МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

УДК 539.3

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТРЕХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ

ГАЛИЧ В. А., ШАЛДЫРВАН В. А.

Методы расчета трехслойных пластин в трехмерной постановке разработаны достаточно полно [1, 2]; проблема расчета таких конструкций из трансверсально-изотропных (транстропных) материалов развита еще недостаточно. В [3] приведено бигармоническое решение в предположении, что коэффициент Пуассона постоянный. В [4] изучены некоторые свойства однородных решений, но отсутствует бигармоническое решение. Для поперечно-неоднородных транстропных пластин в [5] построены однородные решения. При этом бигармоническое решение приведено в явном виде, а потенциальное и вихревое – сформулированы в терминах спектральных задач для линейных дифференциальных операторов.

Ниже по схеме полуобратного метода Воровича дается построение и исследуются некоторые свойства однородных решений в задаче растяжения – сжатия трехслойной пластины симметричного строения с транстропными слоями. На основе проекционных методов рассматривается проблема предельного перехода от трехмерной задачи к двумерной, формулируются граничные задачи для многосвязных тел конечных размеров.

1. Рассмотрим упругое равновесие трехслойной пластины, занимающей объем

$$V=\bigcup_{q=1}^{3} V_q,\qquad V_1=S\times[h_2,h],\qquad V_2=S\times[-h_2,h_2],\qquad V_3=S\times[-h,-h_2]$$

где S – срединная плоскость, $2h=2(h_1+h_2)$ – толщина. Несущие слои и заполнитель изготовлены из разных транстропных материалов, характеризуемых величинами ν_q, ν_{zq}, G_q°, G_{zq}°, E_{zq}°.

Будем предполагать, что деформация вызвана поверхностными силами, приложенными к боковой поверхности $\Omega=\partial S\times[-h,\ h]$ (∂S – граница многосвязной области S) симметрично относительно срединной плоскости, а торцы свободны от напряжений.

В [5] показано, что общее решение уравнений равновесия с нулевыми условиями на торцах представляется в виде суммы бигармонического, вихревого и потенциального решений. Опуская построение этих решений, осуществляемых по схеме [2, 6], приведем окончательный вид.

Бигармоническое решение (F – бигармоническая функция)

$$u_{q1}=-\partial_1[F+\lambda^2 f_{2q}D^2F-\Phi_{00}],\qquad v_{q1}=-\partial_2[F+\lambda^2 f_{2q}D^2F-\Phi_{00}]$$

$$w_{q1}=-\lambda f_{1q}D^2F,\quad f_{22}(\zeta)=\varkappa_{32}(^1/_3-\zeta^2),\quad f_{12}(\zeta)=2\lambda\varkappa_{42}\zeta,\quad f_{21}=f_{22}+e_9f_1 \qquad (1.1)$$

$$f_{11}=f_{12}+e_8f_2,\quad f_2(\zeta)=e_3\zeta^2+e_4\zeta+e_5,\quad f_1(\zeta)=e_6\zeta+e_7$$

$$\varkappa_{32}=-e_2/\lambda^2,\quad \varkappa_{42}={}^1/_2e_1/\lambda^2,\quad D^2\Phi_{00}=0$$

$$e_1=\frac{\lambda\nu_{22}(1-\nu_2)[1+\lambda_2(G_2-1)]}{\lambda_2G_2(1+\nu_2)(1-\nu_1)+(1-\lambda_2)(1+\nu_1)(1-\nu_2)},\ldots$$

$$e_9=\frac{\lambda_2(G_2s_{01}^{\circ 2}-s_{02}^{\circ 2})(\lambda_1e_1+2e_2)}{\lambda^2s_{02}^{\circ 2}(2e_3\lambda_2+e_4)}$$

$$x=R\xi,\ y=R\eta,\ z=h\zeta,\ h=\lambda R,\ u^\circ=uR$$

вихревое

$$u_{q2}=\sum_k p_{qk}\,\partial_2 B_k,\qquad v_{q2}=-\sum_k p_{qk}\,\partial_1 B_k,\qquad w_{q2}=0 \tag{1.2}$$

$$p_{1k}(\zeta)=\cos\delta s_{02}{}^\circ\lambda_2\cos\delta s_{01}{}^\circ(\zeta-\lambda_2)-(G_2/P)\sin\delta s_{02}{}^\circ\lambda_2\sin\delta s_{01}{}^\circ(\zeta-\lambda_2)$$

$$p_{2k}(\zeta)=\cos\delta s_{02}{}^\circ\zeta,\ P=s_{02}{}^\circ/s_{01}{}^\circ,\ (s_{0q}{}^\circ)^2=s_{0q}{}^2G_q\quad (k=1,2,\ldots)$$

Функции $B_k(\xi,\eta)$ удовлетворяют уравнению

$$D^2B_k(\xi,\eta)-(\delta_k/\lambda)^2B_k(\xi,\eta)=0 \tag{1.3}$$

где собственные числа δ находятся из трансцендентного уравнения

$$\sin[\delta(s_{02}{}^\circ\lambda_2+s_{01}{}^\circ(1-\lambda_2)]=(1-P/G_2)\cos\delta s_{02}{}^\circ\lambda_2\sin\delta s_{01}{}^\circ(1-\lambda_2) \tag{1.4}$$

Потенциальное решение можно записать в виде

$$u_{q3}=\sum_p n_{qp}(\zeta)\,\partial_1 C_p,\qquad v_{q3}=\sum_p n_{qp}\,\partial_2 C_p,\qquad w_{q3}=\sum_p g_{qp}(\zeta)C_p \tag{1.5}$$

$$D^2C_p(\xi,\eta)-(\gamma_p/\lambda)^2C_p(\xi,\eta)=0.$$

Подстановка (1.5) в уравнения равновесия в перемещениях при удовлетворении граничных условий на торцах приводит к задаче на собственные значения относительно пар функций $(n_q(\zeta),\ g_q(\zeta))$:

$$n_q''+a_{1q}n_q+a_{2q}g_q'=0,\ g_q''+a_{3q}g_q+a_{4q}n_q'=0$$

$$g_1''(1)+\frac{(\gamma/\lambda)^2\nu_{21}}{1-\nu_1}n_1(1)=0,\qquad \lambda g_1(1)+n_1'(1)=0 \tag{1.6}$$

$$g_1'(\lambda_2)-P_2g_2'(\lambda_2)+\frac{\gamma^2}{\lambda}\frac{\nu_{21}}{1-\nu_1}n_1(\lambda_2)-P_2\frac{\gamma^2}{\lambda}\frac{\nu_{22}}{1-\nu_2}n_2(\lambda_2)=0$$

$$\lambda g_1(\lambda_2)-\lambda P_1g_2(\lambda_2)-n_1'(\lambda_2)-P_1n_2'(\lambda_2)=0$$

$$n_1(\lambda_2)=n_2(\lambda_2),\qquad g_1(\lambda_2)=g_2(\lambda_2),\qquad P_2=\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}G_2,\qquad P_1=G_2\left(\frac{s_{01}{}^\circ}{s_{02}{}^\circ}\right)^2$$

Введем в рассмотрение параметры

$$b_{1q}=(s_{0q}{}^{\circ 2}-\nu_{2q})/(1-\nu_q),\ \ b_{2q}=(\nu_{2q}/\nu_{zq})(1-\nu_{2q}\nu_{zq})/(1-\nu_q{}^2) \tag{1.7}$$

в зависимости от которых решение задачи (1.6) записывается по-разному. Возможны такие варианты (всего 16): $b_{1q}>0$, $b_{1q}{}^2\neq b_{2q}$; $b_{1q}>0$, $b_{1q}{}^2=b_{2q}{}^2$; …; $b_{11}<0$, $b_{12}>0$, $b_{11}{}^2\neq b_{21}$, $b_{12}{}^2=b_{22}$; $b_{11}<0$, $b_{12}>0$, $b_{11}{}^2=b_{21}$, $b_{12}{}^2\neq b_{22}$.

Например, если выполняется первое условие (индекс p опускается, чтобы не загромождать запись), имеем

$$\begin{Bmatrix} n_1(\zeta)\\ g_1(\zeta)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} H_{11}\\ Q_{11}\end{Bmatrix}\cos\gamma s_{11}\zeta+\begin{Bmatrix} H_{21}\\ Q_{21}\end{Bmatrix}\cos\gamma s_{21}\zeta+\begin{Bmatrix} H_{31}\\ Q_{31}\end{Bmatrix}\sin\gamma s_{11}\zeta+ \tag{1.8}$$

$$+\begin{Bmatrix} H_{41}\\ Q_{41}\end{Bmatrix}\sin\gamma s_{21}\zeta$$

$$n_2(\zeta)=H_{12}\cos\gamma s_{12}\zeta+H_{22}\cos\gamma s_{22}\zeta,\qquad s_{1q}=(b_{1q}+\sqrt{b_{1q}{}^2-b_{2q}})^{1/2}$$

$$g_2(\zeta)=Q_{12}\sin\gamma s_{12}\zeta+Q_{22}\sin\gamma s_{22}\zeta,\ s_{2q}=(b_{1q}-\sqrt{b_{1q}{}^2-b_{2q}})^{1/2}$$

где s_{1q} — действительные величины, если $b_{1q}{}^2>b_{2q}$, и комплексно-сопряженные, если $b_{1q}{}^2<b_{2q}$.

Постоянные H_{ij} связаны с Q_{ij} соотношениями

$$\begin{Bmatrix} Q_{11} \\ -Q_{31} \end{Bmatrix} = \frac{\gamma s_{11} a_{41}}{\gamma^2 s_{11}^2 - a_{31}} \begin{Bmatrix} H_{31} \\ H_{11} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_{21} \\ -Q_{41} \end{Bmatrix} = \frac{\gamma s_{21} a_{41}}{\gamma^2 s_{21}^2 - a_{31}} \begin{Bmatrix} H_{41} \\ H_{21} \end{Bmatrix}$$

$$Q_{12} = \frac{\gamma s_{12} a_{42}}{a_{32} - \gamma^2 s_{12}^2} H_{12}, \qquad Q_{22} = -\frac{a_{42} \gamma s_{22}}{a_{32} - \gamma^2 s_{22}^2} H_{22}$$

Постоянные H_{ij} находятся из однородной системы

$$A \times H = 0,\ A = \| d_{ij} \|,\ H = (H_{11}, H_{21}, \ldots, H_{22}),\ d_{11} = a_{11}^\circ \cos \gamma s_{11},\ d_{12} = a_{21}^\circ \cos \gamma s_{21} \tag{1.9}$$

$$d_{13} = a_{11}^\circ \sin \gamma s_{11}, \ldots, d_{64} = -b_{11}^\circ \cos \gamma s_{21} \lambda_2,\ d_{65} = b_{12}^\circ \cos \gamma s_{12} \lambda_2,$$

$$d_{66} = b_{22}^\circ \cos \gamma s_{22} \lambda_2$$

$$a_{iq}^\circ = \nu_{2q} / (1 - \nu_q) + s_{iq} b_{iq}^\circ$$

$$b_{iq}^\circ = s_{0q}^{\circ 2} \mu_{3q} s_{iq} / (1 - s_{iq}^2 s_{0q}^{\circ 2} \mu_{2q})$$

Чтобы система (1.9) имела ненулевые решения, необходимо приравнять нулю ее определитель. В результате получим трансцендентное уравнение для определения собственных значений γ:

$$\begin{gathered}
\Delta_1(\gamma) \equiv [k_{11}^2 \sin^2 {}^1/_2 \beta (s_{11} + s_{21}) - k_{11}^{\circ 2} \sin^2 {}^1/_2 \beta (s_{11} - s_{21})] [k_{52} \sin (s_{12} + \\
+ s_{22}) \alpha + k_{52}^\circ \sin (s_{12} - s_{22}) \alpha] - P_1 k_{31} k_{22} \sin s_{12} \alpha \sin s_{22} \alpha [k_{11}^\circ \sin (s_{11} - s_{21}) \beta - \\
- k_{11} \sin (s_{11} + s_{21}) \beta] - P_2 k_{21} k_{32} \cos s_{22} \alpha \cos s_{12} \alpha [k_{11} \sin (s_{11} + s_{21}) \beta + \\
+ k_{11}^\circ \sin (s_{11} - s_{21}) \beta] - P_1 [k_{11} k_{61} \sin^2 {}^1/_2 \beta (s_{11} + s_{21}) - k_{11}^\circ k_{61}^\circ \sin^2 {}^1/_2 \beta (s_{11} - \\
- s_{21})] [k_{42} \sin (s_{12} + s_{22}) \alpha + k_{42}^\circ \sin (s_{12} - s_{22}) \alpha] - P_2 [k_{41} k_{11} \sin^2 {}^1/_2 \beta (s_{11} + \\
+ s_{21}) - k_{11}^\circ k_{41}^\circ \sin^2 {}^1/_2 \beta (s_{11} - s_{21})] [k_{62} \sin (s_{12} + s_{22}) \alpha + k_{62}^\circ \sin (s_{12} - \\
- s_{22}) \alpha] + P_1 P_2 [k_{51} k_{11} \sin^2 {}^1/_2 \beta (s_{11} + s_{21}) - k_{51}^\circ k_{11}^\circ \sin^2 {}^1/_2 \beta (s_{11} - s_{21}) + \\
+ k_{31}^\circ] [k_{12} \sin (s_{12} + s_{22}) \alpha + k_{12}^\circ \sin (s_{12} - s_{22}) \alpha] = 0
\end{gathered} \tag{1.10}$$

$$k_{1q} = c_{1q}^\circ a_{2q}^\circ - c_{2q}^\circ a_{1q}^\circ, \qquad k_{1q}^\circ = c_{1q}^\circ a_{2q}^\circ + c_{2q}^\circ a_{1q}^\circ$$

$$k_{2q} = b_{2q}^\circ c_{1q}^\circ - b_{1q}^\circ c_{2q}^\circ, \qquad k_{2q}^\circ = b_{2q}^\circ c_{1q}^\circ + b_{1q}^\circ c_{2q}^\circ$$

$$k_{3q} = a_{1q}^\circ - a_{2q}^\circ, \qquad 2k_{31}^\circ = k_{51}^\circ k_{11}^\circ - k_{51} k_{11} - 2 (b_{21}^\circ c_{11}^\circ a_{11}^\circ + b_{11}^\circ c_{21}^\circ a_{21}^\circ)$$

$$k_{4q} = c_{1q}^\circ - c_{2q}^\circ, \qquad k_{4q}^\circ = c_{1q}^\circ + c_{2q}^\circ, \qquad k_{5q} = b_{1q}^\circ - b_{2q}^\circ, \qquad k_{5q}^\circ = b_{1q}^\circ + b_{2q}^\circ$$

$$k_{6q} = b_{1q}^\circ a_{2q} - b_{2q}^\circ a_{1q}^\circ, \qquad k_{6q}^\circ = b_{1q}^\circ a_{2q}^\circ + b_{2q}^\circ a_{1q}^\circ, \qquad \alpha = \lambda_2 \gamma, \qquad \beta = \lambda_1 \gamma$$

Для остальных 15 случаев вид уравнения $\Delta(\gamma) = 0$ можно получить из (1.10) соответствующей заменой и предельных переходов. Так, например, во втором случае $s_{1q} = s_{2q} = (b_{1q})^{1/2}$ $(q = 1, 2)$:

$$\Delta_2(\gamma, s_{11}, s_{22}) \equiv \lim_{\substack{s_{21} \to s_{11} \\ s_{12} \to s_{22}}} \frac{\Delta_1(\gamma)}{(s_{11} - s_{21})^2 (s_{12} - s_{22})} = 0 \tag{1.11}$$

Структура функций $n_q(\zeta)$ будет отличаться от (1.8), а именно:

$$n_1(\zeta) = H_{11} \cos \gamma s_{11} \zeta + H_{21} \zeta \sin \gamma s_{11} \zeta + H_{31} \sin \gamma s_{11} \zeta + H_{41} \zeta \cos \gamma s_{11} \zeta$$

$$n_2(\zeta) = H_{12} \cos \gamma s_{22} \zeta + H_{22} \zeta \sin \gamma s_{22} \zeta$$

2. Сформулируем краевую задачу для функций напряжений Лурье $F(\varphi, \psi)$, B_k, C_p, когда на боковой поверхности Ω_l заданы напряжения

$$\sigma_{rmq} = P_m^l \quad (m = r, \theta, \zeta) \tag{2.1}$$

Подставляя (1.1), (1.2), (1.5) в граничные условия (2.1) и учитывая формулы закона Гука, имеем

$$P_r{}^l+iP_\theta{}^l=G_q\Big\{L_{10\Omega_l}F+\lambda^2 f_{2q}L_{10}\nabla^2_{\Omega_l}F+g_{4q}\nabla^2_{\Omega_l}F+$$

$$+\sum_k p_{kq}L_{8\Omega_l}B_k+\sum_p (s_{pq}L_{0\Omega_l}+n_{pq}L_{9\Omega_l})C_p\Big\}$$

$$P_\zeta{}^l=\lambda g_{3q}\,\mathrm{Re}\,L_7\nabla_{\Omega_l}{}^2F+\frac{A_{44q}}{\lambda}\sum_k p_{kq}{}'L_{2\Omega_l}B_k+\sum_p r_{pq}L_{1\Omega_l}C_p \qquad (2.2)$$

где значения операторов приведены в [7].

Как и в случае изотропных пластин конечных размеров, эффективное построение решения можно выполнить при помощи проекционных методов. На основании метода Бубнова — Галеркина граничные условия для определения функций φ, ψ, B_k, C_p можно записать в виде

$$\varphi(t_l)+t_l\overline{\varphi'(t_l)}+\psi(t_l)+\varepsilon_{1,0}\overline{\varphi''(t_l)}+$$

$$+\varepsilon_{2,0}\Big[\varphi(t_l)+\int_{s_l}\overline{\varphi'(t_l)}dt_l\Big]+M_{1\Omega_l}(B_0,C_p)=f_{1,0}$$

$$\varepsilon_{1,m}\varphi''(t_l)+\varepsilon_{2,m}\Big[\varphi(t_l)+\int_{s_l}\overline{\varphi'(t_l)}dt_l\Big]+M_{1\Omega_l}(B_m,C_p)=f_{1,m} \qquad (2.3)$$

$$\varepsilon_{3,m}[\varphi'(t_l)-\overline{\varphi'(t_l)}]+M_{2\Omega_l}(B_p,C_p)+C_l{}^\circ=f_{2,m}$$

$$\varepsilon_{1,m}=\frac{4\lambda^2}{G_m{}^\circ}\int_0^1 G_q f_{2q}(\zeta)P_{mq}(\zeta)\,d\zeta$$

$$M_{1\Omega_l}(B_m,C_p)=\varepsilon_m M_{8\Omega_l}B_m+\sum_p(s_{mp}M_{0\Omega_l}+n_{mp}M_{9\Omega_l})C_p$$

$$s_{mp}=\frac{1}{G^\circ}\int_0^1 G_q s_{pq}p_{mq}\,d\zeta,\qquad G_0{}^\circ=\int_0^1 G_q p_{0q}\,d\zeta,\qquad G_m{}^\circ=1\quad (m=1,2,\ldots)$$

Остальные обозначения имеют аналогичный вид.

Дальнейшее решение задачи выполняется методом сведения к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений разрешающих функций [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гусейн-Заде М. И.* Напряженное состояние погранслоя для слоистых пластинок.— Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 638–643.
2. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г., Устинов Ю. А.* Некоторые общие свойства трехмерного напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты симметричного строения.— В кн.: Теория оболочек и пластин. Л.: Судостроение, 1975, с. 36–37.
3. *Лехницкий С. Г.* Плоское напряженное состояние и изгиб неоднородной трансверсально-изотропной плиты.— Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр., 1963, № 1, с. 61–67.
4. *Раппопорт Р. М.* О построении общих решений уравнений теории упругости трансверсально-изотропных неоднородных тел.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 5, с. 956–958.
5. *Устинов Ю. А.* Однородные решения и проблема предельного перехода от трехмерных задач к двумерным для плит из электроупругих материалов с переменными свойствами по толщине.— Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. Тбилиси: Мецниереба, 1975, с. 286–295.
6. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г.* Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 870–876.
7. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. К.: Наук. думка, 1978, с. 239.

Донецк

Поступила в редакцию 16.VI.1980