

УДК 539.376

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ
НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ
ГРАНИЦАМИ

АРУТЮНЯН Н. Х., МЕТЛОВ В. В.

Приводится решение задачи о непрерывном наращивании бесконечного клина, нагруженного силой, приложенной к его вершине, а также о наращивании прямоугольной полосы, находящейся под действием изгибающего момента, поперечной и продольной сил. Материал наращиваемых тел обладает свойством ползучести и старения, в силу чего рассматриваемые тела находятся в условиях специфической неоднородности, обусловленной различным возрастом элементов наращиваемых тел [1, 2].

1. Наращиваемый клин под действием силы, приложенной к его вершине. Пусть наращиваемое тело $\Omega(t)$ имеет форму бесконечного клина, нагруженного силой $P(t)$, рассчитанной на единицу толщины клина. Наращивание начинается с зарождения слоя $\{x_2=0, x_1 \geq 0\}$ (фиг. 1) в момент времени $t=0$, для которого $\alpha_i(0)=0$ ($i=1, 2$), $P(0)=0$. Функции $0 \leq \alpha_i(t) \leq \leq \pi$, определяющие заданный закон изменения углов наращиваемого клина во времени, непрерывны и не убывают. Функция $P(t)$, характеризующая закон изменения силы во времени, непрерывно дифференцируема при $t > 0$. Определим поле напряжений и деформаций в наращиваемом клине $\Omega(t)$. Для этого рассмотрим плоскую краевую задачу теории ползучести для области $\Omega(t) = \{-\alpha_1(t) < \theta < \alpha_2(t)\}$, определяемую следующими исходными уравнениями и условиями [1]:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \quad (0 < r < \infty) \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

уравнения состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(t, r, \theta) &= \delta_{\alpha\beta} \Delta_1 \psi_{\gamma\tau} + \Delta_2 \psi_{\sigma\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta, \gamma = r, \theta) \\ \Delta_i \psi(t, r, \theta) &= \int_{\tau^*(\theta)}^t \Delta_i(t - \tau^*(\theta), \tau - \tau^*(\theta)) \varphi^*(\tau, r, \theta) d\tau \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

уравнение совместности для скоростей деформаций

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} \quad (1.3)$$

начальное условие

$$\sigma_{\alpha\beta}(\tau^*(\theta), r, \theta) = 0 \quad (1.4)$$

Здесь $\tau^*(\theta)$ — момент зарождения слоя наращиваемого клина с координатой θ , совпадающий с моментом его стыковки; $\sigma_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — средние зна-

чения компонент напряжений и деформаций по толщине клина при обобщенном плоском напряженном состоянии, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Точки в (1.2), (1.3) обозначают частные производные по времени; $(3\Delta_1(t, \tau) + \Delta_2(t, \tau))\zeta$ и $2\Delta_2(t, \tau)$ — соответственно объемная и сдвиговая деформации к моменту времени t от воздействия единичного гидростатического давления и тангенциального напряжения, приложенных в возрасте материала τ . Здесь принято также правило суммирования по повторяющемуся индексу.

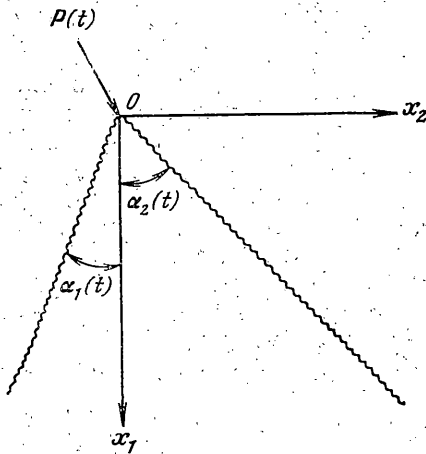
Обозначим символом A^\vee интегральный оператор с ядром $A(t-\tau^*, \tau-\tau^*)$, такой, что

$$A^\vee \varphi(t, r, \theta) = \int_{\tau^*(\theta)}^t A(t-\tau^*(\theta), \tau-\tau^*(\theta)) \varphi(\tau, r, \theta) d\tau$$

Поскольку движущаяся граница $\Gamma(t) = \{\theta = -\alpha_1(t)\} \cup \{\theta = \alpha_2(t)\}$ области $\Omega(t)$ является линией уровня $\{\tau^*(\theta) = t\}$ функции $\tau^*(\theta)$, то в силу (1.4) на движущейся границе будем иметь

$$\sigma_{\alpha\beta}(t, r, \theta) = 0, \quad (r, \theta) \in \Gamma(t) \quad (t > 0) \quad (1.5)$$

Помимо соотношений (1.1)–(1.4) необходимо удовлетворить условиям равновесия в вершине клина



Фиг. 1

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} r^2 \sigma_{\theta r}(t, r, \theta) d\theta = 0 \quad (1.6)$$

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} (\sigma_{rr} \sin \theta + \sigma_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = -P_2(t)$$

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = -P_1(t),$$

где $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — составляющие силы $\mathbf{P}(t)$ вдоль осей ox_1 и ox_2 .

Построим решение краевой задачи (1.1)–(1.6) следующим образом [3]. Положим равными нулю все компоненты напряжений, кроме σ_{rr} , которую будем искать в форме

$$\sigma_{rr}(t, r, \theta) = -F(t, \theta)/r \quad (1.7)$$

где $F(t, \theta)$ — некоторая функция, подлежащая определению. При этом будут тождественно удовлетворены дифференциальные уравнения равновесия (1.1) и первое из уравнений (1.6).

Далее, пользуясь соотношениями (1.7) и (1.2), получим

$$\varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \varepsilon_{rr} = C_r^*(t, \theta)/r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = C_\theta^*(t, \theta)/r \quad (1.8)$$

$$C_r^*(t, \theta) = -(\Delta_1^\vee + \Delta_2^\vee)F(t, \theta), \quad C_\theta^* = -\Delta_1^\vee F(t, \theta), \quad (1.9)$$

Подставляя выражения для компонент деформации (1.8) в (1.3), имеем $\partial^2 C_r^*/\partial \theta^2 + C_r^* = 0$, откуда находим

$$C_r^*(t, \theta) = -a_1(t) \cos \theta - a_2(t) \sin \theta \quad (1.10)$$

После обращения первого из соотношений (1.9) с учетом (1.4) получим

$$F(t, \theta) = -\mu \check{C}_r(t, \theta) = - \int_{\tau^*(\theta)}^t \mu(t - \tau^*(\theta), \tau - \tau^*(\theta)) C_r(\tau, \theta) d\tau \quad (1.11)$$

$$\mu \check{=} (\Delta_1 \check{+} \Delta_2 \check{)}^{-1}, \quad \mu(t, \tau) = E(\tau) + Q(t, \tau), \quad E(t) = \Delta(t, t)^{-1}$$

$$\Delta(t, \tau) = \Delta_1(t, \tau) + \Delta_2(t, \tau), \quad Q(t, \tau) = E(t) \left(1 + \int_{\tau}^t R(t, s) ds \right) - E(\tau)$$

Здесь $E(\tau)$ — модуль упругомгновенной деформации, $Q(t, \tau)$ — мера релаксации; функция $\mu(t, \tau)$ равна отношению напряжения в момент времени t при одноосном напряженном состоянии однородного тела к величине постоянной продольной деформации, приложенной в возрасте τ ; символ $(\Delta_1 \check{+} \Delta_2 \check{)}^{-1}$ означает обратный оператор к оператору $\Delta_1 \check{+} \Delta_2 \check{}$; $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$, определяемого соотношением $K(t, \tau) = = E(\tau) \partial \Delta(t, \tau) / \partial \tau$.

Подставляя (1.10) в (1.11), выражение (1.11) для функции $F(t, \theta)$ — в (1.7), а затем значение $\sigma_{rr}(t, \theta)$ — в уравнения равновесия (1.6), получим систему двух интегральных уравнений Вольтерра для определения неизвестных функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$:

$$\int_0^t \mu^0(t, \tau) \mathbf{a}(\tau) d\tau = \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{a}(t) = \begin{Bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\mu^0(t, \tau) = \int_{-\alpha_1(\tau)}^{\alpha_2(\tau)} \mu(t - \tau^*(\theta), \tau - \tau^*(\theta)) A(\theta) d\theta, \quad A(\theta) = \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

Таким образом, задача нахождения напряженно-деформированного состояния в наращиваемом клине $\Omega(t)$ свелась к решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра (1.12). Действительно, определяя функции $a_i(t)$ ($i=1, 2$) из системы уравнений (1.12), найдем поле напряжений и деформаций в наращиваемом клине $\Omega(t)$ по формулам (1.7) — (1.12).

Отметим, что система уравнений (1.12) имеет особенность при $t=0$, в силу того, что $\mu^0(0, 0) = 0$ [4]. Поэтому для существования и единственности решения системы (1.12) ядро $\mu^0(t, \tau)$ и сила $\mathbf{P}(t)$ должны удовлетворять некоторым ограничениям, означающим, что при малых t закон изменения нагрузки $\mathbf{P}(t)$ должен быть определенным образом согласован с законом наращивания $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, определяющим, согласно (1.13), ядро $\mu^0(t, \tau)$.

В случае симметричного наращивания имеем $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha(t)$, $\tau^*(\theta) = \tau^*(-\theta)$, и, согласно (1.13), матрица $\mu^0(t, \tau)$ будет диагональной, т. е. система (1.12) распадается на два независимых уравнения, причем тождественное равенство нулю одной из компонент силы $\mathbf{P}(t)$ влечет за собой тождественное равенство нулю соответствующей компоненты вектора $\mathbf{a}(t)$.

Рассмотрим пример симметричного наращивания клина под действием силы $P_1(t)$. Тогда распределение напряжений будет симметричным относительно прямой $\theta=0$. Функцию $\mu(t, \tau)$ возьмем в форме

$$\mu(t, \tau) = E(\tau) - \varphi(\tau) \{1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]\} \quad (1.14)$$

где $E(\tau)$ — модуль упругомгновенной деформации, $\varphi(\tau)$ — функция старения. Соотношению (1.14) для функции $\mu(t, \tau)$ соответствует выражение

$$\Delta(t, \tau) = E(\tau)^{-1} + \varphi_1(\tau) \int_{\tau}^t \exp \left\{ - \int_{\tau}^u \psi(z) dz \right\} du$$

$$\varphi_1(\tau) = \frac{\gamma\varphi(\tau)}{E^2(\tau)}, \quad \psi(t) = \gamma \left(1 - \frac{\varphi(t)}{E(t)} \right) + \frac{1}{E(t)} \frac{dE}{dt}$$

Для искомой функции $a_1(t)$ имеем:

$$\int_0^t \mu_{11}^\circ(t, \tau) a_1(\tau) d\tau = P_1(t) \quad (1.15)$$

$$\mu_{11}^\circ(t, \tau) = E^\circ(\tau) - \varphi^\circ(\tau) \{1 - \exp[-\gamma(t-\tau)]\} \quad (1.16)$$

$$E^\circ(t) = 2 \int_0^{\alpha(t)} E(t-\tau^*(\theta)) \cos^2 \theta d\theta$$

$$\varphi^\circ(t) = 2 \int_0^{\alpha(t)} \varphi(t-\tau^*(\theta)) \cos^2 \theta d\theta$$

Ядро (1.16) является вырожденным, и уравнение (1.15) двукратным дифференцированием сводится к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt}(E(t)a_1(t)) + \gamma a_1(t)(E^\circ(t) - \varphi^\circ(t)) = P_1''(t) + \gamma P_1'(t) \quad (1.17)$$

с начальным условием

$$a_1(0) = \lim_{t \rightarrow 0} P_1'(t)/E^\circ(t) \quad (1.18)$$

Решение задачи (1.17), (1.18) имеет вид

$$a_1(t) = \int_0^t \exp \left\{ -\gamma \int_\tau^t \left(1 - \frac{\varphi^\circ(z)}{E^\circ(z)} \right) dz \right\} (P_1''(\tau) + \gamma P_1'(\tau)) \frac{d\tau}{E^\circ(t)} \quad (1.19)$$

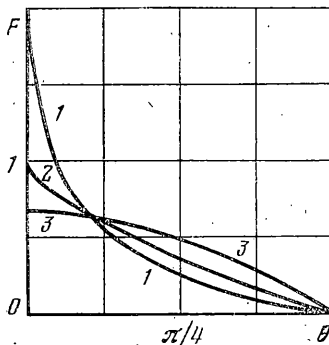
Полагая в (1.19) $\gamma=0$, $E(t)=\text{const}$, приходим к выражению для функции $F(t, \theta)$ в случае наращивания упругого клина

$$F_y(t, \theta) = \cos \theta \int_0^{\alpha(t)} \frac{2dP_1^\circ(\alpha)}{2\alpha + \sin 2\alpha} \quad (1.20)$$

Здесь символом $P_1^\circ(\alpha)$ обозначена зависимость силы P_1 от угла α . Пусть угол $\alpha(t)$ равномерно возрастает на отрезке времени $[0, T]$ от нуля до $\pi/2$. Сила $P_1(t)$ возрастает на том же отрезке времени $[0, T]$ от нуля до единицы. На отрезке $[T/100, T]$ нагрузка $P_1(t)$ растёт равномерно, а на отрезке $[0, T/100]$ она изменяется по квадратичному закону $P_1(t) = P_0 t^2$. При этом существует предел (1.18). В точке $t=T/100$ происходит сшивание квадратичного и линейного законов так, что функция $P_1(t)$ непрерывно дифференцируема (вторая производная, очевидно, имеет разрыв при $t=T/100$). Модуль E примем при расчетах постоянным, а функцию $\varphi(\tau)$ положим равной

$$\varphi(\tau) = E(C + A e^{-\beta\tau}) \quad (1.21)$$

Постоянная времени релаксации $\gamma = 0,1 \text{ сут}^{-1}$, $\beta = 0,008 \text{ сут}^{-1}$, $C = 0,05$, $A = 0,85$. На фиг. 2 показаны зависимости функции



Фиг. 2

$F(t, \theta)$ в (1.7) от угла θ в момент времени T (кривая 1) при наращивании упругого клина (см. (1.20)) и вязкоупругого стареющего клина при $T=40$ сут (кривая 2). Для сравнения на этом же графике приведено решение Фламана задачи о действии сосредоточенной силы на полуплоскость $F=2 \cos \theta/\pi$ (кривая 3).

Как видно из фиг. 2, учет последовательности возведения и загрузки приводит к увеличению максимального значения функции F (при $\theta=0$) более чем в три раза по сравнению с решением Фламана, а учет ползучести приводит к уменьшению этой величины приблизительно в два раза по сравнению со случаем упругого наращивания.

Представляет интерес исследовать зависимость функции $F(T, \theta)$ от времени возведения — загрузки T . В упругом случае при неизменной последовательности возведения — загрузки, т. е. при неизменной зависимости силы P_1 от угла α (что имеет место в данном случае), скорость возведения не влияет на величину $F(T, \theta)$ (см. (1.20)).

Ниже приведены максимальные значения функции $F(T, \theta)$, которых она достигает при $\theta=0$, в зависимости от времени наращивания T :

T (сут)	1	2	5	10	20	40	100	200	600
$F(T, 0)$	1,84	1,76	1,54	1,29	1,04	0,941	1,15	1,41	1,78

В случае упругого наращивания $F=1,94$, и решение Фламана дает $F=0,637$. Для объяснения представленных результатов необходимо учесть три фактора, определяющих процесс перераспределения напряжений в наращиваемом теле.

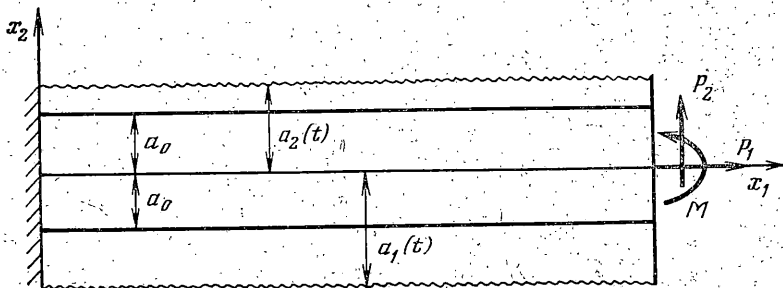
Во-первых, упругие свойства наращиваемого тела вызывают приращение напряжений одновременно во всех элементах наращиваемого тела при приращении внешней нагрузки. Во-вторых, ползучесть материала приводит к передаче части усилия от ранее рожденных элементов на вновь рожденные. Наконец, старение материала приводит к возрастной неоднородности, состоящей в большей жесткости (меньшей деформативности) ранее зародившихся элементов по сравнению со вновь рожденными, что уменьшает процесс разгрузки ранее рожденных элементов.

Первый фактор объясняет увеличение максимального напряжения при учете последовательности возведения — загрузки по сравнению со случаем загрузки массива после его возведения. Второй эффект проявляется на временах порядка времени ползучести материала и усиливается при увеличении времени возведения. При малых временах возведения, при которых ползучесть материала не успевает проявиться, решение вязкоупругой задачи наращивания стремится к решению задачи упругого наращивания. При увеличении времени возведения увеличивается эффект разгрузки первого родившегося элемента $\theta=0$ и величина $F(T, 0)$ уменьшается от 1,94 при $T \rightarrow 0$ до 0,941 при $T=40$ сут. При дальнейшем увеличении времени T увеличение жесткости элемента $\theta=0$ по сравнению с позднее рожденными элементами в силу увеличения разности возрастов приводит к увеличению величины $F(T, 0)$.

2. Задача о наращивании прямоугольной полосы, находящейся под действием изгибающего момента, продольной и поперечной силы. Пусть в момент времени $t=0$ изготавливается прямоугольная полоса шириной $2a_0$ (фиг. 3). В этот же момент к правому торцу $x_1=l$ прикладывается нагрузка, статически эквивалентная продольной силе P_{01} , поперечной силе P_{02} и изгибающему моменту M_0 , рассчитанным на единицу толщины полосы. Левый торец полосы $x_1=0$ предполагается закрепленным в точке $x_1=x_2=0$. Начиная с момента времени $t=0$ происходит непрерывное наращивание полосы в поперечном направлении так, что расстояние от оси x_1 до ее краев есть заданные монотонно неубывающие функции $a_i(t)$, $a_i(0)=a_0$, $i=1, 2, \dots$. Одновременно с процессом наращивания происходит изменение силы P и момента M по закону $P=P(t)$ и $M=M(t)$, при этом $P(-0)=-M(-0)=0$, $P(+0)=P_0$, $M(+0)=M_0$.

Определим напряженно-деформированное состояние в рассматриваемой полосе в процессе ее наращивания (здесь, как и в предыдущем параграфе, рассматриваем обобщенное плоское напряженное состояние). Для этого предварительно полагаем, что $\sigma_{22}=0$, а граничным условиям на торцах

$$\Delta_i \check{\varphi}(t, x) = \int_{\tau^*(x_2)}^t \Delta_i(t - \tau^*(x_2), \tau - \tau^*(x_2)) \dot{\varphi}(\tau, x) d\tau \quad (i=1, 2)$$



Фиг. 3

полосы удовлетворим в интегральном смысле. Тогда средние по толщине полосы значения составляющих напряжений и деформаций должны удовлетворять следующим уравнениям и условиям:

уравнения равновесия

$$\sigma_{\alpha\beta, \beta} = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha} \quad (2.1)$$

уравнение состояния

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \Delta_1 \check{\sigma}_{\gamma\gamma} + \Delta_2 \check{\sigma}_{\alpha\beta} \quad (2.2)$$

уравнение совместности

$$\partial^2 \varepsilon_{11} / \partial x_2^2 + \partial^2 \varepsilon_{22} / \partial x_1^2 = 2 \partial^2 \varepsilon_{12} / \partial x_1 \partial x_2 \quad (2.3)$$

начальное условие

$$\sigma_{\alpha\beta}(\tau^*(x_2), x) = 0 \quad (2.4)$$

граничное условие

$$\sigma_{12}(t, x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma(t) \quad (t \geq 0) \quad (2.5)$$

$$\Gamma(t) = \{x_2 = -a_1(t), 0 < x_1 < l\} \cup \{x_2 = a_2(t), 0 < x_1 < l\}$$

интегральные уравнения равновесия

$$\int_{-a_1(t)}^{a_2(t)} \sigma_{12}(t, x) dx_2 = P_2(t), \quad \int_{-a_1(t)}^{a_2(t)} \sigma_{11}(t, x) dx_2 = P_1(t)$$

$$\int_{-a_1(t)}^{a_2(t)} (-\sigma_{11}(t, x) x_2) dx_2 = M(t) + P_2(t)l \quad (x_1 = 0, t \geq 0) \quad (2.6)$$

Здесь заданные величины $\Delta_i(t, \tau)$ ($i=1, 2$) имеют тот же смысл, что и в п. 1; $\tau^*(x_2)$ — момент времени зарождения элемента полосы с координатой x_2 ; точки в (2.2), (2.3) означают частные производные по времени, которые в связи с мгновенными приращениями деформаций и напряжений надо понимать в обобщенном смысле.

Из (2.1) имеем

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}(t, x_2), \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}'(t, x_2)x_1 + \sigma_{11}''(t, x_2),$$

$$\sigma_{11}'(t, x_2) = -\partial \sigma_{12}(t, x_2) / \partial x_2 \quad (2.7)$$

Далее, из соотношений (2.2) и (2.7) находим, что $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}(t, x_2)$, а ε_{11} и ε_{22} — многочлены первой степени от x_1 (с коэффициентами, зависящими от t и x_2). С учетом этого факта из уравнения совместности (2.3) будем иметь $\partial^2 \varepsilon_{11} / \partial x_2^2 = 0$, откуда находим

$$\varepsilon_{11}(t, x) = b_1(t) + b_2(t)x_2 + b_3(t)x_1 + b_4(t)x_1x_2 \quad (2.8)$$

Из интегральных уравнений равновесия (2.6) с учетом (2.7) получим

$$\int_{-a_1(t)}^{a_2(t)} \sigma_{11}''(t, x_2) dx_2 = P_1(t), \quad \int_{-a_1(t)}^{a_2(t)} (-\sigma_{11}'' x_2) dx_2 = M(t) + P_2(t)l \quad (2.9)$$

$$\int_{-a_1(t)}^{a_2(t)} \sigma_{12}(t, x_2) dx_2 = P_2(t) \quad (2.10)$$

Разрешив уравнение (2.2) относительно σ_{11} с учетом $\sigma_{22} = 0$ и начального условия (2.4), будем иметь

$$\sigma_{11}(t, x) = \int_{\tau^*(x_2)}^t \mu(t - \tau^*(x_2), \tau - \tau^*(x_2)) \varepsilon_{11}(\tau, x) d\tau$$

где функция $\mu(t, \tau)$ имеет тот же смысл, что и в п. 1.

Отсюда и из (2.7) и (2.8) находим

$$\sigma_{11}''(t, x_2) = \int_{\tau^*}^t \mu(t - \tau^*, \tau - \tau^*) (b_1(\tau) + b_2(\tau)x_2) d\tau, \quad (2.11)$$

$$\sigma_{11}'(t, x_2) = \int_{\tau^*}^t \mu(t - \tau^*, \tau - \tau^*) (b_3(\tau) + b_4(\tau)x_2) d\tau, \quad \tau^* = \tau^*(x_2)$$

Подставляя первое из уравнений (2.11) в (2.9), получим систему двух интегральных уравнений для определения неизвестных функций $b_1(t)$ и $b_2(t)$:

$$\int_0^t \mu^0(t, \tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau = \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{b}(t) = \begin{Bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ -M(t) - P_2(t)l \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mu^0(t, \tau) = \int_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \mu(t - \tau^*(x_2), \tau - \tau^*(x_2)) A(x_2) dx_2$$

$$A(x_2) = \begin{Bmatrix} 1 & x_2 \\ x_2 & x_2^2 \end{Bmatrix}$$

Интегрируя последнее уравнение в (2.7) с учетом (2.5), получим

$$\sigma_{12}(t, x_2) = - \int_{-a_1(t)}^{x_2} \sigma_{11}'(t, x_2') dx_2', \quad \int_{-a_1(t)}^{a_2(t)} \sigma_{11}'(t, x_2) dx_2 = 0 \quad (t \geq 0) \quad (2.13)$$

Из (2.13), второго из уравнений (2.11), а также уравнения (2.10) получим систему интегральных уравнений для определения неизвестных функций $b_3(t)$ и $b_4(t)$:

$$\int_0^t \mu^{0'}(t, \tau) \mathbf{b}'(\tau) d\tau = \mathbf{q}'(t), \quad \mathbf{q}'(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b}'(t) = \begin{Bmatrix} b_3(t) \\ b_4(t) \end{Bmatrix}$$

$$\mu^{\circ'}(t, \tau) = \int_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \mu(t - \tau^*(x_2), \tau - \tau^*(x_2)) B(t, x_2) dx_2 \quad (2.14)$$

$$B(t, x_2) = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ a_2(t) - x_2 \quad (a_2(t) - x_2)x_2 \end{array} \right\|$$

Таким образом, задача (2.1)–(2.6) сводится к решению двух систем интегральных уравнений (2.12) и (2.14) для определения неизвестных функций $b_i(t)$ ($i=1, \dots, 4$). В случае симметричного наращивания, т.е. при $a_1(t) = a_2(t) = a(t)$, $\tau^*(x_2) = \tau^*(-x_2)$, матрица $\mu^{\circ}(t, \tau)$ диагональная и система (2.12) распадается на два независимых уравнения. В этом случае $\mu_{12}^{\circ'}(t, \tau) = 0$ и, следовательно, $b_3(t) = 0$. Тогда в системе (2.14) остается лишь одно интегральное уравнение

$$\int_0^t \mu_{22}^{\circ'}(t, \tau) b_4(\tau) d\tau = -P_2(t) \quad (2.15)$$

Если какая-либо из внешних нагрузок претерпевает скачок в какой-либо момент времени t_0 , то решение соответствующей системы уравнений (2.12) или (2.14) будет содержать сингулярную часть вида $C\delta(t-t_0)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция. Пусть, например, кусочно-непрерывно-дифференцируемая функция $q(t)$ в (2.12) испытывает в моменты $(t_i)_{i=1, \dots, N}$ скачки величиной $\Delta q(t_i)$. Тогда решение системы (2.12) можно представить в виде

$$b(t) = b_r(t) + \sum_{i=1}^N C_i \delta(t-t_i) \quad (2.16)$$

$$C_i = (\mu^{\circ}(t_i, t_i))^{-1} \Delta q(t_i), \quad \int_0^t \mu^{\circ}(t, \tau) b_r(\tau) d\tau + \sum_{t_i \leq t} \mu^{\circ}(t, t_i) C_i = q(t) \quad (2.17)$$

где $b_r(t)$ — регулярная часть $b(t)$.

В отсутствие поперечной силы $P_2(t)$ величины $b_3(t) = b_4(t) = 0$ и задача (2.1)–(2.6) сводится к одной лишь системе (2.12), при этом отлична от нуля лишь одна составляющая тензора напряжений σ_{11} .

Для численного примера рассмотрим случай симметричного наращивания под действием изгибающего момента $-M(t)$. В этом случае $b_1 = b_3 = b_4 = 0$ и $\varepsilon_{11}(t, x) = -b_2(t)x_2$. Здесь функция $b_2(t)$ имеет простой смысл и равна скорости изменения кривизны продольных волокон полосы. Обозначим через $\omega(t)$ кривизну центрального волокна $x_2 = 0$. Так как $b_2(t) dt = d\omega(t)$, то для определения кривизны $\omega(t)$ из (2.12) будем иметь

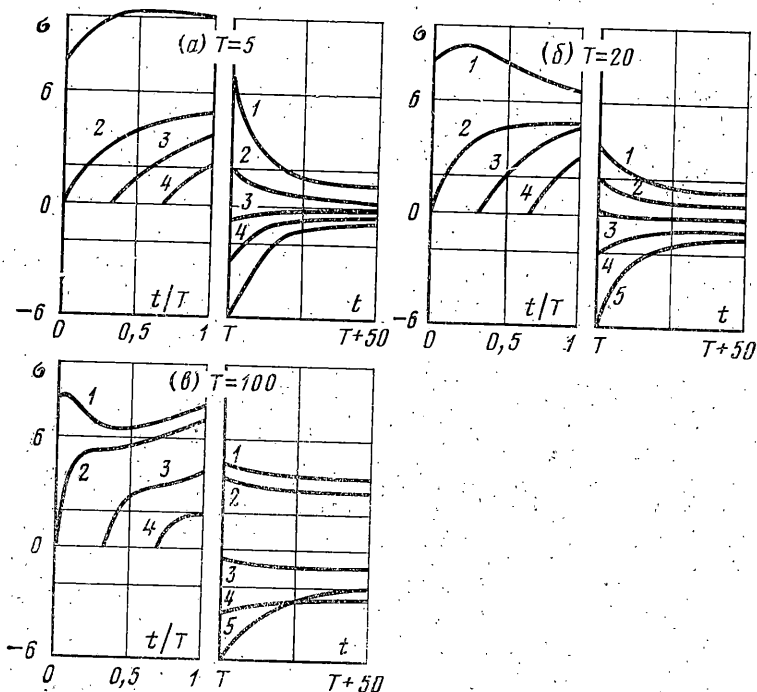
$$\int_0^t \mu_{22}^{\circ}(t, \tau) d\omega(\tau) = M(t), \quad \omega(-0) = 0 \quad (2.18)$$

$$\mu_{22}^{\circ}(t, \tau) = \int_0^{\tau} \mu(t-s, \tau-s) dJ(s), \quad J(t) = 2/3 a^3(t), \quad J(-0) = 0 \quad (2.19)$$

где интегралы в соотношениях (2.18) и (2.19) понимаются в смысле Стильтьеса.

Тогда продольные напряжение и деформация в наращиваемой полосе будут определяться формулами

$$\varepsilon_{11}(t, x_2) = x_2(\omega(t) - \omega(\tau^*(x_2))), \quad \sigma_{11}(t, x_2) = x_2 \int_{\tau^*(x_2)}^t \mu(t - \tau^*(x_2), \tau - \tau^*(x_2)) d\omega(\tau) \quad (2.20)$$



Фиг. 4

Отсюда следует, что напряжение σ_{11} является нечетной функцией координаты x_2 . Пусть в момент времени $t=0$ изготавливается прямоугольная полоса Ω_0 , момент инерции сечения которой в расчете на единицу ее толщины равен $J_0=1/8$. Одновременно к ее правому торцу прикладывается изгибающий момент $M_0=1$. На отрезке времени $[0, T]$ момент инерции $J(t)$ равномерно возрастает до значения $J(T)=1$ и далее остается постоянным. На том же отрезке времени $[0, T]$ изгибающий момент $M(t)$ равномерно возрастает до значения $M(T)=3$, после этого в момент времени T изгибающий момент M мгновенно падает до нуля, т. е. нагрузка полностью снимается.

На фиг. 4, а, б, в изображены кривые напряжения $\sigma_{11}(t, x)$ в зависимости от времени t (сутки) для следующих элементов наращиваемой полосы: крайнего волокна $x_2=a_0-0$ исходного тела Ω_0 (кривые 1), ближайшего волокна $x_2=a_0+0$ к исходному телу Ω_0 (кривые 2); элементов, зарожденных в моменты времени $T/3, 2T/3, T$, находящихся на расстояниях соответственно $1,48a_0, 1,78a_0, 2a_0$ от начала координат (кривые 3, 4, 5). Функция $\mu(t, \tau)$ взята такой же, как в п. 1 (см. 1.14).

Исследовалось влияние величины времени наращивания $T=5, 20$ и 100 сут (т. е. скорости процесса возведения — загрузки) на величину напряжений в наращиваемой полосе. Отметим, что при отсутствии свойства ползучести у наращиваемого тела скорость возведения — загрузки не оказывает влияния на напряженно-деформированное состояние. Действительно, в этом случае, полагая в (2.19), (2.20) $\mu(t, \tau)=E$, получим

$$\sigma_{11}(t, x_2) = x_2 \int_{J(\tau^*(x_2))}^{J(t)} \frac{dM(J)}{J} \quad (2.21)$$

Рассмотрим влияние параметра T на характер изменения напряжений в элементе $x_2=a_0-0$ на отрезке времени $[0, T]$. В другом случае из (2.21) имеем

$$\sigma_{11}(t, a_0-0) = a_0 \left(\frac{M_0}{J_0} + \alpha \ln \frac{J(t)}{J_0} \right), \quad \alpha = \frac{dM}{dJ} \quad (0 < t < T)$$

т. е. напряжение в элементе возрастает по логарифмическому закону. Ползучесть материала наращиваемого тела приводит к передаче части усилия от исходного тела Ω_0 на вновь рожденные элементы. Однако при $T=5$ сут, когда свойство ползучести не успевает проявиться в полной мере, напряжение в элементе $x_2=a_0-0$ возрастает почти на всем отрезке $[0, T]$. При $T=20$ сут после участка возрастания появляется участок разгрузки, обусловленный ползучестью. При $T=100$ сут вслед за двумя рассмотренными участками появляется третий участок, на котором напряжение

возрастает из-за большой возрастной неоднородности, в силу которой жесткость исходного тела Ω_0 увеличивается со временем по сравнению с жесткостью вновь рожденных элементов.

Отметим характерное явление, присущее процессам последовательного возведения — загрузки. Это явление — наличие остаточных напряжений после снятия внешней нагрузки — может быть использовано при создании предварительно напряженных конструкций. В упругом случае остаточные напряжения не меняются со временем. Наличие ползучести, как видно из фиг. 4, приводит к сильному изменению остаточных напряжений с течением времени. Как характер этого изменения, так и величина остаточных напряжений в значительной степени зависят от времени наращивания T . Так, например, величины остаточных напряжений в элементе $x_2 = a_0 + 0$ при $T = 100$ сут и при $T = 5$ сут относятся как $3,2/0,28 \approx 11,5$.

Авторы признательны В. И. Гетрику и В. Б. Колмановскому за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783—789.
2. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. — Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
4. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Ч. 1. М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1934. 330 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.VII.1981