**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1982**

УДК 531.383

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ПЛАСТИНАМИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ В НЬЮТОНОВСКОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

НАБИУЛЛИН М. К.

Прямым методом Ляпунова с применением теорем [1–3] и на основе идеи введения интегральных характеристик движения сплошных сред, предложенных в работе [4] при исследовании задач устойчивости движения сложных систем по отношению к части переменных, получены и проанализированы достаточные условия устойчивости семейства положений относительного равновесия механической системы, состоящей из гиростата и одной пары прямоугольных упругих пластин, симметрично защемленных в его корпусе.

При исследовании предполагается, что движение центра масс системы происходит по кеплеровой круговой орбите в ньютоновском центральном поле сил.

Устойчивость стационарных движений сложных механических систем с жидкостью и упругими стержнями, с прямоугольными панелями и пластинами изучалась в [1, 2, 4–14]. В работе [9] с использованием теорем [1–3] и введением интегральных характеристик [4] получены достаточные условия устойчивости стационарного движения гиростата с двумя парами прямоугольных упругих пластин, напряженное и деформированное состояние которых построено на основе гипотез Кирхгофа – Лява [15, 16].

1. Выделим стационарные движения механической системы, состоящей из гиростата и одной пары прямоугольных пластин, симметрично защемленных в корпусе гиростата в ньютоновском центральном поле сил. Для этого воспользуемся системами координат и обозначениями, введенными в [9], и проанализируем уравнения, получаемые приравниванием нулю первой вариации интеграла типа Якоби H.

Три группы уравнений, а также геометрические и естественные граничные условия, записанные в [9] для отыскания стационарных движений, в случае гиростата с одной парой упругих пластин ($v_j\equiv0$, $\rho_2\equiv0$, $j=3,4$ — вторая пара отсутствует) допускают два класса решений.

При этом первый класс решений определяется соотношениями

$$\omega_s=0 \ {}_{(s=1,2,3)}, \quad w_i\equiv0 \ {}_{(i=1,2)}, \quad \psi_0=0, \quad \theta_0=\pi/2, \quad \varphi=\varphi_0, \quad k_3=0 \qquad (1.1)$$

Значения кинетических моментов k_1, k_2 и угла φ_0 должны удовлетворять уравнению

$$(A_1-A_2)\,\omega_0^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0+(k_1\cos\varphi_0-k_2\sin\varphi_0)\,\omega_0=0$$

в которых две из величин k_1, k_2, φ_0 могут быть произвольными.

Решению (1.1) соответствует семейство положений равновесия рассматриваемой механической системы в орбитальной системе осей координат $Cx_1x_2x_3$. В невозмущенном движении пара пластин недеформирована и ее срединная плоскость ортогональна к радиусу орбиты. Одна из главных центральных осей инерции системы, ортогональная к срединной плоскости пары пластин, направлена по радиусу орбиты (ось y_3 коллинеарна оси $-x_2$), а две из них лежат в плоскости касательной и бинормали к траектории движения центра масс системы (оси y_1 и y_2 лежат в плоскости Cx_1x_3, образуя угол φ_0 с осями x_1, x_3 соответственно).

Второй класс решений определяется соотношениями

$$\omega_s=0 \ _{(s=1,\,2,\,3)}, \quad w_i\equiv 0 \ _{(i=1,\,2)}, \quad \psi_0=\theta_0=\pi/2, \quad \varphi=\varphi_0, \quad k_3=0 \qquad (1.2)$$

Значения кинетических моментов k_1, k_2 и угла φ_0 должны удовлетворять уравнению

$$4\omega_0^2(A_2-A_1)\sin\varphi_0\cos\varphi_0-\omega_0(k_1\cos\varphi_0-k_2\sin\varphi_0)=0$$

Решению (1.2) соответствует семейство положений относительного равновесия механической системы. В невозмущенном движении пара пластин недеформирована и ее срединная плоскость ортогональна касательной к траектории центра масс. Ось y_3, ортогональная к срединной плоскости пластин, направлена по касательной к траектории (коллинеарна оси x_1), а оси y_1 и y_2 лежат в плоскости главной нормали и бинормали Cx_2x_3, образуя постоянный угол φ_0 с осями x_2 и x_3.

Отметим, что стационарные движения типа (1.1) и (1.2) возможны лишь при отличных от нуля постоянных кинетических моментах k_1 и k_2.

Наличие в системе маховиков, как и в случае гиростата без деформируемых элементов, расширяет семейство стационарных движений гиростата с одной парой упругих пластин.

В частности, при $\sin\varphi_0=0$ $(\varphi_0=0)$ и $\cos\varphi_0=0$ $(\varphi_0=\pi/2)$ из (1.1) и (1.2) получим решения, соответствующие положениям относительного равновесия. При этом главные центральные оси инерции механической системы будут коллинеарны осям орбитальной системы координат. Произвольный кинетический момент направлен по нормали к плоскости орбиты.

2. Для исследования устойчивости полученных стационарных движений рассмотрим условия знакоопределенности второй вариации интеграла H, вычисленного вдоль невозмущенных движений (1.1) и (1.2) соответственно.

Вторая вариация интеграла H для решений (1.1) и (1.2) в возмущенном движении равна сумме вторых вариаций кинетической энергии $\delta^2 T_1$ системы в ее движении относительно центра масс и измененной потенциальной энергии $\delta^2 W$.

Функционал $\delta^2 T_1$ при выполнении неравенства

$$4m_1x^{(1)2}/(M-2m_1)<A_2^k+2I_{21} \qquad (2.1)$$

непрерывен и определенно положителен по метрике P_1 [9]. Очевидно, что при $x^{(1)}=0$, т. е. при совпадении центров масс пары пластин и механической системы, неравенство (2.1) выполняется тождественно.

Введем новые вспомогательные переменные и интегральные характеристики формулами

$$\xi_{1i}=w_{ix}\sin\varphi_0+w_{iy}\cos\varphi_0, \quad \xi_{2i}=-w_{ix}\cos\varphi_0+w_{iy}\sin\varphi_0$$

$$\eta_1=w_1+w_2, \quad \eta_2=w_1-w_2 \quad (i=1,\,2)$$

$$\zeta_1=\int\limits_{\tau_1}\rho_1(x+x^{(1)})\eta_1\,d\tau_1, \quad \zeta_2=\int\limits_{\tau_1}\rho_1(y+y^{(1)})\eta_2\,d\tau_1$$

$$\xi_1=\int\limits_{\tau_1}\rho_1\frac{h_1^2}{3}\sum_{i=1}^{2}\xi_{1i}\,d\tau_1, \quad \xi_2=\int\limits_{\tau_1}\rho_1\frac{h_1^2}{3}\sum_{i=1}^{2}\xi_{2i}\,d\tau_1$$

и применим к ним неравенство Коши — Буняковского. Тогда получим следующие соотношения:

$$z_1^2=I_{21}\int\limits_{\tau_1}\rho_1\eta_1^2\,d\tau_1-\zeta_1^2\geqslant 0, \quad z_3^2=I_{11}\int\limits_{\tau_1}\rho_1\eta_2^2\,d\tau_1-\zeta_2^2\geqslant 0$$

$$z_2^2=d_1\int\limits_{\tau_1}\rho_1\frac{h_1^2}{3}\sum_{i=1}\xi_{1i}^2\,d\tau_1-\xi_1^2\geqslant 0, \quad d_1={}^2/_3\,m_1h_1^2$$

$$z_4^2=d_1\int\limits_{\tau_1}\rho_1\frac{h_1^2}{3}\sum_{i=1}^{2}\xi_{2i}^2\,d\tau_1-\xi_2^2\geqslant 0$$

Вторая вариация измененной потенциальной энергии для решения (1.1) в этих переменных может быть записана в виде

$$\delta^2W=a_{33}\psi^2+a_{44}\varphi^2+a_{55}\theta^2+2a_{53}\psi\theta+2\psi(b_{33}\zeta_1+b_{44}\zeta_2+b_{66}\xi_2)+$$
$$+2\theta(b_{11}\zeta_1+b_{22}\zeta_2+b_{55}\xi_1)+c_{11}\zeta_1^2+$$
$$+c_{33}\zeta_2^2+c_{22}\xi_1^2+c_{44}\xi_2^2+3M\omega_0^2z_c^2+\sum_{i=1}^{4}c_{ii}z_i^2+\Pi_3 \qquad (2.2)$$

$$c_{11}=\frac{1}{2}(\varkappa_1-3\omega_0^2)I_{21}^{-1},\quad c_{22}=(\varkappa_1+\omega_0^2)d_1^{-1},\quad c_{33}=\frac{1}{2}(\varkappa_1-3\omega_0^2)I_{11}^{-1},$$
$$c_{44}=\varkappa_1d_1^{-1},\qquad \varkappa_1=\frac{\mu_1D_1}{\rho_1}$$
$$b_{11}=-4\omega_0^2\sin\varphi_0,\quad b_{22}=-4\omega_0^2\cos\varphi_0,\quad b_{33}=3\omega_0^2\cos\varphi_0,\quad b_{44}=-3\omega0^2\sin\varphi_0,$$
$$b_{55}=4\omega_0^2,\qquad b_{66}=3\omega_0^2$$

Коэффициенты a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{53} имеют значения [17]:

$$a_{33}=3\omega_0^2(A_1\cos^2\varphi_0+A_2\sin^2\varphi_0-A_3),\quad a_{44}=l-\omega_0^2(A_1\cos^2\varphi_0+A_2\sin^2\varphi_0)$$
$$a_{55}=l+3\omega_0^2(A_1\sin^2\varphi_0+A_2\cos^2\varphi_0-A_3)-\omega_0^2A_3$$
$$a_{53}=3\omega_0^2(A_2-A_1)\sin\varphi_0\cos\varphi_0,\quad l=l_{20}\omega_0/\cos\varphi_0,\quad l_{20}=A_2\omega_0\cos\varphi_0+k_2$$

Величина μ_1 равна наименьшему положительному корню трансцендентного уравнения [9]:

$$-2-\left(2+\mu\frac{h_1^4}{9}\right)\operatorname{ch}\nu_1b_1\cos\nu_2b_1+\sqrt{\mu}\,\frac{h_1^2}{3}\operatorname{sh}\nu_1b_1\sin\nu_2b_1=0$$

$$\nu_1=\left[-\frac{1}{6}\mu h_1^2+\left(\frac{1}{36}\mu^2h_1^4+\mu\right)^{1/2}\right]^{1/2},\quad \nu_2=\left[\frac{1}{6}\mu h_1^2+\left(\frac{1}{36}\mu^2h_1^4+\mu\right)^{1/2}\right]^{1/2}$$

Условия знакоопределенности квадратичной формы (2.2) после несложных преобразований приводят к неравенствам

$$\varkappa_1-3\omega_0^2>0,\qquad a_{44}>0 \qquad (2.3)$$
$$\Delta_{51}=a_{33}-b_{33}^2c_{11}^{-1}-b_{44}^2c_{33}^{-1}-b_{66}^2c_{44}^{-1}>0$$
$$\Delta_{52}=a_{55}-b_{11}^2c_{11}^{-1}-b_{22}^2c_{33}^{-1}-b_{55}^2c_{22}^{-1}>0$$
$$\Delta_{52}-\Delta_{51}^{-1}[a_{53}-(b_{22}b_{44}c_{33}^{-1}+b_{11}b_{33}c_{11}^{-1})]^2>0$$

При выполнении неравенств (2.3) функционал δ^2W определенно положителен и непрерывен по метрикам

$$P_2=\psi^2+\theta^2+\varphi^2+\int\limits_{\tau_1}\rho_1\left[I_{21}\eta_1^2+I_{11}\eta_2^2+d_1\frac{h_1^2}{3}\sum_{i=1}^{2}(w_{ix}^2+w_{iy}^2)\right]d\tau_1+z_c^2$$

$$P_3=P_2+\int\limits_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}(w_{ixx}^2+w_{iyy}^2+w_{ixy}^2)\,d\tau_1$$

Согласно теоремам [1—3], неравенства (2.1), (2.3) являются достаточными условиями устойчивости семейства положений относительного равновесия (1.1) гиростата с одной парой прямоугольных пластин по метрикам P_1+P_2 и P_1+P_3.

Неравенствам (2.3) можно придать вид

$$\varkappa_1-3\omega_0^2>0, \quad \Delta_{51}=3\omega_0^2[A_1\cos^2\varphi_0+A_2\sin^2\varphi_0-A_3-$$
$$-3\omega_0^2(c_{11}^{-1}\cos^2\varphi_0+c_{33}^{-1}\sin^2\varphi_0+c_{44}^{-1})]>0 \tag{2.4}$$
$$A_2\omega_0^2+\frac{k_2\omega_0}{\cos\varphi_0}>\max(l_{11},l_{22}), \quad l_{11}=\omega_0^2(A_1\cos^2\varphi_0+A_2\sin^2\varphi_0)$$
$$l_{22}=\omega_0^2[4A_3-3A_1\sin^2\varphi_0-3A_2\cos^2\varphi_0+16\omega_0^2(c_{11}^{-1}\sin^2\varphi_0+$$
$$+c_{33}^{-1}\cos^2\varphi_0+c_{22}^{-1})]+9\omega_0^4\sin^2\varphi_0\cos^2\varphi_0[A_2-A_1+4\omega_0^2(c_{33}^{-1}-c_{11}^{-1})]^2\Delta_{51}^{-1}$$

Достаточные условия устойчивости положения относительного равновесия при $\varphi_0=0$, когда главные центральные оси y_s ($s=1, 2, 3$) коллинеарны осям x_1, x_3, $-x_2$, имеют вид (2.1):

$$\varkappa_1-3\omega_0^2>0, \quad A_2-A_1+k_2\omega_0^{-1}>0 \tag{2.5}$$
$$A_1-A_3>6I_{21}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1-3\omega_0^2}+3d_1\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1}$$
$$4(A_2-A_3)+k_2\omega_0^{-1}>16\left(2I_{11}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1-3\omega_0^2}+d_1\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1+\omega_0^2}\right)$$

При $\varphi_0=\pi/2$ главные центральные оси y_s ($s=1, 2, 3$) коллинеарны осям x_3, $-x_1$, $-x_2$ и достаточные условия устойчивости имеют вид (2.1):

$$\varkappa_1-3\omega_0^2>0, \quad A_1-A_2+k_1\omega_0^{-1}>0 \tag{2.6}$$
$$A_2-A_3>6I_{11}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1-3\omega_0^2}+3d_1\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1}$$
$$4(A_1-A_3)+k_1\omega_0^{-1}>16\left(2I_{21}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1-3\omega_0^2}+d_1\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1+\omega_0^2}\right)$$

Совершенно аналогично можно показать, что достаточные условия устойчивости семейства положений относительного равновесия (1.2) имеют вид (2.1):

$$\varkappa_1-3\omega_0^2>0, \quad \Delta_{51}=3\omega_0^2[A_3-A_1\cos^2\varphi_0-A_2\sin^2\varphi_0-$$
$$-3\omega_0^2(c_{11}^{-1}\cos^2\varphi_0+c_{33}^{-1}\sin^2\varphi_0+c_{44}^{-1})]>0 \tag{2.7}$$
$$A_2\omega_0^2+\frac{k_2\omega_0}{\cos\varphi_0}>\max(l_{11},l_{22})$$
$$l_{11}=3(A_1-A_2)\omega_0^2\cos^2\varphi_0+\omega_0^2(A_1\cos^2\varphi_0+A_2\sin^2\varphi_0)$$
$$l_{22}=\omega_0^2[A_3+3(A_1-A_2)\sin^2\varphi_0+\omega_0^2(c_{11}^{-1}\sin^2\varphi_0+c_{33}^{-1}\cos^2\varphi_0+c_{22}^{-1})]+$$
$$+9\omega_0^4\sin^2\varphi_0\cos^2\varphi_0[A_1-A_2-\omega_0^2(c_{33}^{-1}-c_{11}^{-1})]^2\Delta_{51}^{-1}$$
$$c_{11}={}^1/_2\varkappa_1I_{21}^{-1}, \quad c_{22}=(\varkappa_1+\omega_0^2)d_1^{-1}, \quad c_{33}={}^1/_2\varkappa_1I_{11}^{-1}, \quad c_{44}=(\varkappa_1-3\omega_0^2)d_1^{-1}$$

При $\varphi_0=0$ главные центральные оси инерции y_s ($s=1, 2, 3$) коллинеарны осям x_2, x_3, x_1 и срединная плоскость пары пластин ортогональна касательной к траектории центра масс системы. Достаточные условия устойчивости имеют вид (2.1) и

$$\varkappa_1-3\omega_0^2>0, \quad 4(A_2-A_1)+k_2\omega_0^{-1}>0 \tag{2.8}$$
$$A_3-A_1>6I_{21}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1}+3d_1\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1-3\omega_0^2}$$
$$A_2-A_3+k_2\omega_0^{-1}>2I_{11}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1}+d_1\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1+\omega_0^2}$$

Достаточные условия устойчивости положения относительного равновесия при $\varphi_0=\pi/2$, когда главные центральные оси инерции y_s ($s=1, 2, 3$)

коллинеарны осям x_3, $-x_2$, x_1, имеют вид (2.1):

$$\varkappa_1-3\omega_0^2>0, \quad 4(A_1-A_2)+k_1\omega_0^{-1}>0 \tag{2.9}$$

$$A_3-A_2>6I_{11}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1}+d_1\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1-3\omega_0^2} \quad A_1-A_3+k_1\omega_0^{-1}>2I_{21}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1}+d_1\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1+\omega_0^2}$$

Из полученных достаточных условий устойчивости стационарных движений (1.1) и (1.2) можно сделать следующие выводы.

Деформируемость пластин оказывает дестабилизирующее влияние. Неравенство $\varkappa_1>3\omega_0^2$ при фиксированном значении орбитальной угловой скорости накладывает ограничение на цилиндрическую жесткость пластин снизу.

Для выполнения полученных достаточных условий устойчивости необходимо, чтобы параметры механической системы с недеформированными и «замороженными» пластинами удовлетворяли соответствующим условиям устойчивости гиростата [18] и твердого тела на круговой орбите [19]. У эллипсоида инерции ось, расположенная вдоль радиуса орбиты, должна быть значительно больше оси, расположенной по касательной к траектории центра масс.

Выбором постоянных кинетических моментов маховиков можно частично скомпенсировать дестабилизирующее влияние деформируемости пластин и значительно расширить область устойчивости.

Автор благодарит В. М. Матросова за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. – ПММ, 1969, т. 33, вып. 6, с. 946–957.
2. *Морозов В. М., Рубановский В. Н., Румянцев В. В., Самсонов В. А.* О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем.– ПММ, 1973, т. 37, вып. 3, с. 387–399.
3. *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам.– ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 988–1001.
4. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
5. *Рубановский В. Н.* Об устойчивости некоторых движений твердого тела с упругими стержнями и жидкостью.– ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 43–59.
6. *Рубановский В. Н.* Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругими стержнями, совершающими изгибно-крутильные колебания.– Теоретична и приложна механика, 1972, год 3, № 2, с. 19–29.
7. *Морозов В. М., Рубановский В. Н.* Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругими стержнями.– Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 163–168.
8. *Рубановский В. Н.* Устойчивость стационарных вращений тяжелого твердого тела с двумя упругими стержнями.– ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 55–64.
9. *Набиуллин М. К.* Об устойчивости стационарного движения гиростата с упругими пластинами в ньютоновском центральном поле сил.– Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 1, с. 33–44.
10. *Meirovitch L.* Stability of a spinning body containing elastic parts via Liapunov's direct method.– AJAA Journal, 1970, v. 8, No. 7, p. 1193–1200.
11. *Meirovitch L.* A method for the Liapunov stability analysis of Forche-free dynamical systems.– AJAA Journal, 1971, v. 9, No. 9, p. 1695–1701.
12. *Meirovitch L., Calico R. A.* A comparative study of stability methods for flexible satellites.– AJAA Journal, 1973, v. 11, No. 1, p. 91–98.
13. *Meirovitch L.* Liapunov stability analysis of hybrid dynamical systems in the neighbourhood of nontrivial equilibrium.– AJAA Journal, 1974, v. 12, No. 7, p. 889–898.
14. *Madeleine Pascal.* La stabililite d'attitude d'un satellite muni de panneaux solaires.– Acta astronaut., 1978, v. 5, No. 10, p. 817–844.
15. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
16. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
17. *Набиуллин М. К.* Об устойчивости стационарных движений свободного гиростата в задаче двух неподвижных центров.– Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2, с. 16–26.
18. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 142 с.
19. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.

Иркутск

Поступила в редакцию
27.II.1981