

УДК 539.376

РАСЧЕТ ПРОЦЕССОВ ВЯЗКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

МАЛИНИН Н. Н., РОМАНОВ К. И.

При повышенных температурах проявляются вязкие свойства металлов, следовательно, значительное влияние на историю напряженно-деформированного состояния, форму заготовки и величину деформирующего усилия оказывает фактор времени. Это приводит к необходимости использовать при построении расчетных методов горячего формоизменения уравнения состояния реономных тел и применять аппарат теории ползучести.

Часто при значительных перемещениях мгновенными (упругими и пластическими) деформациями по сравнению с деформациями ползучести можно пренебречь [1]. При этом методы решения технологических задач упрощаются, а теоретические результаты незначительно отличаются от опытных данных [2].

Процессы деформирования, в которых деформации ползучести можно считать полными деформациями, образуют класс вязких течений. В [2] для исследования процессов вязкого течения применен метод конечных элементов в форме метода перемещений сетки конечных элементов. Особенностью построенного численного метода является приближенное выполнение условия несжимаемости материала в результате того, что коэффициент поперечной деформации принимается величиной близкой, но не равной половине.

Для учета условия несжимаемости возможны и другие подходы [3]. Ниже для этой цели используется метод конечных элементов, основанный на смешанном вариационном принципе. При этом наряду со скоростями узловых перемещений варьируется и среднее нормальное напряжение в каждом конечном элементе.

Взаимодействие механических и термических процессов не рассматривается. Поле температур считается стационарным и определенным в результате решения температурной задачи. Изложенный метод пригоден, в частности, для исследования процессов горячего изотермического деформирования, широко используемых в технике.

1. Постановка задачи. Основная система уравнений ползучести состоит из уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (1.1)$$

(σ_{ij} — компоненты эйлерова тензора напряжений, X_i — внешние объемные силы), зависимостей Коши для скоростей деформаций ξ_{ij} и скоростей перемещений v_i

$$\xi_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.2)$$

условия несжимаемости (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\delta_{ij} \xi_{ij} = 0 \quad (1.3)$$

определяющих уравнений [4]

$$\xi_{ij} = \partial \Lambda / \partial \sigma_{ij} \quad (1.4)$$

или

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0 = \partial L / \partial \xi_{ij} \quad (1.5)$$

(Λ — дополнительное рассеяние, L — рассеяние, σ_0 — среднее нормальное напряжение); граничных условий, которые для определенности примем в виде

$$\sigma_{ij} \alpha_{nj} = X_{ni} \quad \text{на } S_1 \quad (1.6)$$

$$v_i = v_i^* \quad \text{на } S_2 \quad (1.7)$$

(α_{nj} — направляющие косинусы нормали к поверхности, X_{ni} — поверхностные силы, v_i^* — заданные скорости, S_1 и S_2 — части поверхности тела S).

Дополнительно к указанным уравнениям используется уравнение состояния среды, сформулированное на основе одной из технических теорий ползучести (теории течения или упрочнения [5]).

Численное решение системы уравнений (1.1) — (1.7) составляет один из возможных подходов к анализу вязких течений.

Другим возможным подходом является использование вариационных принципов: стационарности мощности, стационарности дополнительного рассеяния или смешанных вариационных принципов. Принцип стационарности мощности [4] позволяет определить напряженное состояние лишь с точностью до среднего нормального напряжения, а принцип стационарности дополнительного рассеяния [5] приводит к трудоемкому методу сил, поскольку описание равновесия системы конечных элементов в усилиях более сложно, чем в скоростях перемещений. Необходимо также отметить, что при построении численных решений применение указанных двух вариационных принципов может быть затруднено из-за невозможности удовлетворить условия, налагаемые на поля перемещений в первом принципе и на поля напряжений во втором. По отмеченным причинам необходимо использовать смешанные вариационные принципы, в которых все или часть ограничений святы¹⁾. Рассмотрим один из этих принципов.

2. Смешанный вариационный принцип. Согласно известному принципу стационарности мощности, для консервативных внешних сил имеем следующее условие стационарности функционала мощности (V — объем тела):

$$\delta\Pi_1=0, \quad \Pi_1=\int_V LdV-\int_V X_i v_i dV-\int_{S_1} X_{ni} v_i dS \quad (2.1)$$

Принцип стационарности мощности представляет собой интегральную форму записи уравнений равновесия внутри тела (1.4) и на его поверхности (1.6). Варьируемые скорости перемещений, входящие в функционал (2.1), должны удовлетворять уравнениям совместности скоростей перемещений (1.2), условию несжимаемости (1.3), а также граничному условию (1.7). Кроме того, напряжения и скорости деформаций предполагаются связанными между собой определяющим уравнением (1.5).

Перейдем от задачи отыскания стационарного значения функционала Π_1 при ограничениях (1.2), (1.3), (1.5), (1.7) к задаче отыскания стационарного значения некоторого функционала Π_2 при ограничениях (1.2), (1.5) и (1.7). Для этого используем метод множителей Лагранжа. Возьмем следующий функционал (где λ — множитель Лагранжа):

$$\Pi_2=\Pi_1+\int_V \lambda \delta_{ij} \xi_{ij} dV$$

Выясним смысл множителя Лагранжа и покажем, что условие стационарности

$$\delta\Pi_2=0 \quad (2.2)$$

представляет собой интегральную форму записи уравнений равновесия внутри тела и на его поверхности, а также условия несжимаемости.

¹⁾ См. также Романов К. И. Вариационные принципы установившейся ползучести. Тез. докл. Всес. конф. «Научно-техн. прогресс в машиностр. и приборостр.» М.: МВТУ, 1980, с. 50–51.

Составим вариацию функционала Π_2 (независимому варьированию подлежат четыре величины v_i и λ , а внешние силы не варьируются):

$$\delta\Pi_2 = \int_V \left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{ij}} + \lambda \delta_{ij} \right) \delta \xi_{ij} dV - \int_V X_i \delta v_i dV - \\ - \int_{S_1} X_{ni} \delta v_i dS + \int_V \delta_{ij} \xi_{ij} \delta \lambda dV$$

Поскольку определяющее уравнение (1.5) предполагается выполненным, получаем

$$\delta\Pi_2 = \int_V (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0 + \lambda \delta_{ij}) \delta \xi_{ij} dV - \int_V X_i \delta v_i dV - \int_{S_1} X_i \delta v_i dS - \int_V \delta_{ij} \xi_{ij} \delta \lambda dV$$

Предположим, что $\lambda = \sigma_0$. Если это предположение неверно, в последующих преобразованиях получим противоречие. С учетом сделанного предположения будем иметь

$$\delta\Pi_2 = \int_V \sigma_{ij} \delta \xi_{ij} dV - \int_V X_i \delta v_i dV - \int_{S_1} X_{ni} \delta v_i dS + \int_V \delta_{ij} \xi_{ij} \delta \lambda dV \quad (2.3)$$

Из зависимостей Коши (1.2) следует, что $\sigma_{ij} \delta \xi_{ij} = 1/2 \sigma_{ij} \delta v_{i,j} + 1/2 \sigma_{ij} \delta v_{j,i}$, но $\sigma_{ij} \delta v_{i,j} = \sigma_{ji} \delta v_{j,i} = \sigma_{ij} \delta v_{j,i}$, поэтому $\sigma_{ij} \delta \xi_{ij} = \sigma_{ij} \delta v_{i,j}$.

Поскольку $\sigma_{ij} \delta v_{i,j} = (\sigma_{ij} \delta v_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} \delta v_i$, то по теореме Остроградского — Гаусса получаем

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \xi_{ij} dV = \int_S \sigma_{ij} \delta v_i \alpha_{nj} dS - \int_V \sigma_{ij,j} \delta v_i dV \quad (2.4)$$

На части поверхности S_2 скорости перемещений не варьируются, поэтому уравнение (2.2) с учетом равенств (2.3) и (2.4) принимает вид

$$\delta\Pi_2 = - \int_V (\sigma_{ij,j} + X_i) \delta v_i dV + \int_{S_1} (\sigma_{ij} \alpha_{nj} - X_{ni}) \delta v_i dS + \int_V \delta_{ij} \xi_{ij} \delta \lambda dV = 0 \quad (2.5)$$

Так как перемещения v_i и множитель Лагранжа λ варьируются независимо, из равенства (2.5) следует справедливость уравнений равновесия (1.1) и (1.6), а также условия несжимаемости (1.3). Таким образом, исходное предположение о том, что множитель Лагранжа есть среднее нормальное напряжение, оказывается верным.

Итак, смешанный вариационный принцип имеет вид (2.2), где функционал Π_2 вычисляется по формуле

$$\Pi_2 = \int_V L dV - \int_V X_i v_i dV - \int_{S_1} X_{ni} v_i dS + \int_V \sigma_0 \delta_{ij} \xi_{ij} dV$$

Заметим, что аналогичный вариационный принцип известен в линейной теории упругости для несжимаемых материалов [6].

Подчеркнем, что в вариационном принципе (2.2) независимо варьируются величины v_i и σ_0 . При формулировке численных методов, основанных на полученном вариационном принципе, задаваемые скорости перемещений и средние нормальные напряжения должны удовлетворять уравнениям (1.2), (1.5) и (1.7), а уравнения равновесия (1.4), (1.6) и условие несжимаемости (1.3) выполняются в результате решения задачи с заданной точностью.

Изложенное является основой для построения вариационных численных методов, в частности МКЭ. Далее сформулирован МКЭ в форме смешанного метода.

3. Смешанный метод конечных элементов. Для получения матрицы жесткости конечного элемента применим к нему сформулированный вариационный принцип. Примем без нарушения общности, что на конечный элемент действуют внешние силы, приложенные к его узлам. Тогда в рассматриваемый момент времени получим

$$\int_{V_e} \delta \{\xi\}^T \{S\} dV + \int_{V_e} \delta \{\xi\}^T \{\sigma_0\} dV + \int_{V_e} \delta \{\sigma_0\}^T \{\xi\} dV = \delta \{q\}^T \{R\} \quad (3.1)$$

где $\{\xi\}$, $\{S\}$, $\{\sigma_0\}$, $\{q\}$, $\{R\}$ — вектора-столбцы скоростей деформаций, компонентов девиатора напряжений, средних нормальных напряжений, скоростей узловых перемещений, узловых усилий рассматриваемого конечного элемента соответственно, V_e — объем конечного элемента; индекс (T) означает операцию транспонирования.

В дальнейшем необходимо располагать соотношением, связывающим скорости узловых перемещений со скоростями деформаций по объему конечного элемента. Для изучения истории нагружения разобьем время процесса деформирования на ряд малых шагов и примем, что в пределах каждого выполняются зависимости Коши

$$\{\xi\} = [B] \{q\} \quad (3.2)$$

где $[B]$ — матрица, определяемая аппроксимацией скоростей перемещений по объему выбранного элемента.

Определяющее уравнение, устанавливающее связь между девиатором напряжений и скоростями деформаций, имеет вид

$$\{S\} = [D] \{\xi\} = [D] [B] \{q\} \quad (3.3)$$

где $[D]$ — квадратная матрица, получаемая по уравнениям теории течения [7].

Представим вектор средних нормальных напряжений в виде

$$\{\sigma_0\} = [G] \{\varphi\} \quad (3.4)$$

где $\{\varphi\}$ — вектор-столбец узловых переменных, а $[G]$ — матрица, определяемая аппроксимацией среднего нормального напряжения по объему конечного элемента.

Подстановка соотношений (3.2), (3.3) и (3.4) в исходное уравнение (3.1) позволяет получить два независимых уравнения (скорости узловых перемещений и средние нормальные напряжения варьируются независимо):

$$[k] \{q\} + [k_1] \{\varphi\} = \{R\}, \quad [k_1] = \int_{V_e} [B]^T [G] dV \quad (3.5)$$

$$[k_2] \{q\} = 0, \quad [k] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV, \quad [k_2] = [k_1]^T$$

где $[k]$ — матрица жесткости конечного элемента, $[k_1]$ — матрица, отражающая условие несжимаемости конечного элемента.

Обобщая уравнения (3.5), полученные для одного элемента, на систему конечных элементов, выводим следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} [K] & [K_1] \\ [K_1]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta\} \\ \{\varphi\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

где $[K]$ — подматрица жесткости всего тела, $[K_1]$ — подматрица, обусловленная условиями несжимаемости всех конечных элементов, $\{\delta\}$, $\{R\}$, $\{\varphi\}$ — вектора-столбцы скоростей узловых перемещений, узловых усилий и узловых переменных сетки конечных элементов.

В уравнении (3.6) матрица жесткости зависит от достигнутого уровня скоростей узловых перемещений. Указанное обстоятельство сильно усложняет задачу из-за необходимости решать на каждом шаге по времени систему нелинейных алгебраических уравнений со многими неизвестными. Для этой цели удобно использовать итерационные методы (методы переменных параметров упругости, метод упругих решений или методы дополнительных деформаций), сводящие нелинейную задачу к последовательности линейных задач.

Интегрирование уравнений (3.6) по времени можно осуществить известными численными методами, в простейшем случае — при помощи метода Эйлера с итерациями [8].

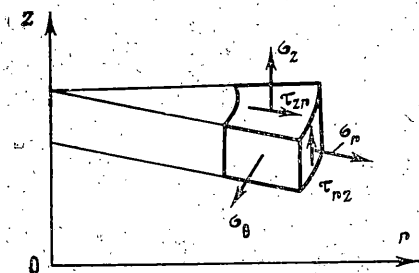
В результате решения системы уравнений (3.6) с учетом граничных условий задачи определяются скорости узловых перемещений и узловые переменные сетки конечных элементов. Затем по соотношениям (3.2) — (3.4) вычисляются скорости деформаций, компоненты деватора напряжений и среднее нормальное напряжение во множестве точек деформируемого тела.

В конце интервала времени координаты узлов сетки конечных элементов изменяются и расчет продолжается далее.

Прежде чем перейти к конкретизации полученных соотношений в случае осесимметричной задачи, отметим особенности сформулированного численного метода. С одной стороны, система уравнений (3.6) симметрична, что

уменьшает требуемый объем памяти ЭВМ, с другой — эта система не является ленточной (в отличие, например, от алгоритма [2]), что ведет к большим затратам памяти ЭВМ. Необходимо отметить также, что в системе (3.6) ряд диагональных коэффициентов обращается в нуль. Это сужает множество возможных численных методов решения этой системы уравнений.

4. Осесимметричная задача. В полярных координатах r, θ, z имеем (фиг. 1)



Фиг. 1

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}, \quad S = \begin{Bmatrix} S_z \\ S_r \\ S_\theta \\ S_{rz} \end{Bmatrix}, \quad \xi = \begin{Bmatrix} \xi_z \\ \xi_r \\ \xi_\theta \\ \eta_{rz} \end{Bmatrix}$$

Здесь η_{rz} — скорость угловой деформации. Матрица $[D]$ имеет вид

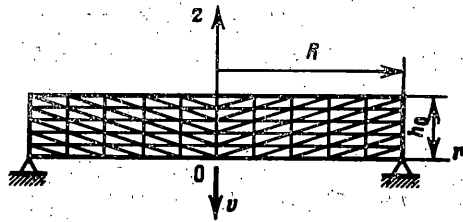
$$[D] = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\xi_e} [D_0], \quad [D_0] = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{Bmatrix}$$

где σ_e и ξ_e — эквивалентные напряжение и скорость деформаций, связанные между собой принятой формулировкой технической теории ползучести.

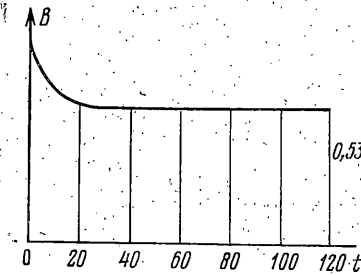
В частности, по теории течения в формулировке $\xi_e = B(t)\sigma_e^n$, где n и $B(t)$ — постоянная и функция времени при определенной температуре, получаем

$$[D] = {}^{2/3}\omega [D_0], \quad \omega = [\xi^{1-1/n} \sqrt[n]{B(t)}]^{-1} \quad (4.1)$$

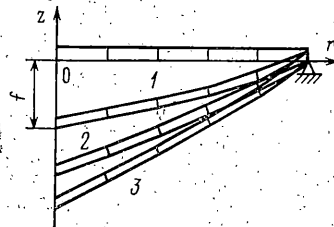
Численный алгоритм можно построить и на основе теории упрочнения [2].



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

В соотношении (4.1) функция $B(t)$ линеаризуется в пределах интервала времени. На первом шаге величина коэффициента ω не определена, поэтому в начальный момент времени величина ξ_e принимается заведомо малой, например 10^{-4} , а функция $B(t)$ считается равной величине в конце первого шага.

Примем конечный элемент в виде осесимметричного кольца с треугольным поперечным сечением. В этом случае скорости перемещений задаются линейными полиномами и можно воспользоваться выражением матрицы $[B]$, приведенным в [9]. Исследования показали, что для получения решения, близкого к точному, требуется значительное число конечных элементов. Сказанное дает основание считать напряжения и скорости деформаций постоянными по объему конечного элемента и относить их к его центру тяжести. Это позволяет сильно сократить объем вычислений.

С учетом сделанного допущения матрица жесткости элемента вычисляется следующим образом:

$$[k] = \frac{1}{3} \pi \omega [B]^T [D_0] [B] r^0 F \quad (4.2)$$

где r^0 — координата центра тяжести конечного элемента, F — площадь поперечного сечения элемента, $[B]$ — матрица $[B]$, определенная для центра тяжести элемента.

Определим матрицу $[k_1]$. Примем среднее нормальное напряжение постоянным в пределах одного элемента. Это не противоречит общему правилу [3] о том, что порядок аппроксимации гидростатического давления меньше или равен порядку аппроксимации поля перемещений. Таким образом, из соотношения (3.4) следует, что

$$\{\sigma_0\} = \sigma_0 \{\alpha\}, \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Следовательно

$$[k_1] = 2\pi [B]^T \{\alpha\} r^0 F \quad (4.3)$$

Полученные соотношения (4.2) и (4.3) позволяют найти коэффициенты системы уравнений (3.6), в которой вектор $\{\varphi\}$ принимает вид

$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{01} \\ \vdots \\ \sigma_{0l} \end{Bmatrix}$$

где $\sigma_{0i} = \sigma_0$ в i -м конечном элементе, l — число элементов. Размерности векторов $\{\delta^*\}$ и $\{R\}$: $[2m \times 1]$, где m — число узловых окружностей сетки конечных элементов. Размерности матриц $[K]$: $[2m \times m]$, $[K_1]$: $[2m \times l]$ и $[K_1]^T$: $[l \times 2m]$. Вектор $\{R\}$ — вектор-столбец внешних усилий, действующих по всей длине узловых окружностей.

На основе сформулированного численного метода создана вычислительная программа, пригодная для решения широкого класса осесимметричных задач горячего формоизменения. В качестве примера использования составленной программы вычислений рассмотрим процесс горячего деформирования мембраны.

В начальный момент времени центр круглой, свободно опертой плоской мембраны (фиг. 2) начинает перемещаться с некоторой скоростью $v(t)$. При расчетах принималось, что за малый промежуток времени Δt скорость увеличивается по линейному закону от нуля до номинальной величины, поддерживаемой в дальнейшем постоянной. Соотношение размеров недеформированной мембраны считалось $h_0/R = 0,05$. На фиг. 2 изображена конечноэлементная модель мембраны, равномерно разбитой на 50 осесимметричных кольцевых элементов. Материал мембраны — алюминиевый сплав, а температура формоизменения 450° . При указанной температуре функция времени изображена на фиг. 3, показатель степени $n=5$, наименьшее значение $B(t) = 0,53 \cdot 10^{-10}$ МПа $^{-5}$ с $^{-1}$.

На фиг. 4 изображена мембрана в деформированных состояниях в различные моменты времени (f — перемещение центра мембраны): 1 — $t=39$ с, $f/h_0=5,2$; 2 — $t=67$ с, $f/h_0=9$; 3 — $t=87$ с, $f/h_0=11,6$.

Из расчетов следует, что сечения, первоначально нормальные к недеформированной срединной поверхности, остаются почти прямыми и нормальными к деформированной срединной поверхности. Заметим, что аналогичный результат получен в [3] при расчете нелинейно-упругой мембраны под давлением. Таким образом, гипотезы Кирхгофа — Лива справедливы и при относительно больших перемещениях.

Скорости перемещений частиц в радиальном направлении значительно меньше скоростей перемещений в осевом направлении.

При деформировании мембраны толщина уменьшается оставаясь практически постоянной вдоль меридиана (при $f/h_0=11,6$ толщина составляет $\sim 70\%$ от исходной величины).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойков В. Н., Лазаренко Э. С., Малинин Н. Н. Кратковременная ползучесть сплава Д16 в условиях сжатия при больших деформациях. — Изв. вузов. Машиностроение, 1973, № 12, с. 164—166.
2. Романов К. И. Исследование методом конечных элементов горячей осесимметричной осадки. — Машиноведение, 1978, № 5, с. 79—86.
3. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976, 464 с.
4. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966, 752 с.
6. Herrmann L. R. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. — AIAA Journal, 3, 1896, 1965. — Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 10, с. 139—144.
7. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.
8. Видерман В. Л. Некоторые вычислительные методы решения задач строительной механики, проводимых к обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Расчеты на прочность: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1976, вып. 17, с. 8—36.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1980