

539.3

О ДИФРАКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

КОВШОВ А. Н., НЕЩЕРЕТОВ И. И.

Численно строится решение задачи о дифракции плоской нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости, находящейся в упругой среде.

Система уравнений линейной динамической теории упругости записывается в полярных координатах и имеет вид гиперболической системы первого порядка относительно скоростей и напряжений. Во внутренних точках применяется схема второго порядка точности типа «пространственный крест». При расчете граничных точек используются бихарактеристические соотношения. Для регуляризации разностного решения применяется сглаживание. Основное внимание уделено обследованию полей напряжений в окрестности полости.

Вопросы, связанные с дифракцией поперечных волн, изучались в [1-8]. Дифракция стационарных упругих волн на гладких цилиндрах рассмотрена в [1]. Плоские задачи, связанные с взаимодействием стационарной волны сдвига как с единичным включением, так и с системой периодически расположенных цилиндрических включений и полостей, исследовались в [2-6]. Задача о дифракции нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости, свободной от напряжений, решалась в [7, 8].

1. На цилиндрическую полость, находящуюся в безграничной упругой среде, падает поперечная плоская волна. Требуется определить поле напряжений около полости и движение ее стенок. Задача сводится к отысканию решения уравнений плоской динамической теории упругости с начальным условием, задаваемым падающей волной, и граничными условиями на полости. Пусть плотность среды $\rho_0=1$, скорость продольных и поперечных волн $a=(\lambda+2\mu)^{1/2}$, $b=\mu^{1/2}$; радиус полости r_0 , λ , μ — параметры Ламе.

Введем безразмерные величины $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}'/(\lambda+2\mu)$, $u_i=u_i'/a$, $r=r'/r_0$, $t=t'a/r_0$, где σ_{ij}' — компоненты тензора напряжений, u_i' — компоненты вектора скорости, t' и r' — размерные время и радиус. Далее в системе единиц примем $a=1$ и будем использовать следующие обозначения: $\sigma_{rr}=\sigma$, $\sigma_{\theta\theta}=s$, $\sigma_{r\theta}=\tau$, $u_r=u$, $u_\theta=v$. Тогда система уравнений относительно напряжений и скоростей примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{,t} &= u_{,r} + (1-2\mu)(v_{,\theta} + u)/r \\ s_{,t} &= (1-2\mu)u_{,r} + (v_{,\theta} + u)/r \\ \tau_{,t} &= \mu v_{,r} + \mu(u_{,\theta} - v)/r \\ u_{,t} &= \sigma_{,r} + \tau_{,\theta}/r + (\sigma - s)/r, \quad v_{,t} = s_{,\theta}/r + 2\tau/r + \tau_{,r} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Запятая с индексом означает частную производную по соответствующему аргументу.

Решение задачи о дифракции волны определяется начальными и граничными условиями. Начальное условие состоит в том, что при $t=0$ напряжения и скорости совпадают с напряжениями и скоростями, которые задаются падающей поперечной волной формы $f(\xi)$. При этом за $t=0$ принимается момент, когда фронт волны касается полости (фиг. 1).

Будем считать, что поверхность полости свободна от напряжений. Тогда граничные условия при $r=1$ будут иметь вид $\sigma=0$, $\tau=0$.

Пользуясь линейностью задачи, будем искать решение системы (1.1) в виде $W=W_0+W_1$, где W_0 — вектор с компонентами σ , s , τ , u , v , задаваемыми падающей волной. Для W_1 получим задачу с нулевыми начальными и ненулевыми граничными условиями. При $r=1$ напряжения от падающей волны, вычисленные в отсутствие полости, выражаются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= -f(\xi) \sin 2\theta, & \tau_0 &= -f(\xi) \cos 2\theta, \\ \xi &= \sqrt{\mu t} + \cos \theta - 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Поэтому для W_1 получим следующие условия на границе $r=1$:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= f(\xi) \sin 2\theta, \\ \tau_1 &= f(\xi) \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для построения численного решения необходимо ограничить расчетную область некоторой границей, на которой нужно поставить дополнительные условия. Выберем эту границу в виде окружности $r=R \gg 1$, а условие на ней возьмем исходя из соображений, применяемых в [9–11].

Будем считать, что вблизи $r=R$ продольное и поперечное движение локально описывается плоскими волнами, распространяющимися по радиусу. Поэтому при $r=R$ положим

$$\sigma_1 + u_1 = 0, \quad \tau_1 + \sqrt{\mu} v_1 = 0 \quad (1.4)$$

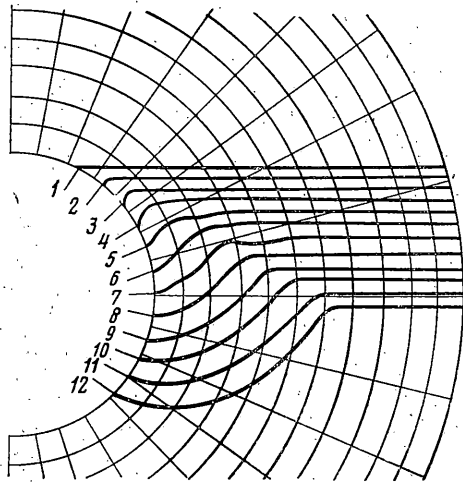
Построив решение W_1 для $t > t_0$ и сложив его с решением, задаваемым падающей волной, найдем решение задачи о дифракции поперечной волны на цилиндрической полости, свободной от напряжений (ниже единица в индексе у соответствующих величин опускается).

2. Решение строилось при помощи метода конечных разностей. Расчетная область в полярных координатах представляет собой прямоугольник $1 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, который разбивается на ячейки прямыми $\theta_j = \Delta\theta \times j$, $r_i = (1 + \Delta\theta)^i$.

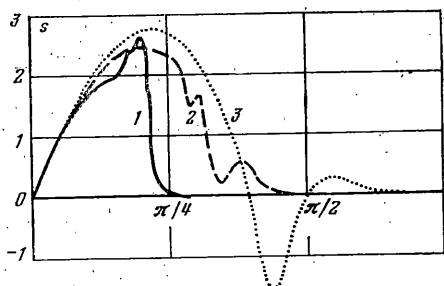
Переменный шаг h_i по координате r берется таким, чтобы $h_i = r_i \Delta\theta$. При этом разбиении форма ячеек близка к квадратной во всей расчетной области. Напряжения σ , s , τ определены в узлах сетки, а скорости u , v — в центрах ячеек. Вводится расщепление по времени; при этом функции u , v определены для $t = \Delta t(k - 0,5)$, а σ , s , τ — для $t = \Delta t k$ ($k = 0, 1, \dots, L$).

Во внутренних точках используется схема типа пространственный крест. При этом уравнения для скоростей аппроксимируются со вторым порядком точности по всем переменным, а в ошибку аппроксимации производных по r от напряжений войдет член $h_i - h_{i-1} \approx r_i \Delta\theta^2$. Применение переменного шага по r хотя и увеличивает ошибку аппроксимации, но позволяет уменьшить влияние границы $r=R$ и условий на ней на решение [6], а также делает размеры расчетной области удовлетворительными с точки зрения объема оперативной памяти ЭВМ. Граница расчетной области проходит по углам сетки, поэтому граничные условия должны формулироваться для величин σ , s , τ .

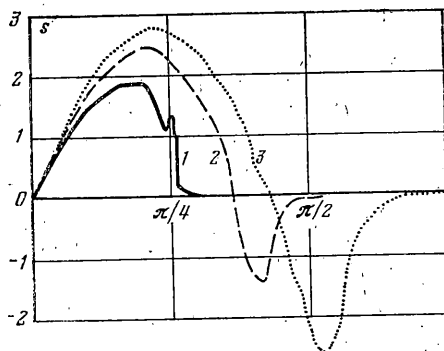
При $r=1$ величины σ и τ определяются из условий (1.3). При $r=R$ — из условий (1.4), скорости экстраполируются на границу $r=R$ при $t = (k - 0,5)\Delta t$. Если $\theta=0$ и $\theta=\pi$, имеют место условия антисимметрии. В силу того что падающая волна поперечная, при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ выполняется условие $\sigma=0$, $s=0$, $\tau_\theta=0$.



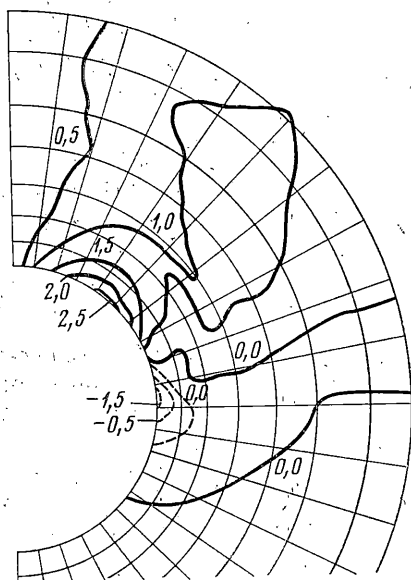
Фиг. 1



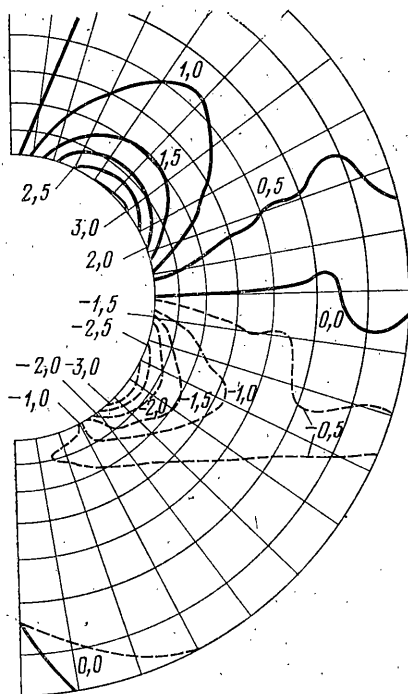
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Для определения s при $r=1$, R использовались бихарактеристические соотношения для системы (1.1) [11]:

$$s_{,t} - (1-2\mu)\sigma_{,t} - 4\mu(1-\mu)(v_{,0}+u)/r=0 \quad (2.1)$$

Чтобы гасить колебания разностного решения, возникающие при резких формах падающей волны и вызванные использованием схемы второго порядка точности, применяется сглаживание решения, аналогичное использованному в [41, 42].

В одномерном приближении применяемое сглаживание имеет вид

$$f_j^F = \omega |f_{j+1} - f_j| f_{j+1} + f_j (1 - \omega |f_{j+1} - f_j| - \omega |f_j - f_{j-1}|) + \omega |f_j - f_{j-1}| f_{j-1} \quad (2.2)$$

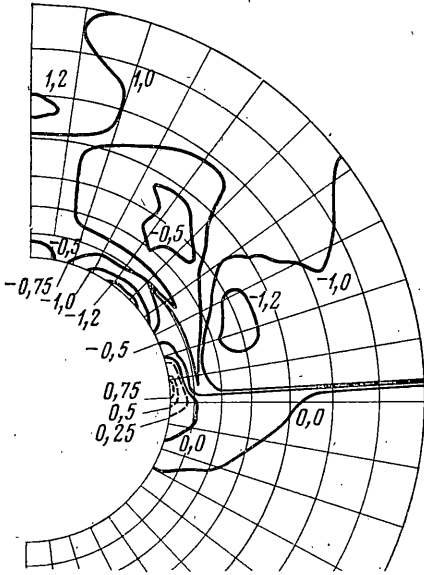
Большое значение коэффициента сглаживания ω приводит к сильному заглаживанию решения малое — к появлению сильных осцилляций скоростей u и v . В результате численных экспериментов было выбрано значение $\omega=0,075$. Для уменьшения выглаживания решения при больших значениях времени t сглаживание применялось при $t \leq 4$ на каждом вто-

ром слое по времени, а при $t > 4$ — на каждом десятом. Форма падающей волны принималась в виде «ступеньки», что позволяло получить методом установления решение соответствующей статической задачи.

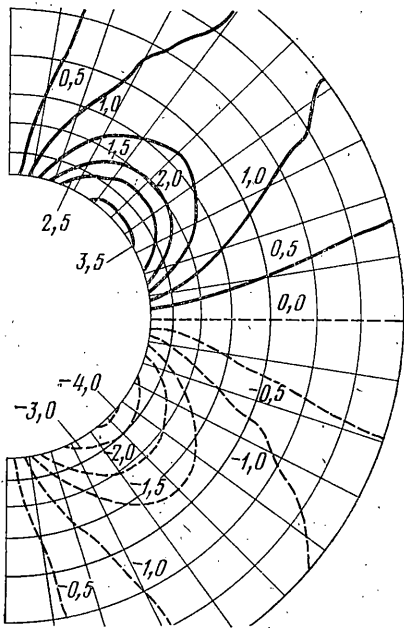
3. Поскольку падающая волна поперечная, это приводит к интересному явлению распространения возмущения в окрестности полости впереди падающей волны. При продвижении падающей волны локальный угол падения волны на полость увеличивается и при некотором t_* , таком, что $\cos(\arcsin(\mu)^{1/2}) = 1 - t_*(\mu)^{1/2}$, имеет место полное внутреннее отражение и вблизи полости впереди фронта падающей волны появляется возмущение.

Для случая стационарных колебаний возмущения такого типа, называемые волнами соскальзывания, были изучены в [13, 14]. В рассматриваемом нестационарном случае аналитически описать распространение этого возмущения не удастся из-за сложности задачи. Поэтому был произведен подробный расчет на мелкой сетке, чтобы определить скорости и напряжения в области, занятой этим возмущением.

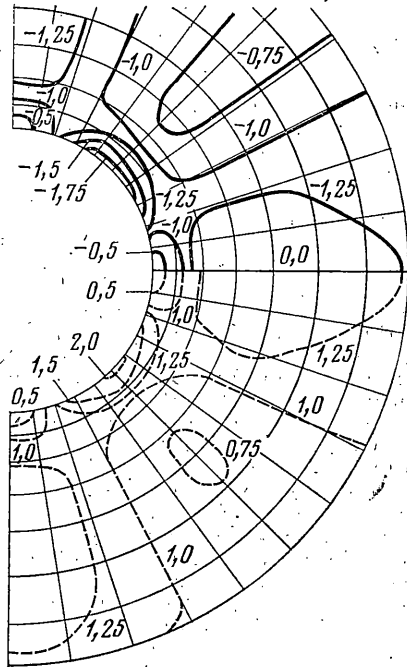
На фиг. 1–3 представлены результаты расчетов на сетке 34×91 ($\Delta\theta \approx 0,03$, $\Delta r_0 = 0,03$). Сглаживание отсутствовало. На фиг. 1 изображены последовательные положения фронта возмущения в различные моменты времени ($t(\mu)^{1/2} = 0,09 - 1,13$). За фронт принимается линия уровня напряжения $s = 0,01$. Результат можно интерпретировать как сложение продольных волн, распространяющихся по касательным из соответствующих точек на полости.



Фиг. 6



Фиг. 7

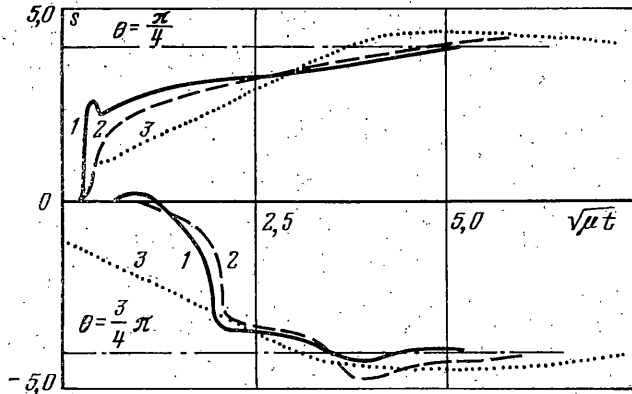


Фиг. 8

Распределение кольцевого напряжения s на контуре в различные моменты времени показано на фиг. 2 ($\mu=0,2$) и на фиг. 3 ($\mu=0,4$). Кривые 1, 2, 3 относятся к времени $t(\mu)^{1/2}=0,28; 0,66; 1,04$. На кривых 2, 3 видны возмущения в продольном предвестнике. Отметим, что напряжения s в области возмущения достигают больших значений и меняют знак в зависимости от значений параметра μ .

Ниже анализируются компоненты тензора напряжения s и главное максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = 1/2(\sigma - s) [1 + 4\tau^2 / (\sigma - s)^2]^{1/2}$. Как показывают расчеты, эти величины принимают большие значения по сравнению с радиальными напряжениями σ . На фиг. 4–8 представлены изолинии функций $s(r, \theta, t)$ и $\tau_{\max}(r, \theta, t)$ для различных моментов времени. Вычисления проводились для $\mu=0,3$ на сетке $(r, \theta) 46 \times 61$. На фигурах показана область $r \leq 2,8$, где имеются наибольшие концентрации напряжений.

Рассмотрим поле кольцевого напряжения $s(r, \theta, t)$. Оно дает качественную информацию о возможных зонах разрушения с образованием радиальных трещин. На фиг. 4 ($t=1,81$) видно положение фронта поперечной волны, при этом возмущения



Фиг. 9

в продольном предвестнике достигли точек контура $\theta=130^\circ$. Зона максимальных напряжений ($s=2,5$) мала и локализована около свободной границы ($\theta=34-50^\circ$). Зона повышенной концентрации ($s>1$) довольно обширна и занимает область до $r=2,8$ ($\theta=10-66^\circ$). Вместе с тем появляется зона сжимающих напряжений ($\theta=75-96^\circ$), которая доходит до $r=1,25$. Минимальная величина $s=-1,5$ вблизи $\theta=90^\circ$.

Фиг. 5 соответствует $t=3,99$. В верхней части процесс близок к установившемуся, нижняя — характерна для нестационарного процесса. Зона сжимающих напряжений значительна и занимает пространство от $\theta=\pi/2$ до $\theta=\pi$. Максимальное и минимальное напряжение $|s|=3$ и зоны их равны по размерам и локализованы в углах, близких к стационарным распределениям $\theta=\pi/4$, $\theta=3\pi/4$. Изолинии повышенной концентрации для растяжения имеют вид, близкий к стационарному. Зона минимальных напряжений $s<-1$ значительна и занимает $\theta=96-150^\circ$ и $r \approx 1,6$. Предвестник имеет, главным образом, сжимающие напряжения.

Поля изолинии τ_{\max} дают качественную информацию о возможных зонах разрушения путем сдвига. Наименьшие значения $\tau_{\max}=-1,2$ на фиг. 6 ($t=1,81$) локализованы в следующих областях: $\theta=0-6^\circ$, $r=2,1$; $\theta=31-47^\circ$, $r \sim 1$; $\theta=62-76^\circ$, $r=1,4-1,7$. Наибольшие значения $\tau_{\max}=0,75$ при этом расположены в зоне $\theta=\pi/2$, $r=1$. В продольном предвестнике τ_{\max} положительные.

Применяемая разностная схема позволяет методом установления получить решение соответствующей статической задачи. В процессе установления можно выявить отличие в напряженном состоянии при динамическом и статическом нагружениях. Изолинии функций s и τ_{\max} при $t=9, 12$ показаны на фиг. 7, 8 соответственно. Распределение напряжения s на контуре для статической задачи с заданным касательным напряжением τ_0 на бесконечности имеет вид $s=4\tau_0 \sin 2\theta$. Максимальные значения $|s|$ принимает при $\theta=\pi/4$ и $\theta=3\pi/4$. При динамическом нагружении, как показывают расчеты, s принимает максимальные значения в тех же точках, при этом сами значения несколько превышают статические.

На фиг. 9 приведены результаты расчетов для s как функции $t(\mu)^{1/2}$ в точках контура при $\theta=\pi/4$ и $\theta=3\pi/4$. Кривые 1, 2 соответствуют $\mu=0,1; 0,4$. Максимальное значение $|s|$ слабо зависит от μ . Так, разница между $|s|_{\max}(\mu=0,1)$ и $|s|_{\max}(\mu=0,4)$ равна примерно 6%. Видно, что при $(\mu)^{1/2}t > 6$ численное решение выходит на статическое. Кривая 3 — результат [7], в которой решение строится методом разделения переменных. Сходимость полученных рядов, как указывается в этой работе, весьма медленная для $(\mu)^{1/2}t < 2$, поэтому результат достоверно описывает состояние, предшествующее статическому. Для $(\mu)^{1/2}t < 2$ малое число удерживаемых членов

ряда приводит к значительным ошибкам. Так, в [7] приведен результат вычисления функции $s(t)$ при $\theta=0$. Дано вычисленное максимальное значение, равное $0,119 \tau_0$, хотя из точного выражения, полученного в [8], следует, что при $\theta=0$ $s(t)=0$.

Сопоставление результатов с данными, полученными в [11], свидетельствует о большой динамичности процесса дифракции поперечной волны по сравнению с продольной. Так, отношение максимальных значений динамического и статического напряжения s равно 1,15 при дифракции поперечной волны и 1,02 — при дифракции продольной волны. Время выхода решения на квазистатический режим, выраженное во временах пробега волн по радиусу полости, для поперечной волны составляет $t=4-5$, для продольной волны $t=7-8$.

Авторы благодарят Н. В. Зволинского за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яворская И. М. Дифракция плоских стационарных упругих волн на гладких выпуклых цилиндрах. — ПММ, 1965, т. 29, № 3, с. 493—508.
2. Maw C. C., Mente L. J. Dynamic stresses and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonic shear waves. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, v. 30, № 4, p. 598—604.
3. Головчан В. Т. Дифракция волны сдвига на бесконечном ряде цилиндрических полостей. — Прикл. механика, 1971, т. 7, № 3, с. 41—46.
4. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
5. Головчан В. Т. Дифракция пружной поперечной волны на эллиптических цилиндрах в напi в просторi. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 3, с. 246—249.
6. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
7. Baron M. L., Matthews A. T. Diffraction of a shear wave by a cylindrical cavity in an elastic medium. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, v. 29, № 1, p. 205—207.
8. Rao Y.-H., Mow C. C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. New York — London: Hieger, 1973. 693 p.
9. Скобеев А. М. Взаимодействие упругой волны с пластинкой. — ПМТФ, 1972, № 2, с. 74—85.
10. Скобеев А. М. Дифракция упругой волны на диске. — ПМТФ, 1972, № 3, с. 139—150.
11. Ковшов А. Н. О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 115—121.
12. Ляхов В. Н. Сглаживание и искусственная вязкость при расчетах двумерных нестационарных течений с разрывами. — В кн.: Численные методы в механике сплошной среды. Т. 5. Вып. 3. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974, с. 69—74.
13. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
14. Викторов И. А. Поверхностные волны на цилиндрических поверхностях кристаллов. — Акуст. ж., 1974, № 2, с. 199—206.

Москва

Поступила в редакцию
16.II.1981