МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1982

УДК 539.3

О СВОЙСТВАХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

ИЛЬЮШИНА Г. А.

Из основного термодинамического равенства для необратимых процессов $\varphi(T,\ \varepsilon)+T^{\cdot}s(T,\ \varepsilon)-\sigma^{mn}(T,\ \varepsilon)\,\varepsilon_{mn}{}^{\cdot}(t)\equiv f^t=0$ и вариационного принципа $\delta f^t=0$ получены определяющие функциональные уравнения для тензора напряжений и энтропии. Рассмотрен пример, приводящий к теории термовязкоупругости.

Основное термодинамическое соотношение как следствие закона сохранения энергии u и баланса энтропии s, как известно, имеет вид

$$\varphi^t(T,\ \varepsilon)+T^{\cdot}s^t(T,\ \varepsilon)-\sigma_t{}^{mn}(T,\ \varepsilon)\,\varepsilon^{\cdot}{}_{mn}(t)\equiv f^t=0 \tag{1}$$

где T — температура, $\varepsilon=(\varepsilon_{mn};\ m, n=1, 2, 3)$ — тензор деформации, $\sigma=(\sigma^{mn};\ m, n=1, 2, 3)$ — тензор напряжений, $\varphi=\psi^{\cdot}+w^*$, причем ψ — свободная энергия ($\psi=u-Ts$), $w^*\geqslant 0$ — рассеяние [1]. Индекс времени ($t, \tau, \xi, \ldots$), присвоенный функциям $\varphi(\tau)$, $s(\tau)$, $\sigma(\tau)$ сверху или снизу, означает, что они рассматриваются как функционалы процесса

$$^{\circ}(\tau)\equiv(\varepsilon_{ij}(\tau))\equiv(\alpha T(\tau),\ \varepsilon(\tau))\equiv\begin{Vmatrix}\alpha T & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ 0 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ 0 & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{Vmatrix}\equiv\begin{Vmatrix}\varepsilon_{00} & 0\\ 0 & \varepsilon_{mn}\end{Vmatrix} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{00}\equiv\alpha T\ \ (\alpha>0)\qquad (i, j, k, l=0, 1, 2, 3;\ m, n, p, q=1, 2, 3)$$

т. е.

$$\varphi(t)=\varphi^t(\varepsilon^{\circ}(\tau)),\quad \sigma(t)=\sigma_t(\varepsilon^{\circ}(\tau)),\quad w^*(t)=w_t{}^*(\varepsilon^{\circ}(\tau)) \tag{3}$$

Вводя по аналогии с [2] обобщенный тензор напряжений $\sigma^{\circ}=(-s/\alpha, \sigma)$

$$\sigma^{\circ}(\tau)\equiv(\sigma^{ij}(\tau))=(-s(\tau)/\alpha,\ \sigma(\tau))\equiv\begin{Vmatrix}\sigma_{00} & 0\\ 0 & \sigma_{mn}\end{Vmatrix} \tag{4}$$

запишем основное соотношение (1) в виде

$$f^t(\varepsilon^{\circ})\equiv\varphi^t(\varepsilon^{\circ})-\sigma_t{}^{\circ}(\varepsilon^{\circ})\,\varepsilon^{\circ\cdot}(t)=\varphi^t(\varepsilon^{\circ})-\sigma_t{}^{ij}(\varepsilon^{\circ})\,\varepsilon_{ij}{}^{\circ}(t)=0 \tag{5}$$

В [2] в основу вывода свойства функционала $\sigma_t{}^{\circ}$ была принята естественная для (5) гипотеза, вытекающая из справедливости соотношения (5) для произвольных физических процессов $\varepsilon^{\circ}(t)$, о равенстве нулю первой вариации функционала f, т. е. $\delta f^t=0$.

Ниже ставится задача об определении свойств функционала $\sigma_t{}^{\circ}$ по заданному функционалу $\varphi^t(\varepsilon^{\circ}(\tau))$, а также о следствиях, вытекающих из дополнительного задания внутренней энергии u^t и тепловыделения — $\Phi_T{}^t$.

Рассматривается множество всех непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[0,\ t]$ процессов $\varepsilon^{\circ}(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant t<+\infty$, $\varphi^{\tau}(\varepsilon^{\circ})$ — заданный на этом множестве известный функционал, $\sigma_{\tau}{}^{\circ}(\varepsilon^{\circ})$ — искомый функционал. Предполагается, что φ^{τ} и $\sigma_{\tau}{}^{\circ}$ имеют первые вариации, отличные от тождественно нулевого функционала, представляющие собой линейные непрерывные функционалы, действующие в пространстве $C^{01}[0, \tau]$, $0\leqslant\tau\leqslant t$. Элементы из $C^{01}[0, \tau]$ обозначаются дальше $\delta\varepsilon^\circ(\xi)$ $(0\leqslant\xi\leqslant\tau)$; $\delta\varepsilon^{\circ\cdot}(\xi)\equiv(d/d\xi)\delta\varepsilon^\circ(\xi)$ — непрерывная функция

$$\|\delta\varepsilon^\circ\|=\sup_{\xi\in[0,\tau]}|\delta\varepsilon^\circ(\xi)|+\sup_{\xi\in[0,\tau]}|k\delta\varepsilon^{\circ\cdot}(\xi)| \quad (k>0)$$

где k — постоянная.

Используя теорему Ф. Рисса о представлении линейного функционала в пространстве непрерывных функций [3] и указанные предположения, можно утверждать, что первые вариации, или дифференциалы Фреше, функционалов φ и σ° имеют вид интегралов Стилтьеса

$$\begin{gathered}\delta\varphi^\tau=\int_0^\tau\delta\varepsilon^{\circ\cdot}(\xi)\,d_\xi\Phi^\circ(\tau,\xi)+A^\circ(\tau)\delta\varepsilon^\circ(0)\\ \delta\sigma_\tau^\circ=\int_0^\tau\delta\varepsilon^{\circ\cdot}(\xi)\,d_\xi S^\vee(\tau,\xi)+B^\vee(\tau)\delta\varepsilon^\circ(0)\end{gathered}\qquad(6)$$

где Φ° и $S^\vee$ — функции с ограниченной вариацией по ξ, определенные однозначно с точностью до аддитивной постоянной по τ. Соотношения (6) можно записать в следующей форме:

$$\begin{gathered}\delta\varphi^\tau=\int_0^\tau\delta\varepsilon_{ij}{}^{\cdot}(\xi)\,d_\xi\Phi^{ij}(\tau,\xi)+A^{ij}(\tau)\delta\varepsilon_{ij}(0)\\ \delta\sigma_\tau^{ij}=\int_0^\tau\delta\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(\xi)\,d_\xi S^{ijkl}(\tau,\xi)+B^{ijkl}\delta\varepsilon_{kl}(0)\end{gathered}\qquad(7)$$

Варьируя уравнение (5), т. е. беря главную линейную часть приращения функционала f^τ и приравнивая ее нулю, получаем равенство, справедливое для любого непрерывно дифференцируемого процесса

$$\begin{gathered}\int_0^\tau\delta\varepsilon^{\circ\cdot}(\xi)\,d_\xi[\Phi^\circ(\tau,\xi)-\varepsilon^{\circ\cdot}(\tau)S^\vee(\tau,\xi)-\sigma^\circ(\tau)h(\tau,\xi)]+\\ +(A^\circ(\tau)+B^\vee(\tau)\varepsilon^{\circ\cdot}(\tau))\delta\varepsilon^\circ(0)=0\\ h(\tau,\xi)=1\ (\xi=\tau),\quad h(\tau,\xi)=0\quad(0\leqslant\xi<\tau)\end{gathered}\qquad(8)$$

В компонентах (8) имеет вид

$$\begin{gathered}\int_0^\tau\delta\varepsilon_{ij}{}^{\cdot}(\xi)\,d_\xi[\Phi^{ij}(\tau,\xi)-\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(\tau)S^{ijkl}(\tau,\xi)-\sigma^{ij}(\tau)h(\tau,\xi)]+\\ +(A^{ij}(\tau)+B^{ijkl}(\tau)\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(\tau))\delta\varepsilon_{ij}(0)=0\end{gathered}$$

Вспомогательное утверждение [3]. Пусть

$$\int_0^\tau F(\xi)\,d_\xi G(\tau,\xi)=0,\quad \xi\in[0,\tau]$$

для любой непрерывной функции $F(\xi)$, причем $G(\tau,\xi)$ — фиксированная функция с ограниченной вариацией. Тогда $G(\tau,\xi)=G(\tau,0)=G(\tau,\tau)$ для любой точки ξ, в которой $G(\tau,\xi)$ непрерывна.

Рассмотрим теперь всевозможные непрерывно-дифференцируемые процессы $\delta\varepsilon^\circ(\xi)$, для которых $\delta\varepsilon^\circ(0)=0$. Тогда из равенств (8) и вспомогательного утверждения следует уравнение

$$\Phi^\circ(\tau,\xi)-\varepsilon^{\circ\cdot}(\tau)S^\vee(\tau,\xi)-\sigma^\circ(\tau)h(\tau,\xi)=$$
$$=\Phi^\circ(\tau,\tau)-\varepsilon^{\circ\cdot}(\tau)S^\vee(\tau,\tau)-\sigma^\circ(\tau)=\Phi^\circ(\tau,0)-\varepsilon^{\circ\cdot}(\tau)S^\vee(\tau,0)$$

справедливое для всех $\xi\in[0,\tau]$, кроме некоторого конечного или счетного множества M. Отсюда получим уравнение

$$\begin{aligned}\sigma^\circ(\tau)&=\Phi^\circ(\tau,\tau)-\Phi^\circ(\tau,\xi)-\varepsilon^{\circ\cdot}(\tau)\left(S^\vee(\tau,\tau)-S^\vee(\tau,\xi)\right)=\\&=\Phi^\circ(\tau,\tau)-\Phi^\circ(\tau,0)-\varepsilon^{\circ\cdot}(\tau)\left(S^\vee(\tau,\tau)-S^\vee(\tau,0)\right)\end{aligned}\tag{9}$$

справедливое для тех же ξ.

Если в некоторой правой (левой) полуокрестности точки $\tau_0\in[0,\tau]$ не содержатся точки множества M, то в равенстве (9) можно перейти к пределу при $\xi\to\tau_0\pm0$:

$$\sigma^\circ(\tau)=\Phi^\circ(\tau,\tau)-\Phi^\circ(\tau,\tau_0\pm0)-\varepsilon^{\circ\cdot}(\tau)\left(S^\vee(\tau,\tau)-S^\vee(\tau,\tau_0\pm0)\right)$$

Обозначим $\Phi^\circ(t,t)-\Phi^\circ(t,t_0\pm0)\equiv\Delta\Phi^\circ(t)$, $S^\vee(t,t)-S^\vee(t,t_0\pm0)=\Delta S^\vee(t)$, тогда уравнение примет вид

$$\sigma^\circ(t)=\Delta\Phi^\circ(t)-\varepsilon^{\circ\cdot}(t)\Delta S^\vee(t)\tag{10}$$

Такое представление связи обобщенного тензора напряжений с функционалом φ в компонентах принимает вид

$$\sigma^{ij}(t)=\Phi^{ij}(t,t)-\Phi^{ij}(t,t_0\pm0)-\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(t)\left[S^{ijkl}(t,t)-S^{ijkl}(t,t_0\neq0)\right]\tag{11}$$

где тензор $S^\vee(t)\equiv S_t{}^\vee(\varepsilon^\circ)$ должен удовлетворять исходному уравнению (5), т. е.

$$L^t(\varphi)\equiv\varepsilon^{\circ\cdot}(t)\Delta\Phi^\circ(t)-\varphi^t=\varepsilon^{\circ\cdot}(t)\varepsilon^{\circ\cdot}(t)\Delta S^\vee(t)\tag{12}$$

Отсюда следует, что если при заданном φ^t выполняется равенство $L^t(\varphi)\equiv0$, то решением уравнения (12) является $\Delta S^\vee(t)=0$ и, следовательно

$$\sigma^\circ(t)=\Delta\Phi^\circ(t)\tag{13}$$

Если же при заданном φ^t имеем $L^t(\varphi)\equiv\varphi^\vee(t)\varepsilon^{\circ\cdot}(t)\varepsilon^{\circ\cdot}(t)$, то решением уравнения (12) является $\Delta S^\vee(t)=\varphi^\vee(t)$, и потому

$$\sigma^\circ(t)=\Delta\Phi^\circ(t)-\varepsilon^{\circ\cdot}(t)\varphi^\vee(t)\tag{14}$$

Таким образом, задание функционала φ^t, вообще говоря, на основании вариационного принципа $\delta f^t=0$ не определяет полностью функционал $\sigma^\circ(t)$, а устанавливает для него функциональное уравнение (11).

Если кроме φ^t задан еще функционал внутренней энергии $u^t(\varepsilon^\circ)$, то для свободной энергии ψ (по ее определению) получаем выражение

$$\psi^t=u^t-Ts^t\tag{15}$$

После этого уравнение теплопроводности [1] может быть записано в виде

$$u^{\cdot t}=\sigma_t{}^\circ\varepsilon^\circ(t)-\operatorname{div}\mathbf{q},\quad \mathbf{q}=-\Lambda\operatorname{grad}T\tag{16}$$

где $\mathbf{q}$ — вектор потока тепла, Λ — матрица теплопроводности, $\sigma_t{}^\circ$ — функционал, который в силу (10) в известной мере определен. Заметим, что задание функционала u^t не накладывает каких-либо других ограничений на выбор φ^t, так как по определению $\varphi=\psi^\cdot+w^*$, кроме неравенства

$$w^*=\varphi^t-\psi^{\cdot t}\geqslant0\tag{17}$$

Если теперь кроме φ^t и u^t задан еще функционал тепловыделения — $\Phi_T{}^t(\varepsilon^\circ)$, который связан с s и T соотношением

$$\Phi_T{}^{\cdot t}=Ts^{\cdot t}+w^* \tag{18}$$

то на основании (17) получим функциональное уравнение для φ^t

$$\varphi^t-\psi^{\cdot t}+Ts^{\cdot t}=\Phi_T{}^{\cdot t} \tag{19}$$

решение которого должно удовлетворять условию (17). Соотношения (10), (15)—(19) существенны в связи с тем, что согласно [1] экспериментально определяемыми являются функционалы u^t и $\Phi_T{}^t$, задание которых на основании принципа $\delta f^t=0$ и приводит к функциональному уравнению (19) для φ^t.

Рассмотрим частный случай задания φ^τ в виде квадратичного функционала

$$\varphi^\tau(\varepsilon^\circ)=\int_0^\tau \varphi^{ijkl}(\tau,\xi)\,\varepsilon_{ij}{}^{\cdot}(\xi)\,\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(\xi)\,d\xi\equiv\int_0^\tau [\varphi^\circ(\tau,\xi)\,T^{\cdot}(\tau)\,T^{\cdot}(\xi)+$$
$$+\varphi_1{}^{mn}(\tau,\xi)\,T^{\cdot}(\xi)\,\varepsilon_{mn}{}^{\cdot}(\tau)+\varphi_2{}^{mn}(\tau,\xi)\,T^{\cdot}(\tau)\,\varepsilon_{mn}{}^{\cdot}(\xi)+$$
$$+\varphi^{mnpq}(\tau,\xi)\,\varepsilon_{mn}{}^{\cdot}(\tau)\,\varepsilon_{pq}{}^{\cdot}(\xi)\,]\,d\xi \tag{20}$$

$$\varphi^\circ\equiv\frac{1}{\alpha^2}\varphi^{\circ\circ\circ\circ},\quad \varphi_1{}^{mn}\equiv\frac{1}{\alpha}\varphi^{mn\circ\circ},\quad \varphi_2{}^{mn}=\frac{1}{\alpha}\varphi^{\circ\circ mn}$$

Для вариации получаем выражение

$$\delta\varphi^\tau=\int_0^\tau \varphi^{ijkl}(\tau,\xi)\,(\delta\varepsilon_{ij}{}^{\cdot}(\tau)\,\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(\xi)+\delta\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(\xi)\,\varepsilon_{ij}{}^{\cdot}(\tau))\,d\xi$$

Поэтому функция Φ^{ij} в соотношении (7) имеет вид ($A^{ij}=0$)

$$\Phi^{ij}(\tau,\xi)=h(\tau,\xi)\int_0^\tau \varphi^{ijkl}(\tau,u)\,\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(u)\,du+\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(\tau)\int_0^\xi \varphi^{klij}(\tau,u)\,du$$

В этом случае $L^t(\varphi)\equiv0$, и потому из соотношения (13) находим

$$\sigma^{ij}(t)=\Delta\Phi^{ij}(t)=\int_0^t \varphi^{ijkl}(t,\tau)\,\varepsilon_{kl}{}^{\cdot}(\tau)\,d\tau$$

Таким образом, в этом частном случае (к которому относится и максвелловская вязкоупругая среда [4]) уравнение (11) дает явное выражение функционалов, определяющих компоненты тензора напряжений $\sigma_t{}^{mn}$ и энтропии s.

Автор благодарит А. А. Ильюшина за консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, 287 с.
2. *Ильюшина Г. А.* О некоторых обобщениях термодинамических соотношений механики сплошных сред для необратимых процессов.— Механика композитных материалов, 1979, № 4, с. 579—585.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 500 с.
4. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.IV.1982