

УДК 539.3

## МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАСТИНОК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

БРАТУСЬ А. С.

Рассматриваются задачи оптимального проектирования балок и пластин переменной толщины. В предположении, что управляющая функция (толщина) принимает значения, различающиеся от фиксированного в относительно малых пределах, строится решение, отличающееся от оптимального по функционалу на величину порядка квадрата возмущения. Доказаны оценки погрешности. Приведены примеры.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о статическом изгибе упругой пластинки постоянной толщины  $h_0$ , закрепленной по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему область  $D$  в плоскости  $(x, y)$  и нагруженной поперечными силами  $q=q(x, y)$ . Предположим далее, что имеется возможность изменять толщину пластинки по закону

$$h(x, y) = h_0 + \varepsilon h_1(x, y) \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon$  — фиксированное число. Таким образом, чтобы с учетом внесенных изменений вес пластинки оставался прежним, т.е. интеграл от  $h_1(x, y)$  по области  $D$  равен нулю.

Поставим задачу: найти такой закон изменения толщины пластинки, заданный равенством (1.1), при котором максимальный прогиб пластинки будет минимальным.

Перейдем к точной математической постановке. Пусть  $S$  — площадь области  $D$ ,  $V$  — объем пластинки. В недеформированном состоянии срединная поверхность пластинки совпадает с  $D$ . На части  $\Gamma_1$  границы  $\Gamma$  пластинка оперта, а на остальной части  $\Gamma_2$  — жестко закреплена. Через  $u=u(x, y)$  и  $h=h(x, y)$  обозначим, соответственно, распределение прогибов и толщин пластинки и введем безразмерные переменные  $x'=xS^{-1/2}$ ,  $y'=yS^{-1/2}$ ,  $u'=uS^{-1/2}$ ,  $h'=hSV^{-1}$ ,  $q'=12(1-\nu^2)S^{3/2}E^{-1}V^{-3}q$ , где  $E$  — модуль Юнга, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала пластинки. В дальнейших рассмотренных штрихи у безразмерных переменных будем опускать.

В принятых обозначениях уравнения равновесия и граничные условия запишутся в виде

$$A[h^3]u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} h^3 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h^3 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) +$$

$$+ 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = q(x, y) \quad (1.2)$$

$$(u)_{\Gamma} = 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\Gamma_2} = 0, \quad \left( h^3 \left[ \Delta u - \frac{(1-\nu)}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right)_{\Gamma_1} = 0 \quad (1.3)$$

Через  $\partial u / \partial n$ ,  $R$  и  $\Delta$  обозначены производная функции  $u$  по внешней нормали к контуру, радиус кривизны контура и оператор Лапласа. Ставится задача: найти функцию распределения толщины пластинки  $h(x, y)$ ,

удовлетворяющую ограничениям

$$h_0 - \varepsilon \leq h(x, y) \leq h_0 + \varepsilon, \quad h_0 - \varepsilon > 0 \quad (1.4)$$

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \leq C^2 = \text{const} \quad (1.5)$$

и изопериметрическому условию постоянства объема (веса)

$$\iint_D h(x, y) dx dy = 1 \quad (1.6)$$

при которой функционал, задающий максимальный прогиб пластинки

$$J(h) = \sup_{(x, y) \in D} |u_h(x, y)| \quad (1.7)$$

достигал бы своей нижней грани.

Здесь и далее  $u_h(x, y)$  — решение задачи (1.2), (1.3) при  $h = h(x, y)$ . Заметим, что решение задачи (1.2), (1.3) зависит не только от  $h(x, y)$ , но и от нагрузки  $q(x, y)$ . Однако в силу того, что нагрузка  $q(x, y)$  считается фиксированной, будем писать  $u_h(x, y)$  вместо  $u_{h, q}(x, y)$ .

Задача (1.2)–(1.6) с функционалом (1.7) рассматривалась раньше в [1], где был получен ряд численных решений и условия оптимальности.

Решение задачи (1.2)–(1.6) с функционалом, задающим средний интегральный прогиб в энергетическом пространстве, порожденным дифференциальным оператором, стоящим в левой части равенства (1.2), существует<sup>1</sup>. Используя теорему вложения С. Л. Соболева, получим существование решения с функционалом (1.7), задающим норму в пространстве непрерывных функций

$$\|u_h\|_c = \sup |u_h(x, y)|, \quad (x, y) \in D.$$

Наряду с задачей о максимизации жесткости пластинки заданного объема (веса) рассмотрим двойственную задачу об отыскании распределений толщин пластинки наименьшего объема (веса) при заданной жесткости.

Во введенных обозначениях эта задача формулируется следующим образом: найти такое распределение толщин  $h(x, y)$ , удовлетворяющих ограничениям (1.4), (1.5) и ограничению

$$\sup |u_h(x, y)| \leq K = \text{const}, \quad (x, y) \in D \quad (1.8)$$

при котором функционал

$$V(h) = \iint_D h(x, y) dx dy \quad (1.9)$$

достигает своей нижней грани.

Известно [2], что решение задачи (1.2)–(1.7) позволяет получить одновременно и решение двойственной задачи (1.2)–(1.5), (1.8), (1.9), поэтому достаточно рассмотреть одну из этих задач, например прямую задачу (1.2)–(1.7).

Воспользуемся неравенством

$$\|u\|_{L_p} = \left( \iint_D |u|^p dx dy \right)^{1/p} \leq \|u\|_c = \sup |u(x, y)|, \quad (x, y) \in D$$

При  $p \rightarrow +\infty$  предел  $\lim \|u\|_{L_p} = \|u\|_c$ , причем значения  $\|u\|_c$  и  $\|u\|_{L_p}$  при достаточно больших  $p$  сколь угодно мало отличаются одно от другого.

<sup>1</sup> Литвинов В. Г. Оптимальное управление коэффициентами в эллиптических системах. — Препринт Ин-та матем. АН УССР. Киев, 1979, № 79.4. 51 с.

Учитывая это, рассмотрим, наряду с исходной задачей, задачу о нахождении нижней грани интегрального функционала

$$J_p(h) = \|u_h\|_{L_p} \quad (1.10)$$

при тех же условиях на функцию  $h$ , что и в случае функционала (1.7).

Оценка погрешности оптимальных значений  $|J_p^* - J^*| \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow +\infty$ , может быть вычислена заранее [3] и имеет порядок  $\ln p/p$ .

Аналогично, наряду с двойственной задачей (1.2)–(1.5), (1.10) с ограничением (1.9) рассмотрим задачу с интегральным ограничением

$$\|u_h\|_{L_p} \leq K = \text{const} \quad (1.11)$$

При достаточно больших  $p$  из (1.11) следует, что погрешность в выполнении ограничения (1.8) может быть сделана сколь угодно малой.

Для решения поставленной задачи (1.2)–(1.7) применим метод возмущений, рассматривая пластинку как слабо управляемую систему. Впервые такой подход в случае управляемых динамических систем предложен в [4].

Рассмотрим решение невозмущенной задачи (1.2)

$$h_0^3 \Delta \Delta u^0(x, y) = q(x, y) \quad (1.12)$$

с краевыми условиями (1.2) для  $u^0(x, y)$  на  $\Gamma$ . Предположим, что решение краевой задачи (1.12) найдено. Пусть функции  $h(x, y)$  изменяются по закону (1.1). Ограничение (1.4) перейдет в ограничение  $|h_1(x, y)| \leq 1$ . Вид ограничения (1.5) сохранится. Изопериметрическое условие постоянства объема (веса) примет согласно сделанному ранее замечанию вид

$$\iint_D h_1(x, y) dx dy = 0 \quad (1.13)$$

Решение краевой задачи (1.2), (1.3) будем искать в виде  $u_h(x, y) = u^0(x, y) + \varepsilon u_{h_1}^1(x, y) + \dots$ . Здесь  $u_{h_1}^1(x, y)$  – решение краевой задачи

$$h_0^3 \Delta \Delta u_{h_1}^1(x, y) = -3h_0^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( h_1 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( h_1 \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( h_1 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( h_1 \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( h_1 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (1.14)$$

с краевыми условиями (1.3) для  $u_{h_1}^1(x, y)$  на  $\Gamma$ .

Поставим задачу отыскания такого распределения толщин  $h_1(x, y)$ , удовлетворяющих ограничениям (1.5), (1.3), (1.13), при котором функционал

$$J_1^p(h_1) = (\|u^0\|_p)^{1-p} \iint_D |u^0|^{p-1} u_{h_1}^1 dx dy, \quad \|u^0\|_p = \|u^0\|_{L_p} \quad (1.15)$$

достигал своей нижней грани.

Функционал (1.15) представляет собой линейную по малому параметру  $\varepsilon$  часть интегрального функционала (1.10), если функция  $u_h$  представлена в виде  $u_h = u^0 + \varepsilon u_{h_1}^1 + \dots$ , где  $u^0$  – решение задачи (1.12), а  $u_{h_1}^1$  – решение задачи (1.14).

Справедлив следующий результат.

*Теорема.* Пусть  $h^*$  – оптимальное распределение толщины пластинки, доставляющее нижней грани функционалу (1.10) в задаче (1.2)–(1.6). Через  $u^*(x, y)$  обозначим соответствующее решение краевой задачи (1.2), (1.3) с  $h = h^*(x, y)$ . Пусть  $h^\sim(x, y)$  – распределение толщины пластинки  $h^\sim(x, y) = h_0 + \varepsilon h_1^\sim(x, y)$ , причем функция  $h_1^\sim(x, y)$  доставляет нижнюю грань функционала (1.15) в задаче с ограничениями (1.5), (1.13) и  $|h_1^\sim(x, y)| \leq 1$ . Через  $u^\sim(x, y)$  обозначим соответствующее реше-

ние краевой задачи (1.14) с  $h_1 = h_1^*(x, y)$ . Тогда существует такая постоянная  $K$ , не зависящая от  $\varepsilon$ , что выполнится неравенство

$$\| \|u^*\|_p - \|u^0 + \varepsilon u^1\|_p \| \leq K\varepsilon^2 \quad (1.16)$$

Доказательство теоремы [5]<sup>2</sup> опирается на свойство дифференциального оператора, стоящего в левой части уравнения (1.2), оценки в пространствах С. Л. Соболева и теорему вложения.

Результат теоремы показывает, что последовательное решение краевой задачи (1.12) для бигармонического уравнения и задачи оптимального управления (1.13)–(1.15), в которой управляющая функция  $h_1(x, y)$  входит линейным образом в правую часть уравнения (1.14), позволяет получить приближение к оптимальному решению задачи (1.2)–(1.6) с функционалом (1.10) с точностью до порядка  $\varepsilon^2$ . Отметим, что решение исходной задачи (1.2)–(1.6) с локальным функционалом (1.7) отличается от решения задачи (1.2)–(1.6) с интегральным функционалом (1.10) на величину порядка  $\ln p/p$  [5]. Выбирая  $p$  таким, чтобы  $\ln p/p \approx \varepsilon^2$ , получим, что оптимальное решение исходной задачи с функционалом (1.7) отличается от решения задачи (1.12)–(1.14) с функционалом (1.16) на величину порядка  $O(\varepsilon^2)$ .

**2. Прямоугольная пластинка.** Рассмотрим прямоугольную пластинку  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , свободно опертую по краю. Введем безразмерные переменные п. 1, тогда

$$0 \leq x' \leq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad 0 \leq y' \leq \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad h'' = \frac{h}{h_0} = \left(1 + \varepsilon \frac{h_1}{h_0}\right)$$

Здесь  $x'$ ,  $y'$ ,  $h'$  – безразмерные переменные. Штрихи далее будем опускать. Уравнение состояния имеет вид (1.2) с  $q' = 12(1 - \nu^2)(ab)^{3/2} h_0^{-3} E^{-1} q$ . Полагая  $k = (b/a)^{1/2}$ , запишем граничные условия (1.3) в виде

$$\begin{aligned} u(0, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y) = 0, \quad u(k^{-1}, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k^{-1}, y) = 0 \\ u(x, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, 0) = 0, \quad u(x, k) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, k) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение невозмущенной задачи (1.12) с краевыми условиями (2.1) для любой поперечной силы  $q(x, y)$  может быть получено при помощи функции Грина [6]

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi m x \sin(n\pi y/k)}{(m^2 k^2 + n^2/k^2)^2} \sin k\pi \xi \sin\left(\frac{\pi n \eta}{k}\right) \quad (2.2)$$

$$u^0(x, y) = \int_0^{k^{-1}} \int_0^k G(x, y, \xi, \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Предположим, что функция  $q(x, y)$ , реализующая нагрузку внешних сил, принадлежит классу  $Q_l$ . Функции  $q(x, y)$  из этого класса имеют непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$  до порядка  $l$  ( $l$  – целое положительное число). Разложим функцию  $q(x, y) \in Q_l$  в ряд Фурье в прямоугольнике  $0 \leq x \leq k^{-1}$ ,  $0 \leq y \leq k$  по собственным функциям краевой задачи (1.2), (2.1) при  $h=1$ .

$$q(x, y) = \sum_{t, s=1}^{\infty} a_{ts} \sin tk\pi x \sin\left(\frac{s\pi y}{k}\right)$$

<sup>2</sup> Братусь А. С., Каргвелишвили В. М. Метод возмущений в задачах оптимизации устойчивости частот колебаний, изгиба и прочности упругих пластин переменной толщины. – Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981, № 180. 65 с.

$$a_{ts} = \int_0^{k^{-1}} \int_0^k q(\xi, \eta) \sin tk\pi\xi \sin\left(\frac{s\pi\eta}{k}\right) d\xi d\eta$$

Тогда решение краевой задачи (1.12) с граничными условиями (2.1) имеет вид

$$u^\circ(x, y) = \frac{4}{\pi^4} \sum_{t,s=1}^{\infty} a_{ts} \frac{\sin kt\pi x \sin(s\pi y/k)}{(t^2 k^2 + s^2/k^2)^2} \quad (2.3)$$

Решение краевой задачи (1.14) с граничными условиями (2.1) можно получить в виде линейного функционала от  $h_1(x, y)$ :

$$u_{h_1}^1(x, y) = -3 \int_0^{k^{-1}} \int_0^k h_1(\xi, \eta) [u_{\xi\xi}^\circ (G_{\xi\xi} + \nu G_{\eta\eta}) + u_{\eta\eta}^\circ (G_{\eta\eta} + \nu G_{\xi\xi}) + 2(1-\nu) u_{\xi\eta}^\circ G_{\xi\eta}] d\xi d\eta$$

Здесь и далее нижние индексы означают частные производные. Из (2.2) и (2.3) следует представление

$$u_{h_1}^1(x, y) = -\frac{48}{\pi^4} \int_0^{k^{-1}} \int_0^k h_1(\xi, \eta) \times \quad (2.4)$$

$$\times \sum_{m,n,s,t=1}^{\infty} \frac{\sin mk\pi x \sin(n\pi y/k)}{(m^2 k^2 + n^2/k^2)^2 (k^2 t^2 + s^2/k^2)^2} \Phi^{m,n,t,s}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$\Phi^{m,n,t,s}(\xi, \eta) = \sin mk\pi\xi \sin(n\pi\eta/k) \sin tk\pi\xi \sin(s\pi\eta/k) [k^2 t^2 (m^2 k^2 + \nu n^2/k^2) + (s^2/k^2) (\nu m^2 k^2 + h^2/k^2)] + 2(1-\nu) mnts \cos km\pi\xi \cos(n\pi\eta/k) \cos tk\pi\xi \cos(s\pi\eta/k) \quad (2.5)$$

В соответствии с (1.15) будем искать нижнюю грань функционала

$$J_{1^{(h_1)}}^p = (\|u^\circ\|_p)^{1-p} \int_0^{k^{-1}} \int_0^k |u^\circ|^{p-1} u_{h_1}^1 dx dy$$

полагая  $p$  четным числом.

Из (2.3) и (2.4) получим следующее выражение для функционала:

$$J_{1^p}(h_1) = -\frac{192}{\pi^4} \left(\frac{4}{\pi^4}\right)^{p-1} (\|u^\circ\|_p)^{1-p} \int_0^{k^{-1}} \int_0^k \times \\ \times \left\{ \left[ \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\sin ik\pi x \sin(j\pi y/k)}{(i^2 k^2 + j^2/k^2)^2} \right]^{p-1} \times \right. \\ \times \int_0^{k^{-1}} \int_0^k \left[ \sum_{m,n,t,s=1}^{\infty} a_{ts} \frac{\sin mk\pi x \sin(n\pi y/k)}{(k^2 t^2 + s^2/k^2)^2} \Phi^{m,n,t,s}(\xi, \eta) \right] h_1(\xi, \eta) d\xi d\eta \Big\} dx dy \\ = \int_0^{k^{-1}} \int_0^k \left\{ \int_0^{k^{-1}} \int_0^k h_1(\xi, \eta) F(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta \right\} dx dy = \int_0^{k^{-1}} \int_0^k \Phi(\xi, \eta) h_1(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.6)$$

Последнее равенство служит определением функции  $F(\xi, \eta, x, y)$  и функции  $\Phi(\xi, \eta)$ . В итоге задача об отыскании нижней грани функцио-

нала (1.15) сводится к задаче о нахождении нижней грани функционала

$$J_1^p(h_1) = \int_0^{k^{-1}} \int_0^k \Phi(\xi, \eta) h_1(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

при ограничениях (1.5), (1.13) и  $|h_1(x, y)| \leq 1$ . Так как множество функций  $h_1$ , задаваемое этими условиями, выпукло и замкнуто в топологии пространства С. Л. Соболева  $W_2^1(D)$ , а функционал  $J_1^p(h_1)$  линеен по  $h_1$ , то он достигает на этом множестве минимального значения и всякий локальный экстремум будет и глобальным. Используя методы вариационного исчисления, можно получить уравнение Эйлера — Лагранжа для необходимого условия экстремума, которые в силу выпуклости задачи будут и достаточными, если дополнительно к указанным условиям потребовать равенство нулю производных по нормали от функции  $h_1$  на границе

$$\Delta h_1(x, y) = \lambda_2^{-1} (\Phi(x, y) - \lambda_1) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial h_1(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial h_1(k^{-1}, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_1(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial h_1(x, k)}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\Phi(x, y)$  — функция, определенная равенством (2.6), постоянные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — множители Лагранжа, которые выбираются так, чтобы были выполнены изопериметрические условия (1.13) и (1.5) соответственно.

Следует заметить, что постоянная  $C$ , фигурирующая в ограничении (1.5), является параметром задачи и всегда возможен такой выбор  $C$ , при котором решение (2.7), (2.8) будет выходить на ограничения  $|h_1(x, y)| = 1$  лишь на множестве нулевой меры. Постоянная  $\lambda_1$ , отвечающая за выполнение условия (1.13), находится сразу по формуле

$$\lambda_1 = \int_0^{k^{-1}} \int_0^k \Phi(x, y) dx dy$$

Действительно, интегрируя (2.7) с учетом условий (2.8), получим

$$\int_0^{k^{-1}} \int_0^k \Delta h_1(x, y) dx dy = 0$$

В общем случае при произвольно заданной постоянной  $C$  в (1.5) необходимо, решив задачу (2.7), (2.8), найти линии выхода функций  $h_1(x, y)$  на ограничение  $|h_1(x, y)| = 1$ . При этом задача (2.7), (2.8) сводится к задаче отыскания искомым линий и может быть сформулирована как задача с неизвестной границей [7].

Возможен и другой подход к решению поставленной вариационной задачи. Заменим условие  $|h_1(x, y)| \leq 1$  интегральным условием

$$\int_0^{k^{-1}} \int_0^k |h_1(x, y)|^r dx dy \leq 1 \quad (r = 2m \geq 2) \quad (2.9)$$

Как уже отмечалось ранее, при достаточно больших  $r$  погрешность в такой замене может быть сделана сколь угодно малой.

Учитывая (2.9) и (1.13), можно получить решение уравнения Эйлера — Лагранжа для поставленной задачи в явном аналитическом виде

$$h_1(x, y) = (\Phi(x, y) - \lambda_1)^\beta (r\lambda_2)^{-\beta}, \quad \beta = 1/(r-1)$$

$$\lambda_1 = \int_0^{k^{-1}} \int_0^k [\Phi(x, y)]^\beta dx dy, \quad \left( \int_0^{k^{-1}} \int_0^k [\Phi(x, y) - \lambda_1]^{r\beta} dx dy \right)^{\beta/(\beta+1)} \leq (r\lambda_2)^\beta \quad (2.10)$$

где  $\lambda_1$  — постоянная, отвечающая за выполнение условия (1.13),  $\lambda_2$  — за (2.9).

После отыскания  $h_1(x, y)$  по формулам (2.10) можно найти постоянную  $C$ , при которой условие (1.5) удовлетворяется. Из формы решения (2.10) можно заключить, что значение  $C \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow \infty$ ; в пределе полученное решение будет выходить на релейный режим.

**3. Приближенное аналитическое решение.** Так как функция  $q(x, y) \in Q_l$  (множество функций, имеющих непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$  до порядка  $l$ ), то коэффициенты Фурье функции  $q(x, y)$  могут быть оценены [8] как

$$\begin{aligned} |a_{ts}| &\leq M(ts)^{-l}, \quad M \geq \\ &\geq |\partial^{l_1+l_2} q(x, y) / \partial x^{l_1} \partial y^{l_2}| \end{aligned} \quad (3.1)$$

$l_1$  и  $l_2$  — целые положительные числа,  $l_1 + l_2 = l$ .

Оценим члены рядов, стоящих в (2.6) при вычислении  $J_1^p$ . Все члены ряда по  $i$  и  $j$  в (2.6) пренебрежимо малы по сравнению с первым, если  $p$  — достаточно большое положительное число. С другой стороны, в силу (3.1) при достаточно больших  $l$  будут малы все члены ряда по  $m, n, t, s$ , кроме членов, соответствующих значениям  $m=n=t=s=1$ ;  $m=2, n=s=t=1$ ;  $n=2, m=s=t=1$ ;  $m=n=2, s=t=1$ .

Однако в силу того, что

$$\int_0^{k^{-1}} \sin^{p-1} k\pi x \sin 2k\pi x \, dx = 0, \quad \int_0^k \sin^{p-1} \left( \frac{\pi y}{k} \right) \sin \left( \frac{2\pi y}{k} \right) \, dy = 0$$

главная часть функционала  $J_1^p(h_1)$  с точностью до положительного постоянного множителя имеет вид

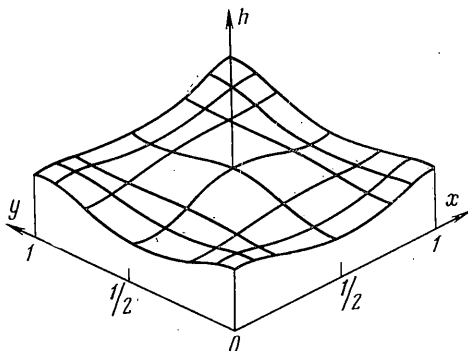
$$\begin{aligned} - \int_0^{k^{-1}} \int_0^k h_1(x, y) \left[ \sin^2 k\pi x \sin^2 \left( \frac{\pi y}{k} \right) \left( k^4 + 2\nu + \frac{1}{k^4} \right) + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \cos^2 k\pi x \cos^2 \left( \frac{\pi y}{k} \right) \right] \, dx \, dy \end{aligned} \quad (3.2)$$

Например, при  $k=1$  и  $q=1$  погрешность в вычислении главной части функционала (2.6) по формуле (3.2) имеет порядок  $10^{-4}$ .

Формула (3.2) показывает, что задача оптимального распределения толщины пластинки в указанном приближении при любых видах нагрузки из класса  $Q_l$  сводится к задаче отыскания минимума функционала (3.2) на множестве функций  $h_1(x, y)$ , удовлетворяющим ограничениям (1.5), (1.13) и  $|h_1(x, y)| \leq 1$ . Последнее позволяет отыскивать оптимальное распределение толщины прямоугольной пластинки для всех видов нагрузки из рассматриваемого класса нагрузок  $Q_l$ .

На фигуре показано распределение толщины квадратной пластинки при  $\epsilon=0,1$ ,  $\nu=0,33$  для  $q(x, y)=1$ , полученное по формулам (2.10) при  $p=2$ . Качественно характер распределения хорошо согласуется с результатом, полученным численно в [1].

Отметим, что приближенное решение двойственной задачи на минимум веса при заданной жесткости отличается от полученного решения лишь значениями постоянных Лагранжа и имеет качественно точно такой же вид, что и решение рассмотренной задачи.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Задачи оптимизации с локальными критериями качества в теории изгиба пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1, с. 124—131.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Об одном численном методе решения двумерных задач оптимизации в теории упругости.— В кн.: Матер. V Всес. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Ч. 2. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механ. СО АН СССР, 1978, с. 3—14.
4. Черноусько Ф. Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 1, с. 15—26.
5. Брагусь А. С. Асимптотические решения в задачах оптимального управления коэффициентами эллиптических операторов.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 5, с. 1035—1038.
6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
7. Брагусь А. С., Каргвелишвили В. М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 119—129.
8. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1975. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию  
27.III.1984