  $\eta$ ).

На фиг. 1-3 показаны эпюры прогибов пластинок в сечении  $\alpha=0,5\alpha_0$  при соотношениях сторон  $\lambda=1, 3, 5$  соответственно. Кривые 1, 2, 3 относятся к случаям  $\eta=0,01; 0,05; 0,10$ .

Аналогичные графики даны на фиг. 4-6 для изгибающих моментов в том же сечении пластинок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничников Г. И. Расчет сетчатых оболочек.— Исследования по теории сооружений, 1976, вып. 22, с. 159-167.

Москва, Баку

Поступила в редакцию  
25.II.1981