МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

УДК 539.376

СМЕШАННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ В ЗАДАЧАХ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

СЕРГЕЕВ М. В.

Предлагается модификация смешанного вариационного принципа теории ползучести применительно к задачам длительной прочности, позволяющая учитывать накопление повреждаемости материала в рамках одного функционала.

1. Как известно [1], явление ползучести сопровождается процессом накопления повреждаемости материала и имеется определенный круг задач, где существенно взаимовлияние этих процессов.

В рамках обобщенной теории упрочнения [1, 2] представляются широкие возможности для их совместного описания, если вводить параметры повреждаемости в качестве структурных параметров q^i в кинетические соотношения ползучести

$$p_{ij}^{\cdot}=\Phi(\sigma_{ij},\ T,\ q^1,\ldots,q^N) \tag{1.1}$$

$$dq^i=a_{rs}{}^i dp_{rs}+b_{rs}{}^i d\sigma_{rs}+\varphi^i dt+d^i dT \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N) \tag{1.2}$$

В общем случае уравнения (1.2) неинтегрируемы. Полагая $q^1=p_0$ (p_0 — интенсивность деформаций ползучести), $q^2=\omega$ ($\omega(0)=0$, $\omega(t^*)=1$, t^* — время разрушения), $b_{rs}{}^1=b_{rs}{}^2=a_{rs}{}^2=0$, $\varphi^1=d^1=d^2=0$, $\varphi^2=\varphi$, $a_{rs}{}^1=1$, можно получить простейшую теорию длительного разрушения [2] при ползучести с упрочнением, достаточно хорошо описывающую свойства конструкционных материалов

$$p_{ij}^{\cdot}=\Phi(\sigma_{ij},\ \omega,\ p_0) \tag{1.3}$$

$$\omega^{\cdot}=\varphi(\sigma_{ij},\ \omega,\ p_0) \tag{1.4}$$

В частности, в одномерном случае степенной вид зависимостей Ф и φ позволяет описывать разрушение при кратковременной ползучести стали 10Х18Н10Т при 850° С [3] и сплава [1] D16Т при 250° С.

В случае необходимости могут быть введены два [4] и более параметров повреждаемости. Ниже, для простоты рассуждений, ограничимся одним

2. В теории ползучести предложен ряд вариационных принципов [1, 5—7], сводящих решение краевых задач ползучести к поиску стационарного значения некоторого функционала. В частности, независимое варьирование скоростей перемещений $u_i^{\cdot}$ и скоростей напряжений $\sigma_{ij}^{\cdot}$ в функционале [5] (использованы обозначения. принятые в [1])

$$K_S=\int\limits_V\left(\sigma_{ij}^{\cdot}e_{ij}^{\cdot}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{\cdot}e_{ij}^{\cdot\varkappa}-\sigma_{ij}^{\cdot}p_{ij}^{\cdot}\right)dV-\int\limits_{\Sigma_u}T_i^{\cdot}(u_i^{\cdot}-u_i^{\cdot e})\,d\Sigma-\int\limits_{\Sigma_T}T_i^{\cdot e}u_i^{\cdot}\,d\Sigma \tag{2.1}$$

---

[1] *Горев Б. В.* Энергетический вариант теорий ползучести: Дис. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1974. 107 с.

при равенстве нулю его первой вариации обеспечивает выполнение граничных условий, уравнений равновесия, связь между перемещениями и напряжениями и уравнение (1.3).

Кинетическое уравнение повреждаемости (1.4) при этом служит дополнительным дифференциальным условием, накладываемым на искомое решение, а функционал (2.1) зависит от функции повреждаемости ω, как от параметра.

Применение прямых методов [8] решения подобной вариационной задачи связано с определенными трудностями: выполнение условий (1.4) возможно лишь при ограничениях на выбор вида координатных функций для напряжений. Так, при решении задачи о чистом изгибе [9] удалось точно удовлетворить уравнению повреждаемости, но лишь за счет усложненного вида функции напряжений (см. формулы (8) и (9) в [9]). Это, в свою очередь, усложнило вид разрешающих уравнений и привело к трудностям их численной реализации.

3. Прием, позволяющий преодолеть эти трудности, состоит в отказе от точного удовлетворения уравнению (1.4) и замене его приближенным интегральным соотношением

$$J=\int_V \Lambda[\omega^{\cdot}-\varphi(\sigma_{ij},p_{ij},\omega)]^2\,dV\approx 0 \tag{3.1}$$

где Λ — некоторая весовая функция, а интегрирование распространено по всему объему тела.

Если теперь разыскивать функцию повреждаемости в виде ряда

$$\omega=\sum_{k=1}^{P} a_k(t)\,\psi_k(x_j)\qquad (a_k(0)=0) \tag{3.2}$$

потребовав минимума величины J, приходим к классической процедуре интегрального метода наименьших квадратов [10], которая позволяет в данном случае построить систему дифференциальных уравнений относительно a_k:

$$\sum_{i=1}^{P} a_i^{\cdot}\int_V \Lambda\psi_i\psi_k\,dV=\int_V \Lambda\psi_k\varphi\left(\sigma_{ij},p_{ij},\sum_{i=1}^{P}a_i\psi_i\right)dV \tag{3.3}$$

Интегрируя уравнения (3.3) совместно с уравнениями, получаемыми при использовании основного функционала (2.1), можно получить полное решение задачи.

Если система функций $\psi_k(x_j)$ не ортонормирована, то метод наименьших квадратов дает неединственный набор коэффициентов, однако всегда имеется возможность решать уравнения (1.4) и (3.1) так, чтобы они совпадали с заданной точностью [11].

Сформулированная задача (3.1) является частным видом простейшей вариационной проблемы [8], уравнение (1.4) есть ее уравнение Эйлера — Лагранжа, причем экстремаль доставляет функционалу минимум, равный нулю.

Дальнейшее развитие приема состоит в том, чтобы использовать особенности структуры выражений (2.1) для K_S и (3.1) для J: в K_S варьируются лишь скорости $\sigma_{ij}^{\cdot}$ и $u_i^{\cdot}$, а повреждаемость ω входит как параметр в закон ползучести (1.3), напротив, в J входят лишь неварьируемые величины σ_{ij}, p_{ij}, ω, а не их скорости, варьируется же скорость повреждаемости $\omega^{\cdot}$.

Рассмотрим некоторый функционал K^*, равный сумме

$$K^*=K_S(\sigma_{ij}^{\cdot},\,u_i^{\cdot},\,\omega)+R(\sigma_{ij},\,p_{ij},\,\omega,\,\omega^{\cdot}) \tag{3.4}$$

где K_s определяется формулой (2.1), а R представляет собой функционал, эквивалентный (3.1) при $\Lambda = {}^1/_2\sigma_{ij}e_{ij}$

$$R = \int_V \sigma_{ij}e_{ij}\left[\frac{1}{2}\omega^{\cdot 2} - \omega^{\cdot}\varphi(\sigma_{ij}, p_{ij}, \omega)\right] dV \tag{3.5}$$

Стационарное значение K^* достигается при условии равенства нулю его первой вариации

$$\delta K^* = \delta K_s + \delta R = \frac{\partial K_s}{\partial u_i^{\cdot}}\delta u_i^{\cdot} + \frac{\partial K_s}{\partial \sigma_{ij}^{\cdot}}\delta\sigma_{ij}^{\cdot} + \frac{\partial R}{\partial \omega^{\cdot}}\delta\omega^{\cdot} = 0 \tag{3.6}$$

Так, как $u_i^{\cdot}$, $\sigma_{ij}^{\cdot}$ и $\omega^{\cdot}$ варьируются независимо, то из (3.6) следует выполнение системы уравнений деформирования тела с учетом повреждаемости полностью.

Выражение (3.4) есть модификация смешанного вариационного принципа теории ползучести [5] при его использовании в задачах длительного разрушения. Очевидно, что указанное преобразование может применяться и к некоторым другим функционалам [1, 6, 7], если запретить варьирование всех функций, входящих в (3.1), кроме $\omega^{\cdot}$.

4. В качестве примера использования модифицированного принципа рассмотрим задачу [9] о чистом изгибе моментом M равномерно прогретой балки прямоугольного сечения $b\times 2h$.

Уравнения (1.3) и (1.4) примем в виде, аналогичном [9]:

$$p^{\cdot} = A\sigma^n/(1-\omega)^m, \quad \omega^{\cdot} = B\sigma^{g+1}/(1-\omega)^m \tag{4.1}$$

В этом случае функционал K^* для элемента стержня единичной длины записывается как

$$K^* = \int_F \sigma^{\cdot}\left(e^{\cdot} - \frac{1}{2E}\sigma^{\cdot} - p^{\cdot}\right)dF - M^{\cdot}\varkappa^{\cdot} - \int_F \sigma e\left[\frac{1}{2}\omega^{\cdot 2} - \omega^{\cdot}B\frac{\sigma^{g+1}}{(1-\omega)^m}\right]dF \tag{4.2}$$

Будем напряжение σ, деформации e и функцию повреждаемости ω искать в виде

$$\sigma = M_0 y^{1/k}\beta J_k^{-1} + Ef(y)S, \qquad J_k = \int_F y^{(1+1/k)}\,dF, \qquad e = \varkappa y, \qquad \omega = 1 - [1+\rho g(y)]^{-1} \tag{4.3}$$

где β, S, ρ — искомые функции времени, $f(y)$ и $g(y)$ — функции координат, вид которых конкретизируем ниже, J_k — момент инерции порядка k.

Момент M представим в виде произведения $M = M_0\mu$, где $\mu(t)$ — заданная функция времени.

Варьируя функционал (4.3) по величинам $\beta^{\cdot}$, $S^{\cdot}$, $\rho^{\cdot}$ с учетом выражений для скоростей

$$\sigma^{\cdot} = M_0 y^{1/k}\beta^{\cdot}/J_k + Ef(y)S^{\cdot}, \quad e^{\cdot} = \varkappa^{\cdot} y, \quad \omega^{\cdot} = \rho^{\cdot} g(y)/[1+\rho g(y)]^2 \tag{4.4}$$

получим систему четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{k}{2k+1}\varkappa^{\cdot} - \frac{k}{2+k}\frac{\varkappa_0}{3}\beta^{\cdot} + L_2 S^{\cdot} = \frac{A}{h}Q_1 \\
L_1\varkappa^{\cdot} - \frac{2k+1}{k}\frac{\varkappa_0}{3}\beta^{\cdot} - L_3 S^{\cdot} = \frac{A}{h}Q_2 \\
\beta^{\cdot} + \frac{3S^{\cdot}L_1}{\varkappa_0} = \mu^{\cdot}, \qquad Q_3\rho^{\cdot} - Q_4 = 0, \qquad L_1 = \int_0^1 zf(z)\,dz \\
L_2 = \int_0^1 z^{1/k}f(z)\,dz, \qquad L_3 = \int_0^1 f^2(z)\,dz, \qquad Q_1 = \rho^m\int_0^1 z^{1/k}g^m(z)\,\sigma^n\,dz
\end{gathered} \tag{4.5}$$

$$Q_2=\rho^m \int\limits_0^1 f(z)\, g^m(z)\, \sigma^n\, dz, \qquad Q_3=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sigma z g^2(z)\,[1+\rho g(z)]^{-4}\, dz$$

$$Q_4=\int\limits_0^1 z g(z)\, \sigma^{g+2}[1+\rho g(z)]^{m-2}\, dz, \qquad \varkappa_0=\frac{M_0}{EJ}$$

Начальные условия для ее решения могут быть приняты следующими:

$$\beta(0)=1, \qquad S(0)=0, \qquad \rho(0)=0, \qquad \varkappa(0)=\varkappa_0=\frac{M_0}{EJ}, \qquad J=\frac{2bh^3}{3} \tag{4.6}$$

Разрешим систему (4.5) относительно производных

$$\varkappa^{\bullet}=\frac{\varkappa_0 h^2}{3\Delta}\left(\frac{2k+1}{2+k}L_3-\frac{2k+1}{k}L_1L_2\right)\mu^{\bullet}+$$

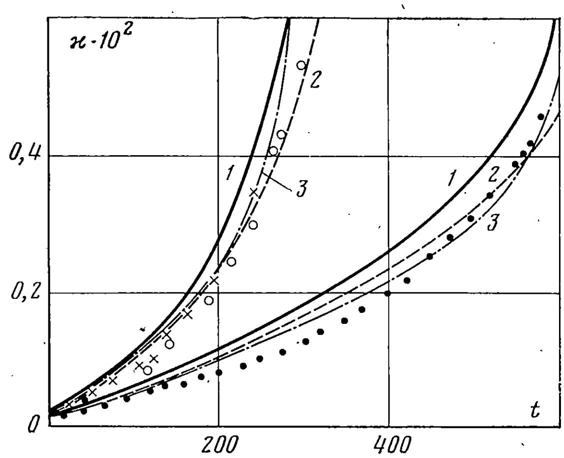
$$+\frac{Ah}{\Delta}\left[\left(L_3-\frac{2k+1}{k}L_1L_2\right)Q_1+\left(\frac{2k+1}{2+k}L_1-L_2\right)Q_2\right]$$

$$S^{\bullet}=\frac{\varkappa_0 h^2}{3\Delta}\left(\frac{2k+1}{2+k}L_1-L_2\right)\mu^{\bullet}+\frac{Ah}{\Delta}\left(L_1Q_1-\frac{k}{2k+1}Q_2\right)$$

$$\beta^{\bullet}=\frac{h^2}{\Delta}\left(\frac{k}{2k+1}L_3-L_1L_2\right)\mu^{\bullet}+\frac{Ah}{\Delta}\frac{3L_1}{\varkappa_0}\left(\frac{k}{2k+1}Q_2-L_1Q_1\right) \tag{4.7}$$

$$\rho^{\bullet}=\frac{Q_4}{Q_3}, \qquad \Delta=h^2\left(\frac{k}{2k+1}L_3+\frac{2k+1}{2+k}L_1-2L_1L_2\right)$$

Полученная задача Коши (4.6) – (4.7) в стандартной форме решается известными численными методами. Результаты реализации задачи на ЭВМ при значениях параметров [9]: $E=5{,}6\cdot10^4$ МПа, $n=g=5$, $m=10$, $A=1{,}4043\cdot10^{-9}$, $B=0{,}9362\cdot10^{-9}$, $b=h=0{,}01$ м для значений $M_0=8\cdot10^2$ Нм и $M_0=7\cdot10^2$ Нм представлены на фигуре (размерность $\varkappa$ в м$^{-3}$ и время t в ч). При этом полагалось $\mu(t)=1$, $g(y)=y^2$, $f(y)=0$, $k=n$.



Сравнение с экспериментальными значениями [2] и расчетными данными [3] показывает, что использование предложенной модификации, несмотря на заведомо неточный выбор координатной функции для напряжений (неучет перераспределения в сечении при $f(y)=0$), позволяет получить достаточно точное решение за счет дополнительной возможности варьирования функцией $\omega^{\bullet}$. Следует также отметить упрощение техники получения разрешающих уравнений при независимом выборе вида функций $\sigma_{ij}^{\bullet}$ и $\omega^{\bullet}$.

Остановимся на выборе весовой функции Λ. Классическая процедура интегрального метода наименьших квадратов не требует введения подобной функции [11], а выравнивание размерностей слагаемых в (3.4) можно осуществить, например, за счет размерной постоянной. Однако различный вес ошибок в каждой точке конструкции имеет определенный смысл — физическое содержание задачи подсказывает,

[2] См. *Горев Б. В.* Указ. публ., с. 112.

[3] Кривая *1* соответствует результатам Горева Б. В., а кривая *2* — результатам [9].

что влияние на общую невязку неточности определения скорости повреждаемости в точках, где ее абсолютное значение выше, должно быть больше.

Можно привести факты [12], указывающие на то, что повреждаемость материала в точке зависит от величины затраченной энергии. Поэтому использование в качестве весовой функции величины $\Lambda=0{,}5\,\sigma_{ij}e_{ij}$ является правомерным, хотя и не единственно возможным. Так, можно вместо полной деформации e_{ij} применить тензор деформации ползучести p_{ij}, хотя в первые моменты времени из-за малости p_{ij} подобная весовая функция оказывается худшей.

Приведенные выше соображения о выборе Λ подтверждаются результатами численного анализа задачи о чистом изгибе балки.

Автор благодарен С. А. Шестерикову за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Работнов Ю. Н.* О разрушении вследствие ползучести.— ПМТФ, 1963, № 2, с. 113—123.
3. *Локощенко А. М., Мякотин Е. А., Шестериков С. А.* Ползучесть и длительная прочность стали Х18Н10Т в условиях сложного напряженного состояния.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 87—94.
4. *Любарт Е. Л.* Об одной возможности феноменологического описания процесса разрушения при ползучести.— В кн.: Научные работы аспирантов. Ин-т механики, МГУ. Сб. № 1: М.: Изд-во МГУ, 1973, с. 116—120.
5. *Sanders J. L., McComb H. G., Jr. Schlechte F. R.* A variational theorem for creep with applications to plates and columns.— NASA, 1957, TN 4003. 23 p.
6. *Терегулов И. Г.* Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. М.: Наука, 1969. 206 с.
7. *Malmberg T.* On some general variational principles for creep with applications to thin shells.— Int. J. Solids and Struct., 1974, v. 10, No. 10, p. 1137—1154.
8. *Эльсгольц Л. Э.* Вариационное исчисление. М.: Гостехиздат, 1958. 163 с.
9. *Никитенко А. Ф., Заев В. А.* К расчету элементов конструкций с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести.— Проблемы прочности, 1979, № 4, с. 20—25.
10. *Постнов В. А.* Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977. 280 с.
11. *Форсайт Дж., Мальмкольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
12. *Соснин О. В.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности.— Проблемы прочности, 1973, № 5, с. 45—49.

Москва

Поступила в редакцию
18.V.1981