УДК 531.53

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКА ШУЛЕРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПОДВЕСА ПО ОРТОДРОМИИ

АГАФОНОВ С. А.

Исследуется устойчивость одномерных колебаний маятника Шулера в случае, когда точка подвеса движется по ортодромии с периодически изменяющейся скоростью. Задача устойчивости решается в нелинейной постановке в области выполнения необходимых условий устойчивости (линейная система имеет чисто мнимые характеристические показатели). Уравнения возмущенного движения системы записываются в гамильтоновой форме. Применением теоремы Арнольда – Мозера об устойчивости гамильтоновой системы с одной степенью свободы доказывается устойчивость невозмущенного движения системы.

1. Исследованию устойчивости шулеровской вертикали посвящены работы [1, 2], где задача устойчивости решалась в линейной постановке. В отличие от указанных работ здесь исследуется устойчивость невозмущенного движения системы, исходя из нелинейных уравнений движения. Рассмотрим маятник Шулера в случае, когда точка подвеса движется по дуге большого круга невращающейся сферы, центр которой совпадает с центром Земли, со скоростью

$$V=V_0+\varepsilon f(t),\qquad V_0=\text{const},\qquad \varepsilon\ll 1,\qquad \int_0^T f(t)\,dt=0 \tag{1.1}$$

где $f(t+T)=f(t)$ – периодическая функция времени периода T.

Уравнения движения маятника можно записать в форме уравнений Лагранжа с функцией

$$L={}^1/_2(V/R+\alpha^\bullet)^2+V^\bullet\sin\alpha/R+\nu^2(1-\mu^2)\cos\alpha \tag{1.2}$$

где g – ускорение сил тяготения, R – радиус земного шара, α – угол отклонения оси симметрии маятника от вертикали, точка означает дифференцирование по времени t, $\mu^2=V^2/gR$, $\nu^2=g/R$.

Отметим, что уравнения движения системы, определяемые функцией Лагранжа (1.2), описывают возмущенное движение гироскопической платформы для случая одноосного варианта схемы Кофмана – Левенталя [3]. Вводя канонические переменные $q=\alpha$, $p=\alpha^\bullet$, уравнения движения маятника запишем в виде уравнений Гамильтона

$$dq/dt=\partial H/\partial p,\qquad \frac{dp}{dt}=-\partial H/\partial q$$

$$H={}^1/_2p^2+V^\bullet(q-\sin q)/R-\nu^2(1-\mu^2)\cos q \tag{1.3}$$

Уравнения движения (1.3) допускают решение, отвечающее невозмущенному движению маятника

$$q=0,\quad p=0 \tag{1.4}$$

Цель работы – анализ устойчивости решения (1.4) системы (1.3) в случае, когда скорость движения точки подвеса маятника изменяется по закону (1.1). Функция Гамильтона (1.3) является аналитической функцией для канонических переменных q, p, разлагающейся в ряд

$$H=H_2+H_3+H_4+\ldots \tag{1.5}$$

где H_k – однородная функция степени k относительно q, p.

Вводя безразмерное время $\tau=2\pi t/T\equiv\omega t$, безразмерные импульс p/ω и функцию Гамильтона H/ω^2 и опуская использованные ранее обозначения, первые три формы H_k получаем в виде

$$H_2={}^1/_2p^2+\nu^2(1-\mu^2)q^2/2\omega^2 \tag{1.6}$$

$$H_3=V^\bullet q^3/6\omega^2R \tag{1.7}$$

$$H_4=-\nu^2(1-\mu^2)q^4/24\omega^2 \tag{1.8}$$

Система с функцией Гамильтона (1.6) представляет собой линейную систему с 2π-периодическими коэффициентами и, следовательно, является приводимой. При помощи линейного канонического преобразования с 2π-периодическими коэффициентами эта система приводится к системе с постоянными коэффициентами. Это преобразование с точностью до ε включительно имеет вид

$$q=\left(1+\frac{\varepsilon k_2}{\varkappa}\right)^{1/2}\left[1+\varepsilon\frac{2V_0}{\omega^2R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(\cos m\tau-1)+b_m\sin m\tau}{4\varkappa^2-m^2}\right]x_1+$$

$$+\varepsilon\left[\frac{k_1}{\varkappa^{3/2}}+\left(\frac{\varkappa}{1+\varepsilon k_2}\right)^{1/2}\frac{4V_0}{\omega^2R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m(\cos m\tau-1)-a_m\sin m\tau}{m(4\varkappa^2-m^2)}\right]x_2+O(\varepsilon^2) \tag{1.9}$$

$$p=\frac{2\varepsilon V_0}{\varkappa^{1/2}\omega^2R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m^2-2\varkappa^2)\left[b_m(\cos m\tau-1)-a_m\sin m\tau\right]}{m(4\varkappa^2-m^2)}x_1+$$

$$+\left(\frac{\varkappa}{1+\varepsilon k_2}\right)^{1/2}\left[1-\varepsilon\frac{2V_0}{\omega^2R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(\cos m\tau-1)+b_m\sin m\tau}{4\varkappa^2-m^2}\right]x_2+O(\varepsilon^2)$$

$$k_1=\frac{2V_0}{\omega^2R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mb_m}{4\varkappa^2-m^2},\qquad k_2=\frac{4V_0}{\omega^2R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{4\varkappa^2-m^2}$$

где a_m, b_m – коэффициенты в разложении функции $f(\tau)$ в ряд Фурье, $\pm i\varkappa$, $i^2=-1$ – характеристические показатели линейной системы, $\varkappa^2=(\nu^2/\omega^2)(1-V_0^2/gR)+O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon^2)$ – совокупность членов не ниже второго порядка от ε, $2\varkappa\neq m$ (устойчивость исследуется в области устойчивости линейной системы).

Выражения H_k после преобразования (1.9) при сохранении прежних обозначений примут вид

$$H_2={}^1/_2\varkappa(x_1^2+x_2^2) \tag{1.10}$$

$$H_3=\frac{\varepsilon x_1^3}{6\omega R\varkappa^{3/2}}\frac{df}{d\tau}+O(\varepsilon^2) \tag{1.11}$$

$$H_4=-\frac{\varepsilon\nu^2}{6\omega^2\varkappa}\left(1-\frac{V_0^2}{gR}\right)\left(\frac{k_1}{\varkappa^2}+\frac{4V_0}{\omega^2R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m(\cos m\tau-1)-a_m\sin m\tau}{m(4\varkappa^2-m^2)}\right)x_1^3x_2-$$

$$-\left[\frac{\nu^2}{24\omega^2\varkappa^2}\left(1-\frac{V_0^2}{gR}\right)-\frac{\varepsilon\nu^2}{3\omega^2\varkappa^2}\left(\frac{V_0}{4gR}f(\tau)-\frac{k_2}{4}\left(1-\frac{V_0^2}{gR}\right)-\right.\right. \tag{1.12}$$

$$\left.\left.-\frac{V_0}{\omega^2R^2}\left(1-\frac{V_0^2}{gR}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(\cos m\tau-1)+b_m\sin m\tau}{4\varkappa^2-m^2}\right)\right]x_1^4+O(\varepsilon^2)$$

$$H=H_2+H_3+H_4+\ldots \tag{1.13}$$

Так как правые части линейной системы с функцией Гамильтона (1.6) аналитические относительно ε, то на основании теоремы Ляпунова характеристические показатели $\pm i\varkappa$ будут аналитическими функциями ε. Преобразование (1.9), приводящее функцию Гамильтона (1.6) к виду (1.10), также будет аналитической функцией ε, так как при его нахождении необходимо было найти матрицант линейной периодической системы, являющейся аналитической матрицей-функцией относительно ε на основании теоремы [4, с. 298]. Используя эту теорему, можно дать оценку области сходимости $|\varepsilon|<\varepsilon_0$. Значение ε_0 находится из условия равенства нулю дискриминанта характеристического уравнения $\rho^2-A\rho+1=0$, A – постоянная Ляпунова. Используя оценки для постоянной Ляпунова [5], получим (знаменатель отличен от нуля в силу неравенства Бесселя)

$$\varepsilon_0=\left[2\pi(gR-V_0^2)\Big/\int_0^{2\pi}f^2(\tau)\,d\tau\right]^{1/2}$$

2. Если $3\varkappa \neq m$ (m — целое число), то при помощи канонического преобразования, задаваемого 2π-периодической по τ производящей функцией

$$S = x_1 y_2 + S_3(\tau, x_1, y_2) \tag{2.1}$$

где y_1, y_2 — новые канонические переменные, S_3 — форма третьей степени относительно x_1, y_2, можно полностью исключить в новой функции Гамильтона члены третьей степени. В переменных y_1, y_2 функция Гамильтона (1.13) запишется в виде

$$H^* = H_2^* + H_4^* \tag{2.2}$$

Если к тому же $4\varkappa \neq m$, то при помощи канонического преобразования с производящей функцией

$$S = y_1 z_2 + S_4(\tau, y_1, z_2) \tag{2.3}$$

где z_1, z_2 — новые канонические переменные, можно упростить члены четвертой степени в новой функции Гамильтона, которая будет иметь вид

$$H^{**} = {}^1/_2\varkappa(z_1^2 + z_2^2) + {}^1/_4 c(z_1^2 + z_2^2)^2 + H'(\tau, z_1, z_2) \tag{2.4}$$

где функция $H'(\tau, z_1, z_2)$ 2π-периодична по τ и представляет собой совокупность членов не ниже пятой степени относительно z_1, z_2. Значение c с точностью до ε включительно равно

$$c = -{}^1/_{16} + O(\varepsilon^2) \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) для достаточно малого ε отлично от нуля, и на основании теоремы [6] заключаем об устойчивости невозмущенного движения (1.4) маятника в случае движения точки подвеса по дуге большого круга со скоростью (1.1).

3. Если $3\varkappa = m$, то при помощи канонического преобразования, задаваемого производящей функцией (2.1), в функции Гамильтона H^* полностью исключить члены третьей степени нельзя. Переходя от переменных y_1, y_2 к полярным переменным r, φ (r — импульс, φ — координата), функцию Гамильтона преобразуем к виду [7]:

$$H = 4\sqrt{2}\, a r^{3/2} \cos 3\varphi + O(r^2), \quad a = (\varepsilon m / 96\omega R \varkappa^{3/2}) [(a_m^2 + b_m^2)^{1/2} + O(\varepsilon)] \tag{3.1}$$

Для достаточно малого ε значение $a \neq 0$ и на основании теоремы из [7] решение (1.4) неустойчиво. Из соотношения $3\varkappa = m$ находим критические частоты

$$\omega = (3\nu/m)[(1 - V_0^2/gR)^{1/2} + O(\varepsilon^2)] \tag{3.2}$$

Формула (3.2) указывает те значения частоты ω, при которых невозмущенное движение маятника (1.4) неустойчиво при движении точки подвеса по закону (1.1).

Если $4\varkappa = m$, то, делая последовательно замены переменных при помощи производящих функций (2.1), (2.3) и затем переходя к полярным переменным r, φ, приведем функцию Гамильтона к виду [7]:

$$H = r^2(c + b\cos 4\varphi) + O(r^{5/2}) \tag{3.3}$$

Значение c дается формулой (2.5), а

$$b = (\varepsilon V_0 / 2m^2\omega^2 R^2)[(a_m^2 + b_m^2)^{1/2} + O(\varepsilon)]$$

При достаточно малом ε $|c| > b$ и на основании теоремы из [7] заключаем об устойчивости решения (1.4). Пусть постоянная составляющая скорости V_0 отличается от первой космической на величину порядка ε, т. е. $(gR)^{1/2} - V_0 = O(\varepsilon)$. Тогда можно показать, используя равенство $4\varkappa = m$, что величина b будет иметь порядок $O(1)$ и, следовательно, может выполняться неравенство $|c| < b$ и тогда решение (1.4) будет неустойчивым [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клигер Л. И., Парусников Н. А.* Об уравнениях малых колебаний шулеровской вертикали.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 5, с. 40–44.
2. *Чугаев В. В.* Устойчивость малых колебаний шулеровской вертикали при движении объекта вдоль земной ортодромии.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4, с. 16–22.
3. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
4. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 712 с.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
6. *Арнольд В. И.* Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае.— Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 2, с. 255–257.
7. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.XI.1980