МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

УДК 539.3

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

КОНДАУРОВ В. И.

Исследуются общие уравнения теории течения конечно-деформированной упругопластической среды с динамическим упрочнением. Предлагается новое, имеющее форму закона сохранения, кинематическое уравнение, связывающее скорость градиента полного перемещения с градиентами скоростей частиц.

Введение этой формы уравнения позволяет записать полную систему уравнений в виде системы законов сохранения в произвольных криволинейных движущихся координатах. Показывается, что в отличие от рассматриваемого случая уравнения теории течения пластического тела, нечувствительного к скорости деформирования, принципиально неприводимы к дивергентному виду.

В адиабатическом приближении исследуются характеристические свойства системы уравнений. Проводится симметризация уравнений, формулируются достаточные условия гиперболичности.

Без введения каких-либо дополнительных предположений записывается замкнутая система соотношений на сильных разрывах. Рассматриваются условия существования и единственности решения задачи о вычислении величин за фронтом ударной волны при известном состоянии перед фронтом и заданной скорости волны.

1. Кинематика. Будем рассматривать движение однородной анизотропной упругопластической среды с конечными деформациями. Пусть $\mathbf{X}=X^i\mathbf{l}_i$ — радиус-вектор частицы тела в начальной, отсчетной конфигурации в эйлеровой системе координат с ортонормированным базисом $\mathbf{l}_i$, $x^i=x^i(X^m,t)$ — координаты этой же частицы в текущей, актуальной конфигурации тела в момент времени $t\geqslant 0$, $F_{.j}^{i\cdot}=\partial x^i/\partial X^j$ — градиент полной деформации (дисторсия) среды, $v^i=(\partial x^i/\partial t)\,|_{X^m}$ — скорость частицы. Тогда при условии взаимнооднозначного соответствия x^i и X^m имеет место соотношение [1, 2]:

$$\partial F_j^{i}/\partial t\,|_{X^m}=F_j^{k}\partial v^i/\partial x^k \tag{1.1}$$

В переменных (t,x^i) соотношение (1.1) записывается в виде $\partial F_j^{i}/\partial t+$ $+v^k\partial F_j^{i}/\partial x^k=F_j^{k}\partial v^i/\partial x^k$ и может быть преобразовано к дивергентной форме

$$\frac{\partial (F_j^{i}/\Delta)}{\partial t}+\frac{\partial\{(v^kF_j^{i}-v^iF_j^{k})/\Delta\}}{\partial x^k}=0,\qquad \Delta=\det\|F_j^{i}\| \tag{1.2}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в эквивалентности (1.1) и (1.2), если принять во внимание формулы

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}\Big|_{X^m}=\Delta\frac{\partial v^k}{\partial x^k},\quad \frac{\partial\Delta}{\partial x^k}=\Delta F_a^{-1b}\frac{\partial F_a^{b}}{\partial x^k},\quad \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{\Delta}F_j^{k}\right)=0 \tag{1.3}$$

Для доказательства (1.3) следует заметить, что $\Delta=e_{ijm}F_1^{i}F_2^{j}F_3^{m}$, где e_{ijm} — единичный антисимметричный тензор. Поэтому $\partial\Delta/\partial F_b^{a}=\Delta F_a^{-1b}$ и

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}\Big|_{X^m}=\frac{\partial\Delta}{\partial F_b^{a}}\frac{\partial F_b^{a}}{\partial t}\Big|_{X^m}=\Delta F_a^{-1b}F_b^{k}\frac{\partial v^a}{\partial x^k},\quad \frac{\partial\Delta}{\partial x^k}=\Delta F_a^{-1b}\frac{\partial F_b^{a}}{\partial x^k}$$

Справедливость третьей из формул (1.3) следует из того, что

$$\partial F_j^{\ k}/\partial x^k = F_j^{\ a} F_k^{-1m}\ \partial F_m^{\ k}/\partial x^a$$

Если воспользоваться законом сохранения массы $\rho\Delta=\rho_0$ (ρ, ρ_0 — плотность материала в актуальной и отсчетной конфигурации), то при $\rho_0=\mathrm{const}$ уравнение (1.2) можно записать

$$\frac{\partial(\rho F_j^{\ i})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v^k F_j^{\ i}-\rho v^i F_j^{\ k})}{\partial x^k}=0 \qquad (1.4)$$

С учетом (1.3) из (1.4) вытекает традиционная форма уравнения неразрывности $\partial\rho/\partial t+\partial(\rho v^k)/\partial x^k=0$.

Для описания поведения конечно-деформированных упругопластических сред градиент $F_j^{\ i}$ полной деформации обычно представляется в виде произведения градиентов упругой $E_m^{\ i}$ и пластической $P_j^{\ m}$ деформации [1, 3, 4]:

$$F_{\cdot j}^{\ i\cdot}=E_{\cdot m}^{\ i\cdot}P_{\cdot j}^{\ m\cdot} \qquad (1.5)$$

что соответствует введению «разгруженной» или «промежуточной» конфигурации помимо отсчетной и актуальной. Порядок следования градиентов $E_m^{\ i}$ и $P_j^{\ m}$ в композиции (1.5) не несет какого-либо физического содержания в существующих теориях, а выбирается обычно из соображений простоты математической теории. Например, в [4] уравнения формулировались исходя из разложения $F_j^{\ i}=P_m^{\ i}E_j^{\ m}$.

Из (1.5) и (1.1) следует, что

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j}=E_j^{-1a}\frac{dE_a^{\ i}}{dt}+E_a^{\ i}\frac{dP_b^{\ a}}{dt}P_m^{-1b}E_j^{-1m} \qquad (1.6)$$

Соотношения (1.5), (1.6) носят формальный характер, еще не связанный со свойствами среды.

2. Термодинамика и определяющие уравнения. Рассматривая только механическое и тепловое взаимодействия, закон сохранения полной энергии $\varepsilon=U+v_iv^i/2$ для случая безмоментной среды может быть записан в виде [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho\left(U+\frac{1}{2}v_iv^i\right)dV=\int\limits_S(\sigma^{ij}n_jv_i+q^in_i)\,dS+\int\limits_V \rho(r+b^iv_i)\,dV \qquad (2.1)$$

где U — плотность внутренней энергии, σ_{ij} — тензор напряжений Коши, n_j — внешняя нормаль к поверхности S, q^i — вектор потока тепла, b^i — массовая сила, r — удельное тепловыделение. Материальный объем V, рассматриваемый в (2.1), ограничен материальной поверхностью S, относительно которой нормальная составляющая скорости частиц равна нулю.

Из независимости (2.1) от выбора системы отсчета и закона сохранения массы $\rho\Delta=\rho_0$ в области гладких течений следуют уравнения

$$\begin{gathered}\rho\frac{dU}{dt}=\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j}+\frac{\partial q^i}{\partial x^i}+\rho r,\quad \sigma^{ij}=\sigma^{ji}\\ \rho\frac{dv^i}{dt}=\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j}+\rho b^i,\quad \frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial v^i}{\partial x^i}=0\end{gathered} \qquad (2.2)$$

Неравенство энтропии η (второй принцип термодинамики) будет использоваться в форме [2]:

$$\rho\eta^{\cdot}-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{\theta}q^i\right)-\frac{1}{\theta}\rho r\geqslant 0 \qquad (2.3)$$

В соотношении (2.3) и далее точка означает дифференцирование по t при $X^m=\mathrm{const}$, $\theta>0$ — абсолютная температура.

Далее будут рассматриваться материалы упруговязкопластического типа, обладающие чисто упругими свойствами внутри области, ограниченной поверхностью текучести, и вязкопластическими свойствами, зависящими от скорости деформирования, вне этой поверхности. Определяющие уравнения таких материалов для случая малых деформаций подробно рассматривались в [5, 6]. Постулируется, что независимыми переменными, полностью определяющими состояние среды, являются величины

$$\pi_\alpha=\{E_j^i, P_j^i, \chi, \theta\}, \quad g_i=\partial\theta/\partial x^i \tag{2.4}$$

где χ — параметр упрочнения, g_i — градиент температуры, и имеют место эволюционные, в общем случае неголономные соотношения

$$\begin{gathered} P_j^{\cdot i}=\Phi_j^i(\pi_\alpha), \quad \chi^{\cdot}=\Phi^\circ(\pi_\alpha) \quad \text{при } f(\pi_\alpha)\geqslant 0 \\ P_j^{\cdot i}=\chi^{\cdot}=0 \quad \text{при } f(\pi_\alpha)<0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $f(\pi_\alpha)=0$ — статическое условие пластичности, которое разделяет область упругих и пластических состояний. Тогда, вводя функцию свободной энергии $A=U-\theta\eta$, из (2.3) с учетом (2.2), (2.5) и кинематических соотношений (1.1), (1.6) получим

$$-\left(\rho\eta+\rho\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}+\left(\sigma_i^m E_m^{-1k}-\rho\frac{\partial A}{\partial E_k^i}\right)\frac{dE_k^i}{dt}+\left(F_a^{-1k}\sigma_b^a E_i^b-\rho\frac{\partial A}{\partial P_k^i}\right)\Phi_k^i-$$

$$-\rho\frac{\partial A}{\partial\chi}\Phi^\circ+\frac{1}{\theta}g^k q_k-\rho\frac{\partial A}{\partial g_i}\frac{dg_i}{dt}\geqslant 0$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial A}{\partial g_i}=0, \quad \eta=-\frac{\partial A}{\partial\theta}, \quad \sigma_j^i=\rho E_m^i\frac{\partial A}{\partial E_m^j}, \quad U=A-\theta\frac{\partial A}{\partial\theta} \tag{2.6}$$

$$\delta=\tau_k^i\Phi_i^k+b\Phi^\circ+\frac{1}{\theta}q^k\frac{\partial\theta}{\partial x^k}\geqslant 0$$

$$\tau_i^k=F_a^{-1k}\sigma_b^a E_i^b-\rho\frac{\partial A}{\partial P_k^i}, \qquad b=-\rho\frac{\partial A}{\partial\chi} \tag{2.7}$$

На основе полученных формул и соотношений (2.2) неравенство энтропии приводится к равенству

$$\rho\eta^{\cdot}-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{\theta}q^i\right)=\frac{1}{\theta}(\delta+\rho r) \tag{2.8}$$

после чего уравнение (2.2) для внутренней энергии U записывается в виде уравнения для температуры

$$\rho c_F\theta^{\cdot}+\rho\theta\frac{\partial\eta}{\partial E_j^i}\frac{\partial v^i}{\partial x^k}E_j^k-\frac{\partial q^k}{\partial x^k}=\rho(r+r^{(p)})$$

$$r^{(p)}=\left(\frac{1}{\rho}\tau_j^i+\theta\frac{\partial^2 A}{\partial\theta\,\partial P_i^j}\right)\Phi_i^j+\frac{1}{\rho}\left(b+\theta\frac{\partial b}{\partial\theta}\right)\Phi^\circ-$$

$$-\frac{\theta}{\rho}P_m^{-1j}\frac{\partial\sigma_a^m}{\partial\theta}E_i^a\Phi_j^i, \qquad c_F=\theta\frac{\partial\eta}{\partial\theta}=\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

где $r^{(p)}$ — объемный источник тепла за счет работы на пластических деформациях, c_F — удельная теплоемкость при постоянных деформациях.

3. Полная система уравнений. Замкнутая система уравнений, описывающая поведение упруговязкопластической среды в областях гладких течений, может быть представлена теперь таким образом:

$$c_F \frac{d\theta}{dt} + \theta E_j^{\ k} \frac{\partial \eta}{\partial E_j^{\ i}} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q^k}{\partial x^k} = r + r^{(p)}$$

$$\rho \frac{dv^i}{dt} - \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = \rho b^i$$

$$\frac{dE_j^{\ i}}{dt} - E_j^{\ k} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} = -E_k^{\ i} \Phi_m^{\ k} P_j^{-1m}, \qquad \frac{dP_j^{\ i}}{dt} = \Phi_j^{\ i}, \qquad \frac{d\chi}{dt} = \Phi^\circ \tag{3.1}$$

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(\pi_\alpha), \quad \eta = \eta(\pi_\alpha), \quad q^i = q^i(\pi_\alpha, \partial\theta/\partial x^k)$$

$$E_j^{\ i} = E_m^{\ i} P_j^{\ m}, \quad \Phi_j^{\ i} = \Phi_j^{\ i}(\pi_\alpha), \quad \Phi^\circ = \Phi^\circ(\pi_\alpha), \quad \pi_\alpha = (E_j^{\ i}, P_j^{\ i}, \chi, \theta)$$

или в матричном виде

$$\frac{du_\alpha}{dt} + A_{\alpha\beta}^{\ \ k} \frac{\partial u_\beta}{\partial x^k} = f_\alpha \quad {\scriptstyle (\alpha,\beta=1,2,\ldots,23;\ k=1,2,3)}, \qquad u_\alpha = (\theta, v^i, E_j^{\ i}, P_j^{\ i}, \chi) \tag{3.2}$$

$$f_\alpha = \{(r + r^{(p)})/c_F,\ b^i,\ -E_k^{\ i} \Phi_m^{\ k} P_j^{-1m},\ \Phi_j^{\ i},\ \Phi^\circ\}$$

Система (3.1) может быть записана в виде системы дифференциальных законов сохранения в переменных t, x^k:

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\varepsilon v^k - \sigma^{ik} v_i - q^k)}{\partial x^k} = \rho(r + b^i v_i)$$

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i v^k - \sigma^{ik})}{\partial x^k} = \rho b^i \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial(\rho F_j^{\ i})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^k F_j^{\ i} - \rho v^i F_j^{\ k})}{\partial x^k} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho P_j^{\ i})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^k P_j^{\ i})}{\partial x^k} = \rho \Phi_j^{\ i}, \qquad \frac{\partial(\rho\chi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^k \chi)}{\partial x^k} = \rho\Phi^\circ$$

Первые два уравнения (3.3) представляют собой дифференциальные законы сохранения полной энергии и импульса. Третье уравнение является законом сохранения совместности полных деформаций и скоростей (1.4). Два последних дивергентных соотношения (3.3) получаются после умножения на ρ определяющих соотношений (2.5) и сложения с уравнением неразрывности, умноженным на $P_j^{\ i}$ или χ.

Следует заметить, что для системы уравнений упругопластической среды, нечувствительной к скорости деформирования в пластическом состоянии, набор независимых дивергентных форм исчерпывается первыми тремя законами сохранения из системы (3.3). Реологические соотношения для таких теорий имеют вид

$$P_j^{\cdot i} = \Phi_j^{\ i}(E_n^{\ m}, P_n^{\ m}, \chi, \theta, E_n^{\cdot m}, \theta^\cdot), \qquad \chi^\cdot = \Phi^\circ(E_n^{\ m}, P_n^{\ m}, \chi, \theta, E_n^{\cdot m}, \theta^\cdot)$$

и для существующих теорий течения в принципе неприводимы к дивергентной форме. Следовательно, для них неприменимо понятие обобщенного, или слабого решения [7], и отсутствует замкнутая теория разрывов.

Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим изотермические уравнения Прандтля — Рейсса при условии пластичности Мизеса [1]: $s_{ij}s^{ij} = 2k^2$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - {}^1/_3 \sigma_k^{\ k} \delta_{ij}$ (k=const) для случая одной пространственной переменной $x = x^1$ и малых деформаций изотропной среды

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial t}=K\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\left(\frac{4}{3}\mu-\varkappa s^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\varkappa\tau s\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}=-\varkappa\tau s\frac{\partial u}{\partial x}+(\mu-\varkappa\tau^2)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$u=v^1, \quad v=v^2, \quad v^3\equiv 0, \quad p={}^1/{}_3\sigma_k^{\ k}, \quad s=s^{11}, \quad \tau=s^{12}, \quad K=\lambda+{}^2/{}_3\mu$$

где K — объемный модуль сжатия, определяемый через константы Ламе λ и μ, входящие в закон Гука. Величина $\varkappa=\sqrt{\mu}/k$ в пластичности, $\varkappa=0$ в упругости. В матричной форме система (3.4) записывается в виде

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}=D_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial x} \quad (\alpha,\beta=1,2,\ldots,5), \qquad u_\alpha=(u, v, p, s, \tau) \tag{3.5}$$

$$D_{13}=D_{14}=D_{25}=1/\rho, \quad D_{31}=K, \quad D_{41}=4\mu/3-\varkappa s^2, \quad D_{51}=D_{42}=-\varkappa\tau s,$$
$$D_{52}=\mu-\varkappa\tau^2 \tag{3.6}$$

где остальные $D_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}=0$. Нетрудно получить, что $\det \mathbf{D}=0$. Предположим теперь, что система (3.5) может быть записана в дивергентной форме. Это означает, что существует пять независимых функций $\varphi_\alpha(u_\beta, x, t)$ и $\psi_\alpha(u_\beta, x, t)$, таких, что

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5)}{\partial(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)}\neq 0 \tag{3.7}$$

Дифференцируя $\varphi_\alpha(u_\beta(x,t), x, t)$ и $\psi_\alpha(u_\beta(x,t), x, t)$ как сложные функции, находим

$$\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_\gamma}+\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_\beta}D_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}=0 \tag{3.8}$$

Соотношения (3.8) являются необходимым условием существования дивергентных форм (3.7).

Дифференцируя (3.8) по u_λ, получим

$$\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial u_\gamma\,\partial u_\lambda}+\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_\beta}\frac{\partial D_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}}{\partial u_\lambda}+\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial u_\gamma\,\partial u_\lambda}D_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}=0 \tag{3.9}$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial u_\lambda\,\partial u_\gamma}+\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_\beta}\frac{\partial D_{\beta\cdot}^{\cdot\lambda}}{\partial u_\gamma}+\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial u_\lambda\,\partial u_\gamma}D_{\beta\cdot}^{\cdot\lambda}=0 \tag{3.10}$$

Если $\psi_\alpha(u_\beta, x, t)$ существует и является дважды непрерывно дифференцируемой, то $\partial^2\psi_\alpha/\partial u_\gamma\partial u_\lambda=\partial^2\psi_\alpha/\partial u_\lambda\partial u_\gamma$. Вычитая (3.10) из (3.9), будем иметь

$$\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial u_\beta\,\partial u_\mu}(D_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\delta_\mu^{\ \lambda}-D_{\beta\cdot}^{\cdot\lambda}\delta_\mu^{\ \gamma})=\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_\beta}\left(\frac{\partial D_{\beta\cdot}^{\cdot\mu}}{\partial u_\lambda}-\frac{\partial D_{\beta\cdot}^{\cdot\lambda}}{\partial u_\mu}\right) \tag{3.11}$$

Обозначим

$$Q_{\beta\mu}^{\ \ \gamma\lambda}=D_\beta^{\ \gamma}\delta_\mu^{\ \lambda}-L_\beta^{\ \lambda}\delta_\mu^{\ \gamma}, \qquad y^{\beta\mu}=\partial^2\varphi_\alpha/\partial u_\beta\partial u_\mu$$
$$R^{\mu\lambda}=(\partial\varphi_\alpha/\partial u_\beta)(\partial D_\beta^{\ \mu}/\partial u_\lambda-\partial D_\beta^{\ \lambda}/\partial u_\mu)$$

Индекс α несуществен. Формулу (3.11) перепишем в виде

$$Q_b^{\ a}y^b=R^a \quad (a, b=1, 2, \ldots, 25) \tag{3.12}$$

Будем рассматривать (3.12) как систему линейных уравнений относительно неизвестных величин $y^b \equiv y^{\beta\mu}$ (β, $\mu=1, 2, \ldots, 5$; $b=1, 2, \ldots, 25$). Матрица коэффициентов $Q_b{}^a$ является вырожденной. В самом деле, столбец матрицы коэффициентов $Q_b{}^a$, соответствующий $\beta=3$, $\mu=1$, имеет вид $D_3{}^\gamma \delta_1{}^\lambda - D_3{}^\lambda \delta_1{}^\gamma$, откуда с учетом (3.6) видно, что он тождественно равен нулю при всех γ, λ. Следовательно, система (3.12) может иметь нетривиальное решение только в двух случаях: правая часть (3.12) тождественно равна нулю; левый нуль-вектор матрицы $Q_b{}^a$ ортогонален $R^a \neq 0$.

В первом случае из условия $R^a \equiv 0$ следует

$$(\partial\varphi_\alpha/\partial u_\beta)\,(\partial D_\beta{}^\lambda/\partial u_\gamma - \partial D_\beta{}^\gamma/\partial u_\lambda) = 0$$

Так как $D_\beta{}^\gamma = D_\beta{}^\gamma(u_4, u_5) = D_\beta{}^\gamma(s, \tau)$, то разность $(\partial D_\beta{}^\lambda/\partial u_\gamma - \partial D_\beta{}^\gamma/\partial u_\lambda)$ отлична от нуля только при $\beta=4{,}5$; $\lambda=1{,}2$, $\gamma=4{,}5$ и $\lambda=4{,}5$, $\gamma=1{,}2$. Таким образом получаем систему уравнений

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial s}\left(\frac{\partial D_4{}^\lambda}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial D_4{}^\gamma}{\partial u_\lambda}\right) + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\tau}\left(\frac{\partial D_5{}^\lambda}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial D_5{}^\gamma}{\partial u_\lambda}\right) = 0$$

$$(\lambda,\ \gamma = 1,4;\ 1,5;\ 2,4;\ 2,5;\ 4,1;\ 4,2;\ 5,1;\ 5,2)$$

откуда следует, что

$$\partial\varphi_\alpha/\partial s = 0, \qquad \partial\varphi_\alpha/\partial\tau = 0 \tag{3.13}$$

Рассмотрим второй случай. Обозначим $x_{\gamma\lambda}$ — левую нуль-матрицу тензора $Q_{\beta\mu}{}^{\gamma\lambda}$, такую, что $x_{\gamma\lambda} Q_{\beta\mu}{}^{\gamma\lambda} y^{\beta\mu} = x_{\gamma\lambda} R^{\gamma\lambda} = 0$ (γ, λ, β, $\mu = 1, 2, \ldots, 5$).

В силу антисимметричности тензоров $Q_{\beta\mu}{}^{\gamma\lambda} = -Q_{\beta\mu}{}^{\lambda\gamma}$, $R^{\gamma\lambda} = -R^{\lambda\gamma}$ матрица $x_{\gamma\lambda}$ определена с точностью до симметричного слагаемого

$$x_{\gamma\lambda} Q_{\beta\mu}{}^{\gamma\lambda} = x_{\gamma\lambda} D_\beta{}^\gamma \delta_\mu{}^\lambda - x_{\gamma\lambda} D_\beta{}^\lambda \delta_\mu{}^\gamma = (x_{\gamma\mu} - x_{\mu\gamma}) D_\beta{}^\gamma = 0$$

Если обозначить $z_{\gamma\mu} = x_{\gamma\mu} - x_{\mu\gamma}$ и воспользоваться конкретным видом (3.6) матрицы $D_\beta{}^\lambda$, то получим: $z_{\gamma 1}=0$, $z_{\gamma 2}=0$, $z_{\gamma 5}=0$, $z_{\gamma 3}+z_{\gamma 4}=0$ ($\gamma=1, 2, \ldots, 5$), и условие ортогональности $x_{\gamma\lambda} R^{\gamma\lambda} = 0$ примет вид

$$z_{\gamma 3}\left\{\left(\frac{\partial D_\beta{}^3}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial D_\beta{}^\gamma}{\partial u_3}\right) - \left(\frac{\partial D_\beta{}^4}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial D_\beta{}^\gamma}{\partial u_4}\right)\right\}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_\beta} = 0$$

Учитывая, что $\mathbf{D} = \mathbf{D}(s, \tau)$, имеем $z_{\gamma 3}(\partial D_\beta{}^\gamma/\partial s)(\partial\varphi_\alpha/\partial u_\beta) = 0$, откуда в силу произвольности $z_{\gamma 3}$ снова следуют соотношения (3.13).

Таким образом, необходимые условия существования дивергентных форм уравнений (3.4) имеют вид (3.13), при которых якобиан (3.7) обращается в нуль. Это означает, что система уравнений упругопластической среды, нечувствительной к скорости деформаций, даже в случае малых деформаций не может быть записана полностью в дивергентном виде, в отличие от пластической среды со скоростным упрочнением.

Сформулируем теперь полную систему дивергентных уравнений рассматриваемой упруговязкопластической среды в подвижных криволинейных координатах $t = t$; $\eta^i = \eta^i(x^m, t)$. Данное преобразование будем считать взаимно-однозначным, дважды непрерывно дифференцируемым.

Использование подвижных координат наряду с чисто математическими аспектами имеет важное значение для численных методов, легко применимых при расчете областей с криволинейными подвижными границами.

Пусть в переменных (t, x^i) имеет место тензорное уравнение

$$\frac{\partial A^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}}{\partial t} + \frac{\partial B^{k j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}}{\partial x^k} = f^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N} \quad (R \geqslant 0,\ N \geqslant 0;\ i_m, j_m, k = 1, 2, 3) \tag{3.14}$$

Если обозначить

$$\eta_m{}^k = \frac{\partial\eta^k}{\partial x^m}, \quad w^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{\eta^m}, \quad w_0{}^i = w^k \eta_k{}^i, \quad \Delta_0 = \det\left\|\frac{\partial x^i}{\partial\eta^j}\right\|$$

то в переменных (t, η^m) уравнение (3.14) запишется в виде

$$\frac{\partial(\Delta_0 A^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N})}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta_0 B_0{}^{k j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N})}{\partial \eta^k} = \Delta_0 f^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N},$$
$$B_0{}^{k j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N} = \eta^k_m (B^{m j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N} - w^m A^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}) \tag{3.15}$$

Доказательство следует из цепочки преобразований, где для краткости опущены индексы i_m, j_m:

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{x^k} + \frac{\partial B^m}{\partial x^m} = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{x^k} + \frac{\partial}{\partial x^m}\left\{A w^m + B_0{}^k \frac{\partial x^m}{\partial \eta^k}\right\} =$$
$$= \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{x^k} + w^m \frac{\partial A}{\partial x^m} + \frac{\partial w^m}{\partial x^m} A + \frac{\partial B_0{}^k}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial \eta^k} + B_0{}^k \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial \eta^k} =$$
$$= \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{\eta^a} + \frac{\partial B_0{}^k}{\partial \eta^k} + A\frac{\partial w^m}{\partial x^m} + B_0{}^k \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial \eta^k}$$

Принимая во внимание формулы

$$\frac{\partial w^a}{\partial x^a} = \frac{1}{\Delta_0}\left.\frac{\partial \Delta_0}{\partial t}\right|_{\eta^b}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial x^a}{\partial \eta^m} = \frac{1}{\Delta_0}\frac{\partial \Delta_0}{\partial \eta^m}$$

которые выводятся аналогично (1.3), придем к соотношениям (3.15).

Следует подчеркнуть, что компоненты тензоров **A** и **B** используемые в (3.15), относятся к эйлеровой системе координат x^i. Такой подход обеспечивает в случае отсутствия источников $(f=0)$ в исходном уравнении (3.14) их отсутствие в (3.15).

С учетом изложенного выше получаем

$$\frac{\partial(\Delta_0\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta^m}\left\{\Delta_0\rho\left(\varepsilon(v_0{}^m - w_0{}^m) - \frac{1}{\rho}\sigma^{ik} v_i \eta_k{}^m - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{\rho} q^k \eta_k{}^m\right)\right\} = \Delta_0\rho(r + b^i v_i)$$
$$\frac{\partial(\Delta_0\rho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta^m}\left\{\Delta_0\rho\left(v^i(v_0{}^m - w_0{}^m) - \frac{1}{\rho}\sigma^{ik}\eta_k{}^m\right)\right\} = \Delta_0\rho b^i \tag{3.16}$$
$$\frac{\partial(\Delta_0\rho F_j{}^i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta^m}\{\Delta_0\rho(F_j{}^i(v_0{}^m - w_0{}^m) - v^i F_j{}^k \eta_k{}^m)\} = 0$$
$$\frac{\partial(\Delta_0\rho P_j{}^i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta^m}\{\Delta_0\rho(v_0{}^m - w_0{}^m) P_j{}^i\} = \Delta_0\rho\Phi_j{}^i$$
$$\frac{\partial(\Delta_0\rho\chi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta^m}\{\Delta_0\rho(v_0{}^m - w_0{}^m)\chi\} = \Delta_0\rho\Phi^\circ$$
$$v_0{}^m = v^k \eta_k{}^m, \qquad w_0{}^m = w^k \eta_k{}^m$$

Система (3.16) просто выглядит в случае лагранжевых координат X^k, когда $w^i = v^i$, $\Delta_0\rho = \rho_0$, $\eta_k{}^m = F_k{}^{-1m}$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial X^m}\left\{\frac{1}{\rho} F_k^{-1m} (\sigma^{ki} v_i + q^k)\right\} = r + b^i v_i$$
$$\frac{\partial v^i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial X^m}\left\{\frac{1}{\rho} F_k{}^{-1m} \sigma^{ik}\right\} = b^i \tag{3.17}$$
$$\frac{\partial F_j{}^i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial X^m}\{v^i \delta_j{}^m\} = 0, \qquad \frac{\partial P_j{}^i}{\partial t} = \Phi_j{}^i, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \Phi^\circ$$

4. Характеристики. Рассмотрим в адиабатическом приближении ($q^i=0$) характеристические свойства системы (3.1), являющейся в этом случае квазилинейной. Пусть $\varphi(t, x^i)=0$ — уравнение характеристической поверхности $D=-(\partial\varphi/\partial t)/[(\partial\varphi/\partial x^m)(\partial\varphi/\partial x^m)]^{1/2}$; $n_i=(\partial\varphi/\partial x^i)/[(\partial\varphi/\partial x^m)\times\times(\partial\varphi/\partial x^m)]^{1/2}$ — скорость распространения и пространственная единичная нормаль к поверхности, $c=D-v^in_i$ — скорость распространения поверхности относительно частиц среды. Тогда для системы (3.1) или (3.2) имеет место равенство [7]:

$$\det\|-c\mathbf{I}+\mathbf{A}^kn_k\|=0 \tag{4.1}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Пусть $p_\alpha=\{\alpha, \beta_i, \gamma_i^j, \lambda_i^j, \zeta\}$ ($i, j=1, 2, 3$; $\alpha=1, 2, \ldots, 23$) — правый собственный вектор матрицы $\mathbf{A}^kn_k$, фактически представляющий собой скачок нормальных к $\varphi=0$ производных, которые могут терпеть разрыв на характеристической поверхности. Тогда в развернутом виде система $(-c\mathbf{I}+\mathbf{A}^kn_k)$ записывается так:

$$\begin{gathered}-c\alpha+\frac{\theta}{c_F}E_j^k\frac{\partial\eta}{\partial E_j^i}n_k\beta^i=0,\qquad c\beta_i+E_a^kn_k\frac{\partial^2A}{\partial E_a^i\,\partial E_s^j}\gamma_s^j+\\+F_s^kn_k\frac{\partial}{\partial P_n^j}\left(P_a^{-1s}\frac{\partial A}{\partial E_a^i}\right)\lambda_n^j+E_a^kn_k\frac{\partial^2A}{\partial E_a^i\,\partial\chi}\zeta-E_a^kn_k\frac{\partial\eta}{\partial E_a^i}\alpha=0\\ c\gamma_i^j-E_i^kn_k\beta^j=0,\qquad c\lambda_i^j=0,\qquad c\zeta=0\end{gathered} \tag{4.2}$$

Нетрудно убедиться, что $c=0$ — корень уравнения (4.2). При этом получается, что $\beta^i=0$, т. е. нормальные производные скорости непрерывны на материальной поверхности, а на остальные скачки накладывается связь

$$\begin{gathered}E_a^kn_k\frac{\partial^2A}{\partial E_a^i\,\partial E_s^j}\gamma_s^j+F_s^kn_k\frac{\partial}{\partial P_n^j}\left(P_a^{-1s}\frac{\partial A}{\partial E_a^i}\right)\lambda_n^j+\\+E_a^kn_k\frac{\partial^2A}{\partial E_a^i\,\partial\chi}\zeta-E_a^kn_k\frac{\partial\eta}{\partial E_a^i}\alpha=0\end{gathered} \tag{4.3}$$

Если ранг матрицы коэффициентов системы трех уравнений (4.3) равен трем, то из (4.3) следует существование 17 линейно-независимых векторов p_α, соответствующих $c=0$.

Если $c\neq0$, то из (4.2) следует $\lambda_i^j=\zeta=0$, т. е. скачок нормальной производной пластического градиента и параметра упрочнения на движущейся относительно частиц характеристической поверхности равен нулю. Выражая α и γ_i^j через β_i и используя $\lambda_i^j=\zeta=0$, получим однородное линейное относительно β_i уравнение

$$\left\{c^2\delta_{ij}-E_a^kn_k\left(\frac{\partial^2A}{\partial E_a^i\,\partial E_b^j}+\frac{\theta}{c_F}\frac{\partial\eta}{\partial E_a^i}\frac{\partial\eta}{\partial E_b^j}\right)E_b^mn_m\right\}\beta^i=0$$

Нетривиальное решение этого уравнения существует, если

$$\det\left\{c^2\delta_{ij}-E_a^kn_k\left(\frac{\partial^2A}{\partial E_a^i\,\partial E_b^j}+\frac{\theta}{c_F}\frac{\partial\eta}{\partial E_a^i}\frac{\partial\eta}{\partial E_b^j}\right)E_b^mn_m\right\}=0 \tag{4.4}$$

Необходимым условием, вытекающим из (4.4), является положительная определенность квадратичной формы

$$(E_a^kn_k)\left(\frac{\partial^2A}{\partial E_a^i\partial E_b^i}+\frac{\theta}{c_F}\frac{\partial\eta}{\partial E_a^i}\frac{\partial\eta}{\partial E_b^j}\right)(E_b^mn_m)\lambda^i\lambda^j>0 \tag{4.5}$$

Отметим, что (4.5) в точности совпадает с необходимыми условиями гиперболичности в нелинейной теории термоупругости [2], если положить $\mathbf{P}=\mathbf{I}$, $\chi=0$.

Сформулируем достаточные условия гиперболичности, симметризовав исходную систему, что представляет самостоятельный интерес. Симметризация и достаточные условия гиперболичности для уравнений газовой динамики в адиабатическом приближении и уравнений линейной теории упругости с малыми деформациями рассматривались в [8].

Для приведения изучаемой системы к симметричному виду воспользуемся уравнениями (3.17) в лагранжевых координатах X^m. Получим как следствие этой системы уравнение (2.3) для энтропии, умножив первое уравнение (3.17) на неизвестный пока множитель α, второе — на β_i, третье — на γ_i^j, четвертое — на λ_i^j, пятое — на ζ и сложив все уравнения. В результате получим систему

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\beta_i\frac{\partial v^i}{\partial t}+\gamma_i^j\frac{\partial F_j^i}{\partial t}+\lambda_i^j\frac{\partial P_j^i}{\partial t}+\zeta\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{4.6}$$

$$(\tau_i^j\Phi_j^i+b\Phi^\circ+\rho r)/(\rho\theta)=\alpha r+\alpha b^i v_i+\beta_i b^i+\lambda_i^j\Phi_j^i+\zeta\Phi^\circ \tag{4.7}$$

$$\alpha\frac{\partial}{\partial X^m}\left\{\frac{1}{\rho}F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i\right\}+\beta_i\frac{\partial}{\partial X^m}\left\{\frac{1}{\rho}F_k^{-1m}\sigma^{ki}\right\}+\gamma_i^j\frac{\partial}{\partial X^m}\{v^i\delta_j^m\}=0$$

откуда находим (τ_j^i и b определены формулами (2.7))

$$\alpha=\frac{1}{\theta},\qquad \beta_i=-\frac{v_i}{\theta},\qquad \gamma_i^j=-\frac{1}{\rho\theta}\sigma_i^k F_k^{-1j},\qquad \lambda_i^j=\frac{\tau_i^j}{\rho\theta},\qquad \zeta=\frac{b}{\rho\theta} \tag{4.8}$$

Соотношения (4.6), (4.7) будут заведомо выполняться, если поставить более сильные условия

$$d\eta=\alpha d\varepsilon+\beta_i dv^i+\gamma_i^j dF_j^i+\lambda_i^j dP_j^i+\zeta d\chi$$

$$0=\alpha d\{F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i/\rho\}+\beta_i d\{F_k^{-1m}\sigma^{ki}/\rho\}+\gamma_i^j d\{v^i\delta_j^m\} \tag{4.9}$$

Из них второе выполняется тождественно, а первое — преобразуется к равенству $dA=\rho^{-1}\sigma_i^k F_k^{-1}\ dF_m^i-\eta d\theta$, эквивалентному формулам (2.6).

Переписывая (4.9) в форме

$$d(\alpha\varepsilon+\beta_i v^i+\gamma_i^j F_j^i+\lambda_i^j P_j^i+\zeta\chi-\eta)=\varepsilon d\alpha+v^i d\beta_i+F_j^i d\gamma_i^j+P_j^i d\lambda_i^j+\chi d\zeta$$

$$d(\alpha\rho^{-1}F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i+\beta_i\rho^{-1}F_k^{-1m}\sigma^{ki}+\gamma_i^j v^i\delta_j^m)=$$

$$=\rho^{-1}F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i\,d\alpha+\rho^{-1}F_k^{-1m}\sigma^{ik}\,d\beta_i+v^i\delta_j^m\,d\gamma_i^j$$

и обозначая

$$L^\circ=-d\varepsilon-\beta_i v^i-\gamma_i^j F_j^i-\lambda_i^j P_j^i-\zeta\chi=\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2}v_i v^i+\frac{1}{\rho}\sigma_k^k-\frac{1}{\rho}\tau_i^j P_j^i-A\right),$$

$$L^m=-\frac{1}{\rho\theta}\sigma_i^k F_k^{-1m}v^i \tag{4.10}$$

получим

$$\varepsilon=-\frac{\partial L^\circ}{\partial\alpha},\qquad v^i=-\frac{\partial L^\circ}{\partial\beta_i},\qquad F_j^i=-\frac{\partial L^\circ}{\partial\gamma_i^j},\qquad P_j^i=-\frac{\partial L^\circ}{\partial\lambda_i^j},\qquad \chi=-\frac{\partial L^\circ}{\partial\zeta}$$

$$\frac{1}{\rho}F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i=-\frac{\partial L^m}{\partial\alpha},\qquad \frac{1}{\rho}F_k^{-1m}\sigma^{ki}=\frac{\partial L^m}{\partial\beta_i},\qquad v^i\delta_j^m=\frac{\partial L^m}{\partial\gamma_i^j} \tag{4.11}$$

Соотношения (4.11) позволяют записать систему (3.1) в симметричном виде

$$\frac{\partial L^\circ_{q_\alpha}}{\partial t}+\frac{\partial L^m_{q_\alpha}}{\partial X^m}=L^\circ_{q_\alpha q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial t}+L^m_{q_\alpha q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial X^m}=f_\alpha \tag{4.12}$$

$$q_\alpha=(\alpha,\beta_i,\gamma_i^j,\lambda_i^j,\zeta),\qquad L^{\circ;m}_{q_\alpha}=\partial L^{\circ,m}/\partial q_\alpha,\qquad L^{\circ;m}_{q_\alpha q_\beta}=\partial^2 L^{\circ,m}/\partial q_\alpha\,\partial q_\beta$$

Если матрица $L^0_{q_\alpha q_\beta}$ положительно-определенная, то существует невырожденное преобразование, одновременно приводящее симметричные матрицы $L^0_{q_\alpha q_\beta}$ и $L^m_{q_\alpha q_\beta} n_m$ к диагональному виду, и, следовательно, система уравнений (4.12) в этом случае заведомо гиперболическая.

Условие положительной определенности матрицы $L^0_{q_\alpha q_\beta}$ эквивалентно условию выпуклости $L^\circ(q_\alpha)$ относительно всех своих аргументов. Пользуясь свойством выпуклых функций, в силу которого функция $M(1/q_1, q_2/q_1, \ldots, q_n/q_1) = L^\circ(q_1, q_2, \ldots, q_n)/q_1$ является выпуклой [8], с учетом (4.10) находим, что

$$M\left(\theta, v_i, \frac{1}{\rho}\sigma_i^m F_m^{-1j}, \frac{1}{\rho}\tau_i^j, \frac{1}{\rho}b\right) = \frac{1}{2}v_i v^i + \frac{1}{\rho}\sigma_m{}^m - \frac{1}{\rho}\tau_i^j P_j^i - \frac{1}{\rho}b\chi - A$$

будет также выпуклой. Вычисляя преобразование Лежандра от функции M, получим, что свойством выпуклости по своим аргументам должна обладать и функция

$$H(\eta, v_i, F_j^i, P_j^i, \chi) = q_\alpha M_{q_\alpha} - M(q_\beta) = U + {}^1/_2 v_i v^i$$

Так как U не зависит от v_i, то окончательным условием выпуклости $L^\circ(q_\alpha)$ будет условие выпуклости функции внутренней энергии по своим аргументам

$$(\partial^2 U/\partial g_\alpha \partial g_\beta)\lambda^\alpha\lambda^\beta > 0, \quad \forall\lambda^\alpha \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 23),$$
$$g_\alpha = \{E_j^i, P_j^i, \chi, \eta\}, \quad F_j^i = E_m^i P_j^m \tag{4.13}$$

Неравенство (4.13) существенно более сильное по сравнению с необходимым условием (4.5) и является только достаточным условием гиперболичности рассматриваемой системы уравнений упруговязкопластического тела.

5. Сильные разрывы. Система уравнений (3.3) позволяет ввести понятие обобщенного или слабого решения [7] в области, где имеются поверхности разрыва, и получить замкнутую систему соотношений на скачках, не вводя дополнительных предположений.

Пусть $\varphi(t, x^i) = 0$ — уравнение гладкой поверхности, на которой решение терпит разрыв. Введем обозначения: $D = -(\partial\varphi/\partial t)/[(\partial\varphi/\partial x^m)(\partial\varphi/\partial x^m)]^{1/2}$, $n_i = (\partial\varphi/\partial x^i)/[(\partial\varphi/\partial x^m)(\partial\varphi/\partial x^m)]^{1/2}$, где D — скорость распространения поверхности разрыва относительно системы x^i, n_i — нормаль к поверхности $\varphi = 0$.

Величина $G = D - v^i n_i$ является скоростью распространения поверхности относительно частиц среды. Тогда из (3.3) стандартным образом [7] следуют уравнения для скачков

$$[\rho G\varepsilon] + [\sigma^{ik} v_i] n_k + [q^k] n_k = 0, \quad [\rho G v^i] + [\sigma^{ik}] n_k = 0$$
$$[\rho G F_j^i] + [\rho v^i F_j^k] n_k = 0, \quad [\rho G P_j^i] = 0, \quad [\rho G \chi] = 0 \tag{5.1}$$

где $[a]$ — скачок величины a. Свертывая уравнение для скачка F_j^i с n_i, получим для нестационарных разрывов ($D \neq 0$):

$$[\rho F_j^k n_k] = 0 \tag{5.2}$$

Соотношение (5.2) выражает непрерывность нормали $\mathbf{n}_\varkappa$ в отсчетной конфигурации.

Из (5.1), (5.2) следует непрерывность потока массы

$$[\rho G] = 0 \tag{5.3}$$

получаемая обычно из уравнения неразрывности [1]. Чтобы показать это, введем на поверхности разрыва криволинейные координаты ξ^α ($\alpha = 1, 2$), идентифицирующие точки поверхности. Пусть $x^i = x^i(X^m(\xi^\alpha, t), t)$ — радиус-вектор какой-либо фиксированной точки ξ^α. Тогда

$$D^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{\xi^\alpha} = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{X^m} + \left.\frac{\partial x^i}{\partial X^m}\frac{\partial X^m}{\partial t}\right|_{\xi^\alpha} = v^i + F_k{}^i c_\varkappa{}^k, \qquad c_\varkappa{}^k = \left.\frac{\partial X^k}{\partial t}\right|_{\xi^\alpha}$$

где $c_\varkappa{}^k$ — скорость поверхности относительно отсчетной конфигурации, величина определенная на поверхности разрыва. Отсюда

$$[\rho G] = [\rho(D^i - v^i)n_i] = [\rho F_k{}^i n_i c_\varkappa{}^k] = \rho F_k{}^i n_i [c_\varkappa{}^k] = 0$$

Формулы (5.2), (5.3) дают возможность переписать уравнение для скачка $F_j{}^i$ в виде

$$[F_j{}^i] = h^i \rho F_j{}^k n_k, \qquad h^i = -[v^i]/(\rho G) \tag{5.4}$$

после чего оставшиеся уравнения (5.1) принимают форму

$$\begin{gathered} \rho G\{[U] - {}^1/_2(\sigma_i{}^k + \sigma_i{}^{k\vee})h^i n_k\} + [q^k]n_k = 0 \\ [\sigma^{ik}]n_k - (\rho G)^2 h^i = 0, \quad \rho G[P_j{}^i] = 0, \quad \rho G[\chi] = 0 \end{gathered} \tag{5.5}$$

На контактном разрыве ($G = 0$) имеет место $[v^i] = 0$, $[\sigma^{ik}]n_k = 0$, $[q^k]n_k = 0$. Величины $[F_j{}^i]$, $[P_j{}^i]$, $[\chi]$ и $[U]$ являются произвольными.

На ударной волне ($G \neq 0$) пластический градиент $P_j{}^i$ и параметр упрочнения χ непрерывны, а все остальные величины терпят разрыв. В частности, (5.2) и (5.4) принимают форму

$$[E_j{}^i] = h^i \rho E_j{}^k n_k, \qquad [\rho E_j{}^k n_k] = 0 \tag{5.6}$$

Рассмотрим теперь в адиабатическом приближении ($q^i \equiv 0$) такую задачу. Пусть известно состояние среды, т. е. величины $E_j{}^{i\vee}$, $P_j{}^{i\vee}$, $\chi^\vee$, $\eta^\vee$ перед фронтом ударной волны с заданной скоростью движения G. Требуется найти необходимые условия, при которых определено состояние среды $E_j{}^i = E_j{}^{i\vee} + h^i \rho E_j{}^k n_k$, $P_j{}^i = P_j{}^{i\vee}$, $\chi = \chi^\vee$, $\eta = \eta^\vee + \tau$, $\tau = [\eta]$ за фронтом.

Будем рассматривать два первых соотношения (5.5) как систему уравнений относительно неизвестных h^i и τ:

$$\begin{gathered} \Psi^\circ(h^m, \tau) = U(E_n{}^{m\vee} + h^m \rho E_n{}^k n_k, P_n{}^{m\vee}, \chi^\vee, \eta^\vee + \tau) - \\ - U(E_n{}^{m\vee}, P_n{}^{m\vee}, \chi^\vee, \eta^\vee) - {}^1/_2 n_k h^i \{\sigma^{ki}(E_n{}^{m\vee} + \\ + h^m \rho E_n{}^a n_a, P_n{}^{m\wedge}, \chi^\wedge, \eta^\wedge + \tau) + \sigma_i{}^k(E_n{}^{m\wedge} P_n{}^{m\wedge}, \chi^\wedge, \eta^\wedge)\} = 0, \\ \Psi^i(h^m, \tau) = n_k\{\sigma^{ki}(E_n{}^{m\wedge} + h^m \rho E_n{}^a n_a, \\ P_n{}^{m\vee}, \chi^\vee, \eta^\vee + \tau) - \sigma^{ki}(E_n{}^{m\vee}, P_n{}^{m\vee}, \chi^\vee, \eta^\vee)\} - m^2 h^i = 0 \end{gathered} \tag{5.7}$$

где $m^2 = (\rho G^2)$. В соответствии с теоремой существования неявных функций для однозначной разрешимости системы (5.7) кроме предположений гладкости требуется отличие от нуля якобиана

$$\partial(\Psi^1, \Psi^2, \Psi^3, \Psi^\circ)/\partial(h^1, h^2, h^3, \tau) \neq 0 \tag{5.8}$$

Вычисляя производные, входящие в (5.8), и пользуясь соотношением $\partial\Psi^\circ/\partial h^j + {}^1/_2 h_i \partial\Psi^i/\partial h^j = 0$, неравенство (5.8) можно записать в форме

$$\theta \det\left\| m^2\delta_{ij} - (\rho E_a{}^k n_k)\frac{\partial^2 U}{\partial E_a{}^i\, \partial E_b{}^j}(\rho E_b{}^m n_b)\right\| \neq 0 \tag{5.9}$$

Сравнивая (5.9) с (4.4), находим, что этим условием является $G \neq c$, т. е. скорость ударной волны не должна равняться скорости распространения характеристической поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1. 535 с. Т. 2. 573 с.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. *Lee E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, No. 1, p. 1–16.— Рус. перев.: Тр. Амер. о-ва инж. механ. Сер. Е. Прикл. механика, 1969, № 1, с. 1–8.
4. *Kondaurov V. I. Kukudjanov V. N.* On constitutive equations and numerical solution of the multidimensional problems of the dynamics of nonisothemic elastic-plastic media with finite deformations.— Arch. Mech., 1979, No. 5, p. 623–647.
5. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
6. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
8. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.V.1980