

УДК 539.3.01

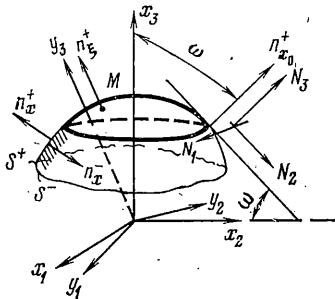
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ
И НАПРЯЖЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОМ ТЕЛЕ С РАЗРЕЗАМИ

КИТ Г. С., ХАЙ М. В.

Трехмерные задачи теории упругости для бесконечного тела с разрезом, проведенным по произвольной разомкнутой поверхности Ляпунова, рассматривались в [1], где исходные задачи с использованием упругого потенциала простого и двойного слоя первого рода сводятся к системе трех интегродифференциальных уравнений для определения функций, характеризующих скачок смещений противоположных точек поверхностей разреза. Методика [1] использовалась в [2] для решения задачи, когда разрез мало отличается от плоского.

В данной работе описывается прием сведения трехмерных задач стационарной теплопроводности и термоупругости для бесконечного тела с разрезом, проведенным по произвольной поверхности Ляпунова, к системе интегродифференциальных уравнений, а также методика приближенного решения полученных уравнений.

1. Пусть бесконечное тело, ослабленное разрезом, проведенным по произвольной разомкнутой поверхности Ляпунова, находится под действием внешних механических и тепловых нагрузок, заданных на поверхностях разреза. Обозначим через S поверхность, вдоль которой проведен разрез (трещина), а через S^+ и S^- — противоположные его поверхности. Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ в произвольной точке тела.



Фиг. 1

и установим направление нормалей на поверхностях S^\pm (фиг. 1). Для плоского разреза в [3] показано, что стационарное температурное поле определяется в виде суммы гармонических потенциалов простого и двойного слоев, заданных на поверхностях разреза. Поэтому для рассматриваемой задачи теплопроводности функцию температуры $T(x)$ представим в виде

$$T(x) = \iint_S \left[\frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|} + \gamma(\xi) \frac{d}{dn_{\xi^+}} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) \right] d_{\xi}S \quad (1.1)$$

где x — произвольная точка тела с координатами (x_1, x_2, x_3) , ξ — точка поверхности разреза S с координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , n_{ξ^+} — нормаль к поверхности S^+ в точке ξ , $\mu(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ — неизвестные плотности потенциалов, заданные на S .

Функции $\mu(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ определим таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия задачи теплопроводности на поверхностях S^\pm . В частности, если на S^\pm задана температура t^\pm , то $\gamma(\xi) = [t^+(\xi) - t^-(\xi)]/4\pi$, а функция $\mu(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\iint_S \frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|} d_{\xi}S = \frac{t^+(x) + t^-(x)}{2} - \iint_S \frac{t^+(\xi) - t^-(\xi)}{4\pi} \frac{d}{dn_{\xi^+}} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) d_{\xi}S \quad (x \in S) \quad (1.2)$$

Когда на поверхностях S^\pm задано значение теплового потока q^\pm , то $\mu(\xi) = -[q^+(\xi) + q^-(\xi)]/4\pi\lambda_i$, а функция $\gamma(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\iint_S \gamma(\xi) \frac{d^2}{dn_x^+ dn_\xi^+} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) d_\xi S = \frac{q^+(x) - q^-(x)}{2\lambda_i} + \iint_S \frac{q^+(\xi) + q^-(\xi)}{4\pi\lambda_i} \frac{d}{dn_x^+} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) d_\xi S \quad (x \in S) \quad (1.3)$$

где n_x^+ — нормаль к поверхности S^+ в точке x , λ_i — коэффициент теплопроводности тела. В дальнейшем будем считать q^\pm положительными, если они имеют направление нормалей к S^\pm .

Когда имеется теплопроницаемый разрез (тепловые потоки на S^\pm равны и пропорциональны разности граничных значений температуры), то $\mu(\xi) = 0$, а функция $\gamma(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{4\pi h_i}{\lambda_i} \gamma(x) + \iint_S \gamma(\xi) \frac{d^2}{dn_x^+ dn_\xi^+} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) d_\xi S = \frac{f(x)}{\lambda_i} \quad (x \in S) \quad (1.4)$$

где h_i — коэффициент, характеризующий теплопроницаемость разреза, $f(x)$ — заданная функция.

Если имеется N разрезов, то интегральные уравнения задач теплопроводности также имеют вид (1.2)–(1.4), но тогда $S = \cup S_k$ ($k=1, \dots, N$), где S_k — поверхность, вдоль которой проведен k -й разрез. Поступая аналогично [4], интегральные уравнения (1.2)–(1.4) для случая N разрезов можно свести к системе N уравнений для определения функций $\gamma_k(\xi)$ и $\mu_k(\xi)$.

Представление функции температуры в виде (1.1) соответствует моделированию разрезов источниками и диполями тепла с плотностями $\mu(\xi)$ и $\gamma(\xi)$, размещенными на месте расположения разрезов.

2. Для сведения задачи термоупругости к интегральным уравнениям выберем в точке O дополнительно локальную декартову систему координат $Oy_1y_2y_3$, ось y_3 которой направлена вдоль нормали n_ξ^+ в произвольной точке M разреза S (фиг. 1). В процессе деформации один из берегов разреза смещается относительно другого. Если в точке M разрыв компонент вектора перемещений характеризуется функциями $\alpha_j^*(\eta)$, то, воспользовавшись результатами из [4], определим компоненты вектора перемещений, обусловленные скачками смещений, тепловыми источниками и диполями в точке M , по формулам

$$u_{jm}(y, \eta) = \alpha_j^*(\eta) \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{1}{|y-\eta|} \right) + \delta_{j3} \sum_{k=1}^3 \alpha_k^*(\eta) \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{|y-\eta|} \right) + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ 2\nu \frac{\alpha_3^*(\eta)}{|y-\eta|} - \frac{\partial}{\partial y_3} \sum_{k=1}^3 \alpha_k^*(\eta) \frac{\partial(|y-\eta|)}{\partial y_k} \right\} + \frac{\alpha_0}{2(1-\nu)} \left[\mu(\eta) \frac{\partial}{\partial y_j} + \gamma(\eta) \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_3} \right] (|y-\eta|), \quad \alpha_0 = \alpha_i(1+\nu) \quad (2.1)$$

где $u_{jm}(y, \eta)$ — компоненты вектора перемещений в системе координат $Oy_1y_2y_3$, y — произвольная точка тела с координатами (y_1, y_2, y_3) , η — произвольная точка M разреза S с координатами (η_1, η_2, η_3) в системе координат $Oy_1y_2y_3$, α_i , ν — коэффициент линейного теплового расширения и коэффициент Пуассона.

Располагая формулами (2.1) и учитывая, что точка M произвольная, определим компоненты вектора перемещений $u_{jm}(x, \xi)$ в базисной системе

координат $Ox_1x_2x_3$, обусловленных скачками смещений, тепловыми источниками и диполями в точке M

$$u_{jM}(x, \xi) = u_{1M}(y, \eta) l_{j\xi} + u_{2M}(y, \eta) m_{j\xi} + u_{3M}(y, \eta) \eta_{j\xi} \quad (2.2)$$

где $l_{j\xi}$, $m_{j\xi}$, $\eta_{j\xi}$ — направляющие косинусы координатных осей y_j в системе $Ox_1x_2x_3$.

Если скачок смещений, источники и диполи тепла размещены по всей поверхности разреза S , то обусловленные ими перемещения $u_j(x)$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$ определяются соотношениями

$$u_j(x) = \iint_S u_{jM}(x, \xi) d\xi S \quad (j=1,2,3) \quad (2.3)$$

Подынтегральное выражение в (2.3) преобразуем к виду

$$u_{jM}(x, \xi) = \left(\frac{\nu}{1-\nu} \sum_{h=1}^3 \alpha_h(\xi) n_{h\xi} \frac{\partial}{\partial x_h} + n_{j\xi} \sum_{h=1}^3 \alpha_h(\xi) \frac{\partial}{\partial x_h} + \alpha_j(\xi) \frac{d}{dn_{\xi^+}} \right) \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{h=1}^3 \alpha_h(\xi) \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{d(|x-\xi|)}{dn_{\xi^+}} + \frac{\alpha_0}{2(1-\nu)} \left[\mu(\xi) \frac{\partial}{\partial x_j} + \gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{d}{dn_{\xi^+}} \right] (|x-\xi|) \quad (2.4)$$

где $\alpha_j(\xi)$ — функции, характеризующие скачок смещений противоположных точек поверхностей трещины вдоль осей x_j . Функции $\alpha_j(\xi)$ определяются через $\alpha_j^*(\xi)$ и направляющие косинусы нормали к поверхности S^+ в точке ξ формулами

$$\alpha_j(\xi) = \alpha_1^*(\xi) l_{j\xi} + \alpha_2^*(\xi) m_{j\xi} + \alpha_3^*(\xi) \eta_{j\xi} \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.5)$$

Для вывода формул (2.4) из (2.2) необходимо воспользоваться тем, что величина $|y-\eta|$ инвариантна при переносе и повороте системы координат.

Выражения (2.3) можно записать в векторной форме

$$U(x) = \iint_S \left[\Gamma_2(x, \xi) \alpha(\xi) + \frac{\alpha_0}{2(1-\nu)} \Gamma_1(x, \xi) \omega(\xi) \right] d\xi S \quad (2.6)$$

где $U(u_1, u_2, u_3)$, $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — трехкомпонентные векторы $\omega(\mu, \gamma)$ — двухкомпонентный вектор, Γ_2 — квадратная матрица размерности (3×3) , а Γ_1 — прямоугольная матрица размерности (2×3) . Компоненты этих матриц с учетом формул (2.4) представим в виде

$$\Gamma_{2ij} = \left[\delta_{ij} n_{i\xi} \frac{\partial}{\partial n_{\xi^+}} + n_{i\xi} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\nu}{1-\nu} n_{j\xi} \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{d(|x-\xi|)}{dn_{\xi^+}} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{ij} = \left(\delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x_i} + \delta_{j2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d}{dn_{\xi^+}} \right) (|x-\xi|) \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2)$$

Выражение (2.6) представляет собой термоупругий потенциал двойного слоя первого рода и определяет перемещения, обусловленные скачками смещений противоположных точек поверхностей разреза S , источниками и диполями тепла, которые размещены по поверхности S . Матрица Γ_2 совпадает с матрицей упругого потенциала двойного слоя первого рода [1],

поэтому термоупругий потенциал двойного слоя первого рода обладает свойствами упругого потенциала двойного слоя первого рода [1, 5].

Располагая решением (2.6), определим напряжения в теле, в частности на месте расположения разреза. Когда заданные на поверхностях S^\pm внешние усилия самоуравновешенные, то из уравнения равенства внутренних усилий на месте расположения разреза заданным получим интегродифференциальные уравнения для определения функций $\alpha_j(\xi)$:

$$\begin{aligned} & \iint_S \left\{ \sum_{h=1}^3 \alpha_j(\xi) \left[\sum_{r,q=1}^3 K_{rqij}(x, \xi) \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_q} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) - \right. \right. \\ & - \sum_{r,q=1}^3 \sum_{s,k=1}^3 A_{rqi}(\xi) B_{shk}(x) \frac{\partial^4(|x-\xi|)}{\partial x_r \partial x_q \partial x_s \partial x_k} \left. \right] + \alpha_0 \left\{ \mu(\xi) \left[-\frac{2\delta_{i3}}{|x-\xi|} + \right. \right. \\ & + \sum_{r,q=1}^3 B_{rqi}(x) \frac{\partial^2(|x-\xi|)}{\partial x_r \partial x_q} \left. \right] + \gamma(\xi) \left[\sum_{r=1}^3 2n_{r\xi} \delta_{i3} \frac{x_r - \xi_r}{|x-\xi|^3} + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{r=1}^3 n_{r\xi} \sum_{s,k=1}^3 B_{shk}(x) \frac{\partial^3(|x-\xi|)}{\partial x_s \partial x_r \partial x_k} \right] \right\} \cdot d\xi S = -\frac{1-\nu}{G} N_i(x) \quad (x \in S) \quad (i=1,2,3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} K_{rqij}(x, \xi) = (1-\nu) \left\{ n_{q\xi} B_{jri}(x) + n_{r\xi} B_{jq_i}(x) + \sum_{k=1}^3 n_{k\xi} [\delta_{jr} B_{kqi}(x) + \right. \\ \left. + \delta_{jq} B_{kri}(x)] + 2\nu [n_{j\xi} B_{rqi}(x) + \delta_{i3} A_{rqi}(\xi)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{rqi}(\xi) = 1/2 (n_{r\xi} \delta_{jq} + n_{q\xi} \delta_{jr}), \quad B_{rqi}(x) = 1/2 (n_{rx} L_{qi}(x) + n_{qx} L_{ri}(x)) \\ L_{qi}(x) = l_{qx} \delta_{i1} + m_{qx} \delta_{i2} + n_{qx} \delta_{i3} \end{aligned}$$

где $N_i(x)$ — заданные на поверхностях разреза внешние усилия (N_3 — нормальные, N_1 и N_2 — сдвигающие), δ_{ij} — символ Кронекера, G — модуль сдвига, l_{ix} , m_{ix} и n_{ix} — направляющие косинусы нормали к поверхности S^+ в точке x . Индекс ξ означает, что эти величины определяются в точке интегрирования ξ .

Таким образом, задача об определении в теле с разрезом напряжений сводится к решению системы трех интегродифференциальных уравнений для определения функций $\alpha_j(\xi)$.

В литературе отсутствуют аналитические методы решения уравнений (1.2)–(1.4) и (2.8) для произвольной поверхности разреза S . Однако при некоторых ограничениях на геометрические параметры разреза указанные выше уравнения можно решать приближенно.

Пусть поверхность S , вдоль которой проведен разрез, описывается уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$. В дальнейшем точку с координатами $(x_1, x_2, 0)$ будем обозначать через x^* . Если разрез по поверхности S проведен таким образом, что для произвольных двух ее точек x и ξ имеем $|x_3 - \xi_3| / |x^* - \xi^*| \leq 1$ (любая касательная к поверхности разреза составляет с плоскостью $x_1 O x_2$ угол, не превышающий $\pi/4$), то в полученных уравнениях задач теплопроводности и термоупругости ядра разлагаются в сходящиеся ряды. При этих же предположениях уравнение поверхности можно представить в виде сходящегося ряда

$$x_3 = f(x^*) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x^*) \varepsilon^k \quad (\varepsilon < 1) \quad (2.9)$$

где ε — некоторый параметр. Так как направляющие косинусы l_j , m_j и n_j определяются через уравнение поверхности, то эти величины также можно представить в виде ряда (2.9).

Если представить в виде такого же ряда ядра уравнений и искомые функции, подставить их в соответствующие уравнения и приравнять выражения при одинаковых степенях ε , то получим для определения μ_h , γ_h и α_{jh} рекуррентные системы интегральных уравнений, которые имеют вид соответствующих интегральных уравнений задач теплопроводности и термоупругости для плоского разреза.

3. Для примера рассмотрим случай, когда имеется разрез, проведенный по поверхности эллипсоида вращения, т. е. когда поверхность задается уравнением

$$x_3 = (b/c) \sqrt{c^2 - x_1^2 - x_2^2}, \quad c \geq b \quad (3.1)$$

Обозначим через a радиус контура разреза, причем a будем считать таким, что любая касательная к поверхности разреза составляет с плоскостью $x_1 O x_2$ угол, не превышающий $1/4\pi$. В качестве малого параметра выберем величину $\varepsilon = a/c < 1$. Направляющие косинусы определяются через уравнение поверхности (3.1) соотношениями (φ — угловая координата):

$$\begin{aligned} l_{1x} &= -\sin \varphi, & l_{2x} &= \cos \varphi, & l_{3x} &= 0, & m_{1x} &= -n_{3x} \cos \varphi, & m_{2x} &= -n_{3x} \sin \varphi \\ m_{3x} &= \frac{bn_{3x}(x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi)}{c\sqrt{c^2 - x_1^2 - x_2^2}}, & n_{1x} &= \frac{bx_1}{c\sqrt{c^2 - x_1^2 - x_2^2}} \\ n_{2x} &= \frac{bx_2}{c\sqrt{c^2 - x_1^2 - x_2^2}}, & n_{3x} &= \sqrt{\frac{a^2 - x_1^2 - x_2^2}{c^2 - k_*^2(x_1^2 + x_2^2)}}, \\ k_*^2 &= \frac{c^2 - b^2}{c^2}, & x_1 &= r \cos \varphi, & x_2 &= r \sin \varphi, & r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Разлагая функции в (2.8), (3.2) и ядра интегральных уравнений в ряд вида (2.9), преобразуем систему интегродифференциальных уравнений (2.8) к виду

$$\sum_{h=0}^3 \iint_S \left\{ \sum_{j=1}^3 \beta_j(\xi^*) \left[\frac{J_{ijk}(x^*, \xi^*)}{|x^* - \xi^*|^3} + \frac{I_{ijk}(x^*, \xi^*)}{a^2 |x^* - \xi^*|^5} \right] e^k + \alpha_0 [\mu(\xi^*) \chi_{ik}(x^*, \xi^*) + \gamma(\xi^*) \chi_{ik}^*(x^*, \xi^*)] e^k \right\} d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{1-\nu}{G} N_i(x^*) (x^* \in S_0), \quad (i=1,2,3) \quad (3.3)$$

$$\begin{vmatrix} \beta_j(\xi^*) \\ \mu(\xi^*) \\ \gamma(\xi^*) \end{vmatrix} = |D(\xi)| \begin{vmatrix} n_{3\xi} \alpha_i(\xi) \\ \mu(\xi) \\ n_{3\xi} \gamma(\xi) \end{vmatrix} \Big|_{\xi_3 = (b/c) \sqrt{c^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}$$

Здесь S_0 — круговая область радиуса a , J_{ijk} , I_{ijk} , χ_{ik} , χ_{ik}^* — известные функции, $D(\xi)$ — якобиан преобразований.

В частности

$$\begin{aligned} J_{ij0}(x^*, \xi^*) &= (1-2\nu) (\delta_{j1} \Delta_i^{(1)} - \delta_{j2} \Delta_i^{(2)}) - \delta_{i3} \delta_{j3} \\ I_{ij0}(x^*, \xi^*) &= 3\nu [\delta_{j1} \Delta_i^{(1)} (x_1 - \xi_1)^2 - \delta_{j2} \Delta_i^{(2)} (x_2 - \xi_2)^2 - \\ &\quad - (\delta_{j1} \Delta_i^{(2)} - \delta_{j2} \Delta_i^{(1)}) (x_1 - \xi_1) (x_2 - \xi_2)] \\ J_{ij1}(x^*, \xi^*) &= -2(1-2\nu) \delta_{j3} \delta_{i2} \frac{rb}{ac} + \frac{b}{c} \sum_{h=1}^2 \left\{ [(1-4\nu) \delta_{jk} \delta_{i3} - \right. \\ &\quad \left. - (-1)^k (1-2\nu) \delta_{i3} \Delta_i^{(k)}] \frac{\xi_k}{a} - 2(1-2\nu) \delta_{jk} \delta_{i3} \frac{x_k}{a} \right\} \end{aligned}$$

$$I_{ij1}(x^*, \xi^*) = -\frac{3b}{c} \sum_{k=1}^2 \left\{ [(-1)^k \nu \delta_{j3} \Delta_i^{(k)} + (1-2\nu) \delta_{jk} \delta_{i3}] \frac{\xi_k (x_k - \xi_k)^2}{a} + \right. \\ \left. + [2\nu \delta_{jk} + (-1)^k (1-2\nu) \delta_{j3} \Delta_i^{(k)}] \frac{x_k (x_k - \xi_k)^2}{a} - \left\{ [(-1)^k \nu \delta_{j3} \Delta_i^{(3-k)} - \right. \right. \\ \left. \left. - (1-2\nu) \delta_{j(3-k)} \delta_{i3}] \frac{\xi_k}{a} - [2\nu \delta_{j(3-k)} \delta_{i3} - (-1)^k (1-2\nu) \delta_{j3} \Delta_i^{(3-k)}] \frac{x_k}{a} \right\} (x_1 - \xi_1) (x_2 - \xi_2) - \right. \\ \left. - [(-1)^k \delta_{jk} \Delta_i^{(k)} + \delta_{jk} \delta_{i3}] \frac{x_1^2 + x_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{6a} (x_k - \xi_k) \right. \\ \left. \Delta_i^{(1)} = \delta_{i1} \sin \varphi + \delta_{i2} \cos \varphi, \quad \Delta_i^{(2)} = \delta_{i1} \cos \varphi - \delta_{i2} \sin \varphi \right.$$

К аналогичному виду можно привести интегральные уравнения задач теплопроводности для определения функций $\mu(\xi^*)$ и $\gamma(\xi^*)$.

Решая систему уравнений (3.3) и ограничиваясь членами ряда (2.9) до ε^2 , имеем

$$\beta_3(x^*) = A_0 \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \left\{ 1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2 \left[A_1 + B_1 \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \right\} \quad (3.4)$$

$$\beta_j(x^*) = B_0 \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \left[\frac{x_j}{a} \varepsilon + O(\varepsilon^3) \right] \quad (j=1,2)$$

Когда на поверхностях трещины задана постоянная температура t_0 , т. е. $t^+ = -t^- = t_0$ (пример 1), то

$$A_0 = \alpha_0 t_0 / \pi^2, \quad B_0 = (1-\nu) \alpha_0 t_0 / (3\pi^2) \\ A_1 = 4\nu(1-\nu) / 9 - (1+2\nu) / 12, \quad B_1 = [2\nu(1-\nu)] / 9 + (7-4\nu) / 24$$

Если трещина находится под действием постоянного давления (пример 2), то

$$A_0 = -p_0 / \pi^2, \quad B_0 = -(5-4\nu) p_0 / (6\pi^2), \quad p_0 = (1-\nu) p / G \\ A_1 = -(7+8\nu) / 72 + [\nu(5-4\nu)] / 9, \quad B_1 = -(5+16\nu) / 144 - (\nu(5-4\nu)) / 9$$

4. Располагая решением (3.4), можно определить напряжения в теле с разрезом. В частности, на продолжении разреза для главной части напряжений имеем:

для примера 1 ($N_1=0$)

$$N_2(x) = \frac{2G(2+\nu) a \alpha_0 t_0}{3(1-\nu) \pi \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - a^2}} \frac{b}{c} \varepsilon + O(\varepsilon^3) \\ N_3(x) = \frac{2G a \alpha_0 t_0}{(1-\nu) \pi \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - a^2}} \left[1 - \left(\frac{11+16\nu}{24} - \frac{2\nu(1-\nu)}{3} \right) \left(\frac{b}{c} \right)^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \right] \quad (4.1)$$

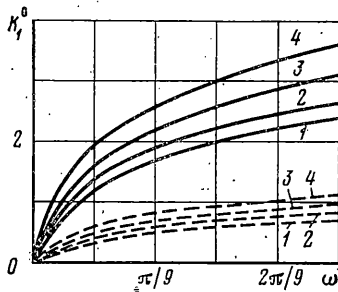
для примера 2 ($N_1=0$)

$$N_2(x) = -\frac{(1+4\nu) p a}{3\pi \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - a^2}} \frac{b}{c} \varepsilon + O(\varepsilon^3) \\ N_3(x) = \frac{2ap}{\pi \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - a^2}} \left[1 - \left(\frac{163}{144} - \frac{5-4\nu}{6} \right) \left(\frac{b}{c} \right)^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \right] \quad (4.2)$$

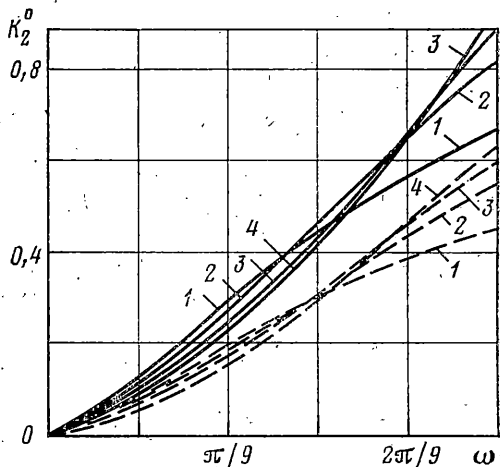
В формулах (4.1) и (4.2) N_3 — нормальные, N_1 и N_2 — сдвигающие усилия в плоскости, касательной к эллипсоиду вращения. Коэффициенты интенсивности напряжений определяются через N_j по формулам

$$k_j(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_0} N_{4-j}(x) \quad (j=1,2,3) \quad (4.3)$$

где x_0 — точка контура разреза в базисной системе координат, r_0 — расстоя-



Фиг. 2



Фиг. 3

ние произвольной точки тела от точки x_0 . Для разреза, проведенного по поверхности эллипсоида вращения, можно показать, что

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_0} N_{k-j}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - a^2}}{\cos \omega} N_{k-j}(x) \quad (4.4)$$

где ω — угол между осью x_3 и нормалью к поверхности эллипсоида вращения на контуре разреза.

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от угла ω для примера 1 дается выражениями ($k_3=0$, E — модуль упругости):

$$k_1(\omega) = k_\infty \left(\frac{(\cos \omega)^{-1} \operatorname{tg} \omega}{\sqrt{1 - k_*^2 \cos^2 \omega}} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{11 + 16\nu}{24} - \frac{2\nu(1-\nu)}{3} \right) \left(\frac{b}{c} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin^2 \omega}{1 - k_*^2 \cos^2 \omega} \right] + O(\varepsilon^4) \\ k_2(\omega) = \frac{(2+\nu)k_\infty}{3} \left(\frac{(\cos \omega)^{-1} \operatorname{tg} \omega}{\sqrt{1 - k_*^2 \cos^2 \omega}} \right)^{1/2} \frac{b}{c} \frac{\sin \omega}{\sqrt{1 - k_*^2 \cos^2 \omega}} + O(\varepsilon^3) \\ k_\infty = E \alpha_i t_0 \sqrt{c} \sqrt{(1-\nu) \sqrt{\pi}} \quad (4.5)$$

а для примера 2 — выражениями ($k_3=0$):

$$k_1(\omega) = \frac{4\sqrt{\pi}(1+\nu)k_\infty}{3} \left(\frac{(\cos \omega)^{-1} \operatorname{tg} \omega}{\sqrt{1 - k_*^2 \cos^2 \omega}} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{163}{144} - \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5-4\nu}{6} \right) \left(\frac{b}{c} \right)^2 \frac{\sin^2 \omega}{1 - k_*^2 \cos^2 \omega} \right] + O(\varepsilon^4), \quad k_\infty = \frac{3p\sqrt{c}}{2\pi(1+\nu)} \\ k_2(\omega) = - \frac{2\sqrt{\pi}(1+\nu)(1+4\nu)k_\infty}{9} \left(\frac{(\cos \omega)^{-1} \operatorname{tg} \omega}{\sqrt{1 - k_*^2 \cos^2 \omega}} \right)^{1/2} \frac{b}{c} \frac{\sin \omega}{\sqrt{1 - k_*^2 \cos^2 \omega}} + O(\varepsilon^3)$$

Зависимости $K_1^0 = k_1/k_\infty$ и $K_2^0 = k_2/k_\infty$ от угла построены на графике фиг. 2, 3 ($\nu=0,3$). Сплошные линии соответствуют примеру 2, а штриховые — примеру 1. Цифры 1–4 соответствуют значениям $b/c=1; 0,8; 0,6; 0,4$. На графиках видно, что с уменьшением отношения b/c значения k_1 увеличиваются. Зависимость k_2 от b/c менее выражена. При $\omega < 7\pi/36$ величина k_2 меняется незначительно для различных отношений b/c .

Вычисленные по формулам (4.6) значения K_i° сравнивались с точными [6], когда трещина размещена по сферической поверхности. Для $\omega < \pi/4$ приближенные значения K_i° отличаются от точных менее чем на 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партоп В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
2. *Шляпоберский Я. В.* Асимптотическое решение пространственной задачи о равновесии упругого тела с разрезом.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 532–539.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704–707.
4. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1105–1109.
5. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башейлешвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
6. *Маргынченко М. А., Улитко А. Ф.* Напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде.— Прикл. механика, 1978, т. 14, № 9, с. 15–23.

Львов.

Поступила в редакцию
27.X.1980