

УДК 531.37

СВОБОДНОЕ ВРАЩЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА
КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА

НЕЛЛОВ А. И.

Приводятся результаты исследований свободного вращения летательного аппарата как твердого тела. Посредством прямого интегрирования уравнений первого приближения получены достаточно простые связи в элементарных функциях между начальными условиями, соотношением моментов инерции и частотами колебаний параметров движения. Принятые при этом допущения обоснованы результатами точных аналитических исследований.

Свободное вращение твердого тела исследуется при начальных возмущениях по угловым скоростям и отсутствию внешних моментов [1-7]. Результаты изучения свободного вращения летательного аппарата как твердого тела имеют практическое приложение при исследовании режимов движения с пренебрежимо малыми внешними моментами в процессе вертикального взлета и посадки летательных аппаратов, в полете при малых аэродинамических моментах, в полете космических аппаратов в безвоздушном пространстве.

При изучении движения летательного аппарата, а также при формировании его систем управления необходимо знать характер изменения его угловых скоростей и параметров углового пространственного положения от времени, а также взаимосвязи между начальным состоянием аппарата, его инерционными свойствами и характеристиками последующего движения (частотами, амплитудами). Эти задачи решаются в публикуемой статье применительно к свободному вращению двигательного аппарата.

1. Уравнения свободного вращения летательного аппарата как твердого тела наиболее просто записываются в форме Эйлера, т. е. в проекциях на главные центральные оси эллипсоида инерции

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции аппарата, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции угловой скорости.

Угловое положение аппарата определяется углами Эйлера (γ — крена, ψ — рыскания, ϑ — тангажа), которые замеряются соответствующими датчиками на летательном аппарате и связаны с угловыми скоростями кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) \\ \dot{\psi} &= (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) / \cos \vartheta \\ \dot{\vartheta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.2)$$

Современные летательные аппараты имеют, как правило, следующие соотношения моментов инерции: $I_2 > I_3 \gg I_1$ ($I_3/I_1 = 10 \div 12$, $I_2/I_1 = 9 \div 11$) — для самолетов [8]; $I_3 = I_2 \gg I_1$ — для ракет и других осесимметричных летательных аппаратов.

В общем случае свободного вращения твердого тела уравнения (1.1) отражают задачу Эйлера — Пуансо и имеют два интеграла, которые определяются законами сохранения энергии и кинетического момента

$$2E = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = \text{const} \quad (1.3)$$

$$K^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = \text{const} \quad (1.4)$$

Вращение тела относительно оси с наименьшим моментом инерции I_1 или с наибольшим моментом инерции I_2 является устойчивым в смысле Ляпунова по угловому положению оси 1 или 2. Вращение тела относительно оси со средним моментом инерции I_3 не является устойчивым при малых возмущениях начальных угловых скоростей по двум другим осям (ω_{10} и ω_{20}). Условием преимущественного вращения

тела относительно оси с наименьшим моментом инерции I_1 является следующее соотношение по начальным угловым скоростям:

$$I_1^2 \omega_{10}^2 + I_2^2 \omega_{20}^2 + I_3^2 \omega_{30}^2 < I_3 (I_1 \omega_{10}^2 + I_2 \omega_{20}^2 + I_3 \omega_{30}^2)$$

или

$$K_0^2 < 2E_0 I_3 \quad (1.5)$$

В случае $K_0^2 = 2E_0 I_3$ тело вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \omega_{10}$ при $\omega_2 = \omega_3 = 0$.

Условие

$$K_0^2 > 2E_0 I_3 \quad (1.6)$$

определяет преимущественное вращение тела относительно оси с наибольшим моментом инерции I_2 . В случае $K_0^2 = 2E_0 I_2$ тело вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_2 = \omega_{20}$ при $\omega_1 = \omega_3 = 0$.

Условие $K_0^2 = 2E_0 I_3$ соответствует теоретическому случаю вращения с $\omega_3 = \omega_{30}$ при $\omega_1 = \omega_2 = 0$; это вращение переходит в преимущественное вращение относительно оси 1 (условие 1.5) или оси 2 (условие 1.6) при сколь угодно малом возмущении по угловым скоростям ω_{10} или ω_{20} .

Решение уравнений Эйлера (1.1) сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$x = \int_0^{\alpha} \frac{d\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2)(1-h^2\Omega^2)}} \quad (1.7)$$

При выполнении условия $0 < h^2 < 1$ решение (1.7) имеет вид эллиптических функций Якоби: синус-амплитуды $\operatorname{sn} x$, косинус-амплитуды $\operatorname{cn} x$ и дельта-амплитуды $\operatorname{dn} x$. Функции $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cn} x$ изменяются в пределах ± 1 так, что когда одна из них обращается в нуль, другая проходит через ± 1 . Дельта-амплитуда $\operatorname{dn} x$ не имеет нулей и колеблется в более узких пределах от $(1-h^2)$ до 1. Вид функций Якоби при $h^2 = 0,8$ показан на фиг. 4. Период колебаний $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cn} x$ соответствует $4J$, а период колебаний $\operatorname{dn} x$ равен $2J$, где полный эллиптический интеграл первого рода

$$J = \int_0^1 \frac{d\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2)(1-h^2\Omega^2)}}$$

определяется величиной h^2 (фиг. 2).

Для случая преимущественного вращения аппарата относительно оси с наименьшим моментом инерции (условие (1.5)) решения уравнений (1.1) имеют вид

$$\omega_1 = A_1 \operatorname{dn} x, \quad \omega_2 = A_2 \operatorname{cn} x, \quad \omega_3 = A_3 \operatorname{sn} x \quad (1.8)$$

$$A_1 = \left[\frac{2E_0 I_2 - K_0^2}{I_1(I_2 - I_1)} \right]^{1/2}, \quad A_2 = \left[\frac{K_0^2 - 2E_0 I_1}{I_2(I_2 - I_1)} \right]^{1/2}, \quad A_3 = \left[\frac{K_0^2 - 2E_0 I_1}{I_3(I_3 - I_1)} \right]^{1/2}$$

$$x = -t \left[\frac{(I_3 - I_1)(2E_0 I_2 - K_0^2)}{I_1 I_2 I_3} \right]^{1/2}, \quad h^2 = 1 - \frac{(I_2 - I_1)(2E_0 I_3 - K_0^2)}{(I_3 - I_1)(2E_0 I_2 - K_0^2)}$$

$$\Omega^2 = \omega_3^2 I_3 (I_2 - I_3) / (2E_0 I_2 - K_0^2)$$

Решения $\omega_3(t)$ и $\omega_2(t)$ имеют период

$$T_{3,2} = 4J \{ I_1 I_2 I_3 / [(I_3 - I_1)(2E_0 I_2 - K_0^2)] \}^{1/2} \quad (1.9)$$

Период колебаний $\omega_1(t)$ в два раза меньше

$$T_1 = 1/2 T_{3,2} \quad (1.10)$$

Среднее значение угловой скорости $\omega_1(t)$

$$\langle \omega_1 \rangle = \pm 1/2 A_1 [1 + (1-h^2)^{1/2}] \quad (1.11)$$

В преобладающем вращении относительно оси 1 при $\omega_{10} \gg \omega_{20}$ и $\omega_{10} \gg \omega_{30}$ углы тангажа и рыскания малы по величине, поэтому справедливо допущение $\cos \vartheta \approx \cos \psi \approx 1$, $\sin \vartheta \approx \vartheta$, $\sin \psi \approx \psi$.

Проекция вектора кинетического момента K на главные оси инерции имеют в этом случае следующий вид:

$$\begin{aligned} K_1 &= I_1 \omega_1 = K_0 \\ K_2 &= I_2 \omega_2 = K_0 (-\vartheta \cos \gamma + \psi \sin \gamma) \\ K_3 &= I_3 \omega_3 = K_0 (\vartheta \sin \gamma + \psi \cos \gamma) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Допущение о малости произведений $\dot{\varphi}\omega_2$ и $\dot{\varphi}\omega_3$ позволяет проинтегрировать первое уравнение (1.2) при $\gamma_0=0$: $\gamma=\omega_{10}t$. Тогда из (1.12) углы тангажа и рыскания определяются формулами

$$\begin{aligned}\varphi &= K_0^{-1} [I_3 A_3 \operatorname{sn} x \sin(\omega_{10}t) - I_2 A_2 \operatorname{cn} x \cos(\omega_{10}t)] \\ \psi &= K_0^{-1} [I_3 A_3 \operatorname{sn} x \cos(\omega_{10}t) + I_2 A_2 \operatorname{cn} x \sin(\omega_{10}t)]\end{aligned}\quad (1.13)$$

Произведение двух периодических функций дает обычно две составляющие; частота первой определяется разностью частот перемножаемых функций, а второй — суммой частот перемножаемых функций.

Условие $0 < h^2 < 1$ всегда выполняется при $I_1 < I_3 < I_2$. При $I_3 = I_2 > I_1$ величина $h^2 = 0$ и эллиптические функции трансформируются в тригонометрические: $\operatorname{sn} x = \sin x$, $\operatorname{cn} x = \cos x$, $\operatorname{dn} x = 1$. В этом случае

$$\begin{aligned}\omega_3 &= A \sin Ut, & \omega_2 &= A \cos Ut, & \omega_1 &= \omega_{10} = \text{const} \\ A &= (\omega_{20}^2 + \omega_{30}^2)^{1/2}, & U &= \omega_{10} (1 - I_1/I_2)\end{aligned}\quad (1.14)$$

Изменение углов Эйлера происходит по законам

$$\dot{\varphi} = (AI_3/K_0) \sin Ut, \quad \dot{\psi} = (AI_2/K_0) \cos Ut, \quad U_1 = \omega_{10} I_1/I_2 \quad (1.15)$$

Колебания углов тангажа и рыскания происходят со сдвигом фазы на 90° , причем частота колебаний углов Эйлера в (I_2/I_1) раз меньше частоты колебаний угловых скоростей ω_2 и ω_3 .

Для случая преимущественного вращения аппарата относительно оси с наибольшим моментом инерции (условие (1.6)) решения уравнений (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_1 &= B_1 \operatorname{cn} x, & \omega_2 &= B_2 \operatorname{dn} x, & \omega_3 &= B_3 \operatorname{sn} x \\ B_1 &= \left[\frac{2E_0 I_2 - K_0^2}{I_1 (I_2 - I_1)} \right]^{1/2}, & B_2 &= \left[\frac{K_0^2 - 2E_0 I_1}{I_2 (I_2 - I_1)} \right]^{1/2}, & B_3 &= \left[\frac{2E_0 I_2 - K_0^2}{I_3 (I_2 - I_3)} \right]^{1/2} \\ x &= -t \left[\frac{(I_2 - I_3) (K_0^2 - 2E_0 I_1)}{I_1 I_2 I_3} \right]^{1/2}, & h^2 &= 1 - \frac{(I_2 - I_1) (K_0^2 - 2E_0 I_3)}{(I_2 - I_3) (K_0^2 - 2E_0 I_1)} \\ \Omega^2 &= \omega_3^2 I_3 (I_3 - I_1) / (K_0^2 - 2E_0 I_1)\end{aligned}\quad (1.16)$$

Решения $\omega_3(t)$ и $\omega_1(t)$ имеют период

$$T_{3,1} = 4J \{ I_1 I_2 I_3 / [(I_1 - I_3) (K_0^2 - 2E_0 I_1)] \}^{1/2} \quad (1.17)$$

Решение $\omega_2(t)$ имеет в два раза меньший период

$$T_2 = 1/2 T_{3,1} \quad (1.18)$$

Среднее значение угловой скорости $\omega_2(t)$

$$\langle \omega_2 \rangle = \pm 1/2 B_2 [1 + (1 - h^2)^{1/2}] \quad (1.19)$$

Выражения для углов Эйлера (при $\gamma_0 = \varphi_0 = \psi_0 = 0$) получаются [2] для случая (1.6) из рассмотрения проекций вектора кинетического момента на главные оси

$$\begin{aligned}K_1 &= I_1 \omega_1 = K_0 \sin \varphi \\ K_2 &= I_2 \omega_2 = K_0 \cos \varphi \cos \gamma \\ K_3 &= I_3 \omega_3 = -K_0 \cos \varphi \sin \gamma\end{aligned}\quad (1.20)$$

Уравнения (1.20) совместно с (1.16) определяют зависимости

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{I_1 B_1}{K_0} \operatorname{cn} x \right), \quad \gamma = \arctg \left(- \frac{I_3}{I_2} \frac{B_3}{B_2} \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x} \right) \quad (1.21)$$

Второе уравнение (1.2) с учетом (1.16) определяет дифференциальное уравнение

$$\dot{\psi} = \frac{2E_0 D - \operatorname{cn}^2 x}{K_0 D - I_1 \operatorname{cn}^2 x / K_0^2}, \quad D = \frac{I_2 - I_1}{2E_0 I_2 - K_0^2} \quad (1.22)$$

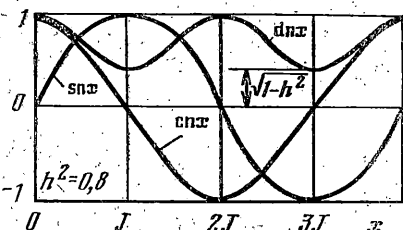
Решение (1.22) достаточно громоздко [2, с. 152] и включает две составляющие с различными частотами.

Решения (1.21), (1.22) трудно поддаются анализу для выявления характера изменения углов Эйлера, поскольку включают сложные нелинейные тригонометрические и эллиптические функции, требуют численных (или табличных) методов вычисления эллиптических интегралов первого рода.

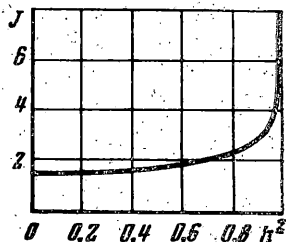
Точное решение свободного вращения летательного аппарата не представляет удобных для анализа аналитических зависимостей в виде элементарных функций: периодов и частот колебаний от начальных условий по угловым скоростям и от соотношения моментов инерции.

2. При введении ряда допущений, обоснованных результатами предыдущего исследования свободного вращения твердого тела, вид решения уравнений (1.1) и (1.2) существенно упрощается.

Для случая преимущественного вращения относительно оси с наименьшим моментом инерции, т. е. когда $\omega_{10} \gg \omega_{20}$ и $\omega_{10} \gg \omega_{30}$ (при выполнении условия (1.5)), справедливы допущения: $\omega_1 \approx \langle \omega_1 \rangle = \text{const}$, т. е. изменение угловой скорости ω_1 относительно среднего значения (1.11) незначительно; углы тангажа и рыскания малы по величине, т. е. $\cos \vartheta \approx 1$, $\text{tg } \vartheta \approx \vartheta$.



Фиг. 1



Фиг. 2

В силу первого допущения решения двух последних уравнений (1.1) имеют вид

$$\omega_2 = A_2 \sin(Vt + Q_2), \quad \omega_3 = A_3 \sin(Vt + Q_3) \quad (2.1)$$

$$V = \langle \omega_1 \rangle \left[\frac{(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)}{I_2 I_3} \right]^{1/2}, \quad A_2 = \left[\frac{K_0^2 - 2E_0 I_1}{I_2(I_2 - I_1)} \right]^{1/2}, \quad A_3 = \left[\frac{K_0^2 - 2E_0 I_1}{I_3(I_3 - I_1)} \right]^{1/2}$$

$$\text{tg } Q_2 = \frac{\omega_{20}}{\omega_{30}} \left[\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)} \right]^{1/2}, \quad \text{tg } Q_3 = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}} \left[\frac{I_3(I_3 - I_1)}{I_2(I_2 - I_1)} \right]^{1/2}$$

Амплитуды A_2 и A_3 точных решений (1.8) и приближенных решений (2.1) совпадают.

Период колебаний для приближенных решений меньше, чем для точных, эти периоды совпадают при $h^2 \rightarrow 0$. Частота колебаний ω_2 и ω_3 возрастает с увеличением средней угловой скорости вращения аппарата $\langle \omega_1 \rangle$ и с увеличением отношений I_2/I_1 и I_3/I_1 . Амплитуды колебаний возрастают с ростом начальных возмущений по угловым скоростям ω_{20} и ω_{30} .

Для случая $I_2 = I_3$ решения (2.1) совпадают с точным (1.14).

Вследствие малости угла ϑ и угловых скоростей ω_2, ω_3 их произведения в (1.2) можно пренебречь, а также принять $\text{tg } \vartheta \approx \vartheta$, $\cos \vartheta \approx 1$. Тогда первое уравнение (1.2) при $\gamma_0 = 0$ будет иметь решение $\gamma = \langle \omega_1 \rangle t$. Второе и третье уравнения в (1.2) с учетом (2.1) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \psi'' &= A_2 \sin(Vt + Q_2) \cos(\langle \omega_1 \rangle t) - A_3 \sin(Vt + Q_3) \sin(\langle \omega_1 \rangle t) \\ \vartheta'' &= A_2 \sin(Vt + Q_2) \sin(\langle \omega_1 \rangle t) - A_3 \sin(Vt + Q_3) \cos(\langle \omega_1 \rangle t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi'' &= L_1 \sin[(V - \langle \omega_1 \rangle)t + N_1] + L_2 \sin[(V + \langle \omega_1 \rangle)t + N_2] \\ \vartheta'' &= L_2 \sin[(V - \langle \omega_1 \rangle)t + N_3] + L_1 \sin[(V + \langle \omega_1 \rangle)t + N_4] \\ L_1 &= 1/2[A_2^2 + A_3^2 + 2A_2 A_3 \sin(Q_3 - Q_2)]^{1/2}, \quad L_2 = 1/2[A_2^2 + A_3^2 + 2A_2 A_3 \sin(Q_2 - Q_3)]^{1/2} \\ \text{tg } N_1 &= \frac{A_2 \sin Q_2 - A_3 \cos Q_3}{A_2 \cos Q_2 + A_3 \sin Q_3}, \quad \text{tg } N_2 = \frac{A_2 \sin Q_2 + A_3 \cos Q_3}{A_2 \cos Q_3 - A_3 \sin Q_3} \\ \text{tg } N_3 &= -1/\text{tg } N_2, \quad \text{tg } N_4 = -1/\text{tg } N_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

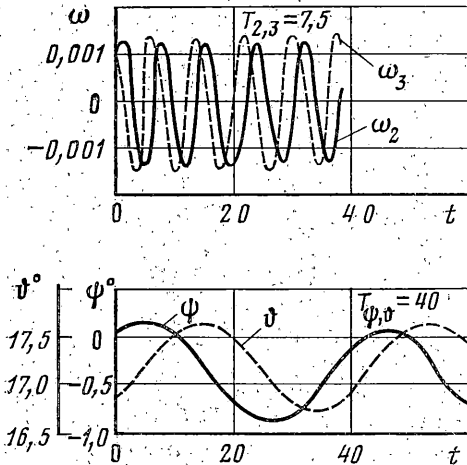
Интегрирование уравнений (2.3) при заданных начальных условиях ψ_0 и ϑ_0 определяет углы рыскания и тангажа

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + M_1 \cos[(\langle \omega_1 \rangle - V)t + N_1] + M_2 \cos[(\langle \omega_1 \rangle + V)t + N_2] \\ \vartheta &= \vartheta_0 + M_3 \cos[(\langle \omega_1 \rangle - V)t + N_3] - M_4 \cos[(\langle \omega_1 \rangle + V)t + N_4] \end{aligned} \quad (2.4)$$

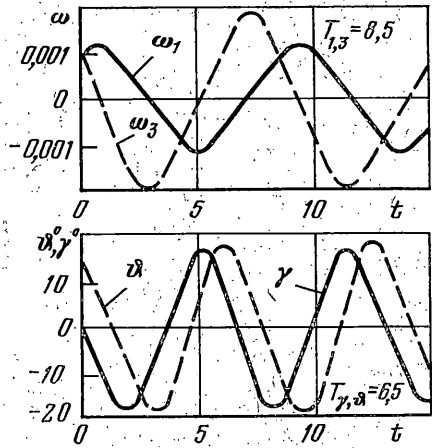
$$M_1 = \frac{L_1}{\langle \omega_1 \rangle - V}, \quad M_3 = \frac{L_2}{\langle \omega_1 \rangle - V}, \quad M_2 = \frac{L_2}{\langle \omega_1 \rangle + V}, \quad M_4 = \frac{L_1}{\langle \omega_1 \rangle + V}$$

При $I_2 > I_3 \gg I_1$ частота V близка к средней частоте и разность $(\langle \omega_1 \rangle - V)$ может быть очень малой величиной. В этом случае амплитуды M_1 и M_3 первых гармонических составляющих в (2.4) достаточно велики, а амплитуды M_2 и M_4 вторых гармоник — незначительны. При $\omega_{10} \gg \omega_{20}$ и $\omega_{10} \gg \omega_{30}$ роль вторых гармоник в (2.4) практически незаметна.

Итак, колебания углов рыскания и тангажа при преобладающем вращении аппарата вокруг оси с наименьшим моментом инерции характеризуются малыми частотами (большими периодами); амплитуды определяются в основном начальными угловыми скоростями. На фиг. 3 приведены зависимости $\omega_2(t)$ и $\omega_3(t)$, а также $\psi(t)$ и $\vartheta(t)$, полученные при следующих начальных условиях: $\omega_{10} = 1,1$ рад/с, $\omega_{20} = \omega_{30} = 10^{-3}$ рад/с, $\gamma_0 = \psi_0 = 0^\circ$, $\vartheta_0 = 16,8^\circ$ для аппарата с соотношением моментов инерции



Фиг. 3



Фиг. 4

$I_2/I_1 = 11$, $I_3/I_1 = 10$. Кривые на фиг. 3 для точного и приближенного решений слились.

Для случая преимущественного вращения аппарата вокруг оси с наибольшим моментом инерции, т. е. когда $\omega_{20} \gg \omega_{10}$ и $\omega_{20} \gg \omega_{30}$ (при выполнении условия (1.6)), справедливы допущения: $\omega_2 \approx \langle \omega_2 \rangle = \text{const}$, т. е. изменение угловой скорости ω_2 относительно среднего значения (1.19) незначительно; углы крена и тангажа малы по величине, т. е. $\cos \gamma \approx \cos \vartheta \approx 1$, $\sin \gamma \approx \gamma$, $\text{tg } \vartheta \approx \vartheta$.

В силу первого допущения решения первого и третьего уравнений (1.1) имеют вид

$$\omega_1 = B_1 \sin(Wt + F_1), \quad \omega_3 = B_3 \sin(Wt + F_3) \quad (2.5)$$

$$W = \langle \omega_2 \rangle \left[\frac{(I_2 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3} \right]^{1/2}, \quad B_1 = \left(\frac{2E_0 I_2 - K_0^2}{I_1(I_2 - I_1)} \right)^{1/2}$$

$$B_3 = \left(\frac{2E_0 I_2 - K_0^2}{I_3(I_2 - I_3)} \right)^{1/2}, \quad \text{tg } F_1 = \frac{\omega_{10}}{\omega_{30}} \left(\frac{I_1(I_2 - I_1)}{I_3(I_2 - I_3)} \right)^{1/2}, \quad \text{tg } F_3 = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} \left(\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_2 - I_1)} \right)^{1/2}$$

Амплитуды B_1 и B_3 точного (1.16) и приближенного (2.5) решений одинаковы, а период колебаний $T_{3,1}$ точного решения больше приближенного $2\pi/W$. Однако при $h^2 \rightarrow 0$ эти периоды совпадают.

С учетом второго допущения о малости углов ϑ и γ , т. е. при $\vartheta_0 \gamma \approx 0$, уравнения (1.2) принимают вид

$$\dot{\gamma}^* = \omega_1 - \omega_2 \vartheta, \quad \dot{\psi}^* = \langle \omega_2 \rangle - \omega_3 \gamma, \quad \dot{\vartheta}^* = \langle \omega_2 \rangle \gamma + \omega_3 \quad (2.6)$$

Первое и третье уравнения (2.6) не зависят от решения второго. Поэтому углы крена и тангажа при заданных начальных условиях (γ_0 , ϑ_0 , $\gamma_0^* = \omega_{10} - \langle \omega_2 \rangle \vartheta_0$, $\vartheta_0^* = \langle \omega_2 \rangle \gamma_0 + \omega_{30}$) определяются с учетом (2.5) следующими формулами:

$$\gamma = B_4 \sin(\langle \omega_2 \rangle t + F_4) + \frac{B_3}{\langle \omega_2 \rangle} \sin(Wt + F_3) \quad (2.7)$$

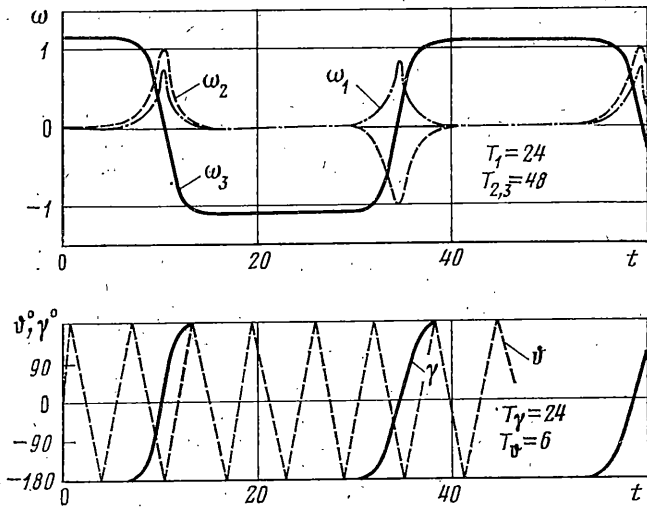
$$\vartheta = B_5 \sin(\langle \omega_2 \rangle t + F_5) + \frac{B_1}{\langle \omega_2 \rangle} \sin(Wt + F_1)$$

$$B_4 = [\gamma_0^2 + (\omega_{10}/\langle\omega_2\rangle - \vartheta_0)^2]^{1/2}, \quad B_5 = [\vartheta_0^2 + (\omega_{30}/\langle\omega_2\rangle - \gamma_0)^2]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} F_4 = \gamma_0 \langle\omega_2\rangle / (\omega_{10} - \langle\omega_2\rangle \vartheta_0), \quad \operatorname{tg} F_5 = \vartheta_0 \langle\omega_2\rangle / (\omega_{30} + \langle\omega_2\rangle \gamma_0)$$

При малых ω_3 и γ произведение $\omega_3\gamma \approx 0$, и решение второго уравнения (2.6) в этом случае принимает вид $\psi = \psi_0 + \langle\omega_2\rangle t$.

Итак, в случае преимущественного вращения летательного аппарата вокруг оси с наибольшим моментом инерции амплитуды и частоты колебаний $\omega_1(t)$ и $\omega_3(t)$ определяются начальными условиями и соотношениями моментов инерции (2.5), амплитуды и частоты колебаний углов крена и тангажа определяются начальными условиями по углам Эйлера и средней частотой вращения $\langle\omega_2\rangle$. Вторые составляю-



Фиг. 5

щие в (2.7) незначительные ввиду малости величин $B_3/\langle\omega_2\rangle$ и $B_1/\langle\omega_2\rangle$. При $\omega_{20} \gg \omega_{10}$ и $\omega_{20} \gg \omega_{30}$ точные и приближенные решения практически совпадают.

На фиг. 4 приведены зависимости от времени угловых скоростей и углов Эйлера при $\omega_{20} = 1,1$ рад/с, $\omega_{10} = \omega_{30} = 10^{-3}$ рад/с, $\gamma_0 = \psi_0 = 0^\circ$, $\vartheta_0 = 10^\circ$ для аппарата с $I_2/I_1 = 11$ и $I_3/I_1 = 10$. Точное решение совпадает с приближенным.

Для случая вращения летательного аппарата с большой угловой скоростью относительно оси со средним моментом инерции (например, при $\omega_{30} \gg \omega_{10}$, $\omega_{30} \gg \omega_{20}$) приближенные решения существенно отличаются от точного. В качестве примера на фиг. 5 приведены зависимости от времени угловых скоростей и углов Эйлера для летательного аппарата с $I_2/I_1 = 11$ и $I_3/I_1 = 10$ при $\omega_{30} = 1,1$ рад/с, $\omega_{20} = \omega_{10} = 10^{-3}$ рад/с, $\gamma_0 = \psi_0 = 0$, $\vartheta_0 = 10^\circ$. Этот случай начальных условий соответствует условиям (1.5), однако точные решения, приведенные на фиг. 5, существенно отличаются от приближенных (2.1), (2.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
3. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
4. Жуковский Н. Е. Геометрическая интерпретация рассмотренного С. В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — В кн.: Жуковский Н. Е. Изб. соч. Т. 1. М — Л.: Гостехиздат, 1948, с. 316—350.
5. Чаплыгин С. А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. — В кн.: Чаплыгин С. А. Избранные труды по механике и математике. М.: Гостехиздат, 1954, с. 455—471.
6. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
7. Черноусько Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 474—483.
8. Котик М. Г. Критические режимы сверхзвукового самолета. М.: Машиностроение, 1967. 228 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1981