МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1982

УДК 534.015

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ УПРУГОИНЕРЦИОННОЙ ВИБРОЗАЩИТЫ

РЯБОЙ В. М.

Обзор различных типов упругоинерционной виброзащиты можно найти в [1–4]. Известно, что при увеличении степени виброизоляции в данной области частот отношение m/c общей массы соответствующей пассивной упругоинерционной виброизолирующей конструкции к ее статической жесткости неограниченно возрастает. Эта закономерность доказана в работе [5] в общем виде для всех линейно-упругих систем с сосредоточенными параметрами. В [5] найден порядок возрастания наименьшего возможного для линейноупругой дискретной консервативной системы значения m/c при повышении требований к виброизоляции в данном интервале частот.

В публикуемой работе определяется точное количественное выражение указанной зависимости. Полученные оценки описывают предельные возможности всей совокупности линейных пассивных упругоинерционных виброизолирующих систем любой структуры с любым конечным числом степеней свободы.

1. Типичная задача рассматриваемого класса формулируется следующим образом: найти наименьшее возможное значение суммарной массы m однонаправленной линейно-упругой системы, имеющей заданную статическую жесткость c и обладающей в данном диапазоне частот возбуждения $\omega\,(\omega_-\leqslant\omega\leqslant\omega_+)$ коэффициентом передачи $r(\omega)$, не превышающим заданной величины ε

$$|r(\omega)|\leqslant\varepsilon,\quad \omega_-\leqslant\omega\leqslant\omega_+ \tag{1.1}$$

В силу соображений размерности эта задача сводится к нахождению зависимости между тремя безразмерными параметрами $(m/c)\omega_-^2$, ω_+/ω_-, ε вида

$$m_{\min}=(c/\omega_-^2)\varphi(\omega_+/\omega_-,\ \varepsilon) \tag{1.2}$$

В [5] показано, что, за исключением вырожденных случаев $\varepsilon\geqslant1$ и $\omega_+/\omega_-=1$, функция φ в (1.2) не обращается в нуль; более того, доказано, что $\varphi=O(\ln^2\varepsilon)$, $\varepsilon\to0$.

Ниже найдены в замкнутой форме приближенные аналитические выражения для функции φ с известной (достаточно высокой) точностью; при этом выяснено, что существует линейная зависимость лишь между двумя безразмерными комбинациями указанных выше параметров, которая с высокой точностью описывает предельные возможности всего класса линейных упругоинерционных виброизолирующих систем с сосредоточенными параметрами. Результаты обобщаются на случай более сложных требований к частотной зависимости коэффициента передачи.

2. Математическая постановка задачи дана в [5]. Система состоит из n материальных точек, упруго связанных с жестким основанием и между собой. Упругие свойства системы описываются положительно-определенной матрицей жесткости C общего вида размерности $n\times n$. Здесь предполагается без уменьшения общности, что материальные точки системы способны смещаться лишь в одном направлении.

Уравнение колебаний системы при возбуждении гармонической силой с частотой ω, действующей (для определенности) на массу m_1, имеет вид (в амплитудах) $C\mathbf{u}-\omega^2 M\mathbf{u}=\mathbf{f}$, где $M=\mathrm{diag}(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — диагональная матрица масс; $\mathbf{f}=(f_1, 0, \ldots, 0)^T$; u — вектор амплитуд перемещений.

Виброизолирующие свойства системы характеризуются коэффициентом передачи $r(\omega)$, равным, по определению, отношению амплитуд гармонической силы, действующей на основание, и гармонической внешней силы f_1, действующей на «вход» системы (массу m_1). Отметим, что в силу теоремы взаимности $r(\omega)$ равен также отношению амплитуд колебаний точки m_1 и основания при кинематическом возбуждении со стороны основания. Известно, что для линейно-упругой системы с конечным числом степеней свободы функция $r(\omega)$ представляется в виде

$$r(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{1-\omega^2/\omega_i^2} \tag{2.1}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n} z_i=1 \tag{2.2}$$

Здесь ω_i — собственные частоты системы, z_i — действительные коэффициенты, выражающиеся через компоненты собственных форм. В [5] доказано, что наименьшее значение массы линейной консервативной системы, обладающей коэффициентом передачи (2.1), определяется формулой

$$m_{\min}=c\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|z_i|}{\omega_i}\right)^2 \tag{2.3}$$

где c^{-1} — общая статическая податливость системы, т. е. смещение точки m_1 при действии на нее единичной статической нагрузки.

По величинам z_i, ω_i можно [5, 6] найти (вообще говоря, неоднозначно) матрицу жесткости C и массы $m_1, \ldots, m_n$, а затем построить динамическую схему линейно-упругой системы, обладающей коэффициентом передачи (2.1), статической жесткостью c и массой (2.3). С учетом (2.3) основная задача данной работы формулируется следующим образом:

Задача 1. Найти (или оценить) нижнюю грань величины

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\frac{|z_i|}{\omega_i} \tag{2.4}$$

по всем n и всевозможным наборам $\omega_i>0$ и z_i ($i=1, 2, \ldots, n$), удовлетворяющим условию (2.2) и требованию к виброизоляции вида

$$|r(\omega)|\leqslant\varepsilon(\omega), \quad \omega\in\Omega \tag{2.5}$$

где $r(\omega)$ определяется формулой (2.1), $\varepsilon(\omega)$ — заданная функция, Ω — данная область частот, называемая в дальнейшем областью виброизоляции. Этот минимум в силу (2.3) определяет наименьшее возможное значение $(m/c)^{1/2}$ по всем линейно-упругим системам, удовлетворяющим (2.5).

Не представляет труда получение оценок искомого минимума сверху. Для этого достаточно найти зависимость величины (2.4) от Ω, ε для любой механической системы, т. е. по существу для любой функции вида (2.1), удовлетворяющей условиям (2.2), (2.5). Получить оценку минимума снизу более сложно. Для этого необходимо перейти к двойственной задаче, в которой нахождение минимума заменяется нахождением максимума. Ниже такой переход совершается для задачи с фиксированными собственными частотами. Затем доказывается вспомогательное утверждение, позволяющее сформулировать двойственную задачу для всевозможных наборов собственных частот. Наконец, выводится вариационная формулировка, позволяющая получить приближенное решение задачи в замкнутой форме.

3. Рассмотрим упрощенный вариант задачи 1, а именно, будем считать, что собственные частоты ω_i заданы. Поставив дополнительные условия в задаче 1, получим следующую формулировку

Задача 2. Найти нижнюю грань величины (2.4) по всевозможным наборам действительных чисел z_i, $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условиям (2.2) и (2.1), (2.5), где n и ω_i — заданные числа, Ω — заданная область положительной полуоси, $\omega_i>0$ лежат вне Ω.

Эту задачу можно рассматривать как задачу линейного приближения нулевого элемента в n-мерном векторном пространстве с бесконечным числом ограничений; при этом норма определяется как сумма модулей компонент (см. правую часть (2.4)), а ограничения заданы линейными неравенствами, вытекающими из (2.1), (2.5), и равенством (2.2). Соответствующая теорема двойственности доказана [7, гл. 9]. Значение нижней грани μ по z_i в задаче 2 равно значению верхней грани в следующей двойственной задаче

$$-\int\limits_{t\in K}\varepsilon d\lambda+\lambda_1\to\sup \tag{3.1}$$

$$\frac{g_i}{\omega_j}+\int\limits_{t\in K}a_j(t)\,d\lambda+\lambda_1=0,\quad |g_j|\leqslant 1\quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{3.2}$$

Здесь интеграл понимается в смысле Лебега, λ — неотрицательная регулярная счетно-аддитивная функция множества [7], K представляет собой дважды повторенное множество Ω ($K=\Omega_1\cup\Omega_2$), функция $a_j(t)$ имеет вид

$$a_j(t)=1/(1-t^2/\omega_j^2),\qquad t\in\Omega_1$$
$$a_j(t)=-1/(1-t^2/\omega_j^2),\qquad t\in\Omega_2$$

g_j и λ_1 — действительные числа. Верхняя грань берется по λ, λ_1, g_j.

Поскольку левая часть выражения (3.1) лишь увеличится, если при неизменном λ увеличить λ_1, то λ_1 принимает максимальное допускаемое условиями (3.2) значение. Тогда задача (3.1)—(3.2) преобразуется к виду

$$\min_j\left[\omega_j^{-1}-\int\limits_{t\in K}(a_j(t)+\varepsilon)\,d\lambda\right]\to\sup_\lambda \tag{3.3}$$

при условии

$$\min_j\left[\omega_j^{-1}-\int\limits_{t\in K}a_j(t)\,d\lambda\right]\geqslant\max_j\left[-\omega_j^{-1}-\int\limits_{t\in K}a_j(t)\,d\lambda\right] \tag{3.4}$$

Решение исходной задачи 1 равно нижней грани решений задачи (3.3)—(3.4) по всем конечным наборам $[\omega_j]$. Обозначим левую часть (3.4) через $P(\lambda, \Theta)$, правую — через $Q(\lambda, \Theta)$, где $\Theta=[\omega_j]$. Будем считать, что λ принадлежит множеству $\Lambda(\Theta)$ допустимых функций для данного Θ ($\lambda\in\Lambda(\Theta)$), если $P(\lambda, \Theta)\geqslant Q(\lambda, \Theta)$. Обозначив решение задачи (3.3), (3.4) через $\mu_+(\Theta)$, можем записать

$$\mu_+(\Theta)=\sup_{\lambda\in\Lambda(\Theta)}\left[P(\lambda,\Theta)-\int\limits_{t\in K}\varepsilon d\lambda\right]$$

Решение исходной задачи 1 $\mu_{\min}$ равно

$$\mu_{\min}=\inf_{\Theta\subset\Omega'}\mu_+(\Theta) \tag{3.5}$$

где Ω' — множество допустимых значений ω_i (дополнение Ω до положительной полуоси), а нижняя грань берется по всем конечным подмножествам Ω'. Чтобы получить искомую оценку снизу для $\mu_{\min}$, воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Лемма. $\mu_+(\Theta_1) \leqslant \mu_+(\Theta_2)$, если $\Theta_1 \supset \Theta_2$.

Доказательство. Пусть $\Theta_1 \supset \Theta_2$. В силу определения функционалов P и Q $P(\lambda, \Theta_1) \leqslant P(\lambda, \Theta_2)$; $Q(\lambda, \Theta_1) \geqslant Q(\lambda, \Theta_2)$. Следовательно, $\Lambda(\Theta_2) \supset \Lambda(\Theta_1)$. Можно написать цепочку неравенств

$$\mu_+(\Theta_1) = \sup_{\lambda \in \Lambda(\Theta_1)} \left[P(\lambda, \Theta_1) - \int \varepsilon d\lambda \right] \leqslant \sup_{\lambda \in \Lambda(\Theta_1)} \left[P(\lambda, \Theta_2) - \int \varepsilon d\lambda \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\lambda \in \Lambda(\Theta_2)} \left[P(\lambda, \Theta_2) - \int \varepsilon d\lambda \right] = \mu_+(\Theta_2)$$

что и требовалось доказать.

Из леммы и равенства (3.5) следует, что $\mu_{\min} \geqslant \mu'$, где $\mu' = \mu_+(\Omega')$ представляет собой решение следующей двойственной задачи

$$\mu' = \sup_{\lambda} \left[\inf_{\omega \in \Omega'} \left(\omega^{-1} - \int_{t \in K} (a(\omega, t) + \varepsilon)\, d\lambda \right) \right] \tag{3.6}$$

$$\inf_{\omega \in \Omega'} \left[\omega^{-1} - \int_{t \in K} a(\omega, t)\, d\lambda \right] \geqslant \sup_{\omega \in \Omega'} \left[-\omega^{-1} - \int_{t \in K} a(\omega, t)\, d\lambda \right] \tag{3.7}$$

где $a(\omega, t) = 1/(1 - t^2/\omega^2)$, $t \in \Omega_1$; $a(\omega, t) = -1/(1 - t^2/\omega^2)$, $t \in \Omega_2$. Решение двойственной задачи совпадает с решением исходной задачи 1, если оно сколь угодно близко аппроксимируется последовательностью решений аналогичных задач, где Ω' заменено некоторыми конечными Θ.

Предположим, что область виброизоляции Ω ограниченна; тогда Ω' содержит бесконечно удаленную точку и неравенство (3.7) обращается в равенство. Пользуясь этим, можно произвести дальнейшие упрощения. Ограничимся, кроме того, только теми мерами λ, которые порождены гладкими функциями (это предположение может лишь уменьшить верхнюю грань). В дальнейшем все оценки $\mu_{\min}$ снизу будем обозначать через μ_-. Пусть $d\lambda = \nu_1(t)\,dt$ на Ω_1, $d\lambda = \nu_2(t)\,dt$ на Ω_2. Обозначив $\nu_2(t) - \nu_1(t) = \nu(t)$ и выполнив замену переменных $t^2 = s$, $\omega^2 = p$, $\nu(t)\,dt = h(s)\,ds$, $\Omega \to L$, $\Omega' \to L'$, получим из (3.6)—(3.7) следующую формулу для оценки $\mu_{\min}$ снизу: $\mu_{\min} \geqslant \mu_-$, где

$$\mu_- = \sup_{h} \int_{L} [h(s) - \varepsilon |h(s)|]\, ds \tag{3.8}$$

при условии

$$\left| \int_{L} \frac{\operatorname{sh}(s)\, ds}{s - p} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad p \in L' \tag{3.9}$$

Значение интеграла в (3.8), вычисленное для любой функции h, удовлетворяющей (3.9), дает некоторую оценку величины $\mu = (m/c)^{1/2}$ снизу.

Введя функцию комплексного переменного

$$H(z) = \int_{L} \frac{sh(s)\, ds}{s - z}$$

можно [5] переписать постановку задачи в виде

$$\mu_- = \sup \left[H(0) - \pi^{-1} \int_L \varepsilon |\operatorname{Im} H(s)| s^{-1} ds \right] \tag{3.10}$$

$$|H(x)| \leqslant 1/\sqrt{x}, \qquad x \in L' \tag{3.11}$$

Под $H(s)$, $s \in L$ понимается любое предельное значение $H(z)$ при $z \to s$ (их мнимые части различаются лишь знаком). Верхняя грань берется по всем функциям $H(z)$, аналитическим в расширенной комплексной плоскости с разрезом вдоль L и принимающим действительные значения, удовлетворяющие (3.11), на положительной полуоси вне L. Заметим, что все требования к функции $H(z)$ удовлетворяются автоматически, если

$$H(z) = (1/\sqrt{z}) \sin [F(z) \sqrt{z}] \tag{3.12}$$

где $F(z)$ — функция, аналитическая вне L и действительнозначная на действительной оси вне L. Ее можно записать в виде интеграла Коши

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{f(s)\, ds}{s - z} \tag{3.13}$$

где $f(s)$ — действительная функция, удовлетворяющая условию Гельдера. С учетом (3.12), (3.13) получаем из (3.10) оценку

$$\mu_- = \sup_f \left\{ \frac{1}{\pi} \int_L \left[f(x) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}} \left| \operatorname{sh}(f(x)\sqrt{x}) \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{\pi} \int_L \frac{f(s)\, ds}{s - x} \right) \right| \right] \frac{dx}{x} \right\} \tag{3.14}$$

Нетрудно показать, что $\mu_- \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, функция f, доставляющая sup (или близкое к sup значение), также принимает при $\varepsilon \to 0$ бесконечно большие значения, так что косинус в правой части (3.14) является при малых ε быстро осциллирующей функцией. Это наводит на мысль заменить косинус его средним по полупериоду значением $2/\pi$ и искать sup полученного упрощенного выражения. Итак, имеем при достаточно малых ε:

$$\mu_- = \sup_f \left\{ \frac{1}{\pi} \int_L \left[f(x) - \frac{2\varepsilon}{\pi \sqrt{x}} |\operatorname{sh}(f(x)\sqrt{x})| \right] \frac{dx}{x} \right. \tag{3.15}$$

Очевидно, что sup достигается при $f(x) \geqslant 0$, так что знак модуля можно отбросить. Варьируя функцию f и пользуясь основной леммой вариационного исчисления, находим $\operatorname{ch} [f(x)\sqrt{x}] = \pi/2\varepsilon$, откуда, при малых ε

$$f(x) = \left(\ln \frac{\pi}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{3.16}$$

а для значения μ_- получаем из (3.15) после обратной замены переменных $x = \omega^2$, $L \to \Omega$:

$$\mu_- = \frac{2}{\pi} \int_\Omega \left[\ln \frac{\pi}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] \frac{d\omega}{\omega^2} \tag{3.17}$$

Соотношение (3.17) представляет собой оценку снизу величины $(m/c)^{1/2}$ для любой упругоинерционной системы, удовлетворяющей требованиям к виброизоляции (2.5). Эта оценка справедлива при достаточно малых значениях ε. Для ее уточнения и распространения на все значения ε в каждом конкретном случае достаточно вычислить выражение под знаком sup в (3.14) с подставленной функцией (3.16).

Рассмотрим подробнее наиболее простой и важный случай, когда $\varepsilon = \mathrm{const}$, $\Omega = [\omega_-, \omega_+]$ (см. формулу (1.1)), т. е. область виброизоляции состоит из одного диапазона частот. Из (3.17) непосредственно получаем

$$\sqrt{\frac{m}{c}}\,\frac{\omega_- \omega_+}{\omega_+ - \omega_-} \geqslant \frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{\pi}{\varepsilon} - 1\right] \tag{3.18}$$

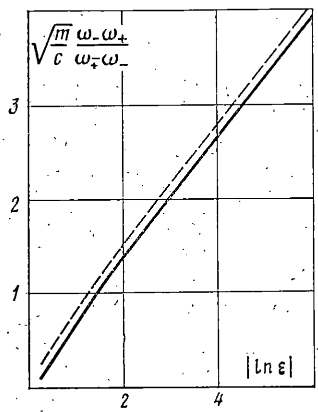
Неравенство (3.18) представляет один из основных результатов публикуемой работы. Оно оценивает снизу предельные возможности упругоинерционной виброзащиты в широкой области изменения параметров. Более того, ниже будет показано, что оценка (3.18) близка к точной нижней грани, иными словами, существуют упругоинерционные системы, для которых левая часть (3.18) лишь незначительно превышает правую.

Рассмотрим подробнее величину, стоящую в левой части (3.18). Имеем

$$\tau \equiv \sqrt{\frac{m}{c}}\,\frac{\omega_- \omega_+}{\omega_+ - \omega_-} = \frac{T_0}{T_- - T_+}$$

Здесь $T_0 = 2\pi\sqrt{m/c}$ — характерный период системы, $T_+ = 2\pi/\omega_+$, $T_- = 2\pi/\omega_-$. Величину τ назовем характерным относительным периодом упругоинерционной системы для данного интервала виброизоляции. Эта величина играет важную роль в описании предельных возможностей упругоинерционной виброзащиты: использование вместо двух безразмерных параметров ω_+/ω_- и $\omega_-(m/c)^{1/2}$ одного параметра τ позволяет свести описание предельных возможностей всего класса упругоинерционных виброизолирующих систем на любом частотном диапазоне виброизоляции, по существу, к одному простому линейному неравенству.

Неравенство (3.18) можно уточнить и распространить на большие значения ε при помощи формул (3.14), (3.16). Подстановка (3.16) в выражение под знаком sup в (3.14) дает



$$\tau \geqslant \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{\varepsilon} - \frac{\omega_+\omega_-}{\omega_+ - \omega_-}\int_{\omega_-}^{\omega_+}\left|\cos\left[\left(\frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi}{\varepsilon}\right)\times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \ln\frac{(\omega_+ - \omega)(\omega + \omega_-)}{(\omega_+ + \omega)(\omega - \omega_-)}\right]\right|\frac{d\omega}{\omega^2} \tag{3.19}$$

Вычисления, проведенные при значениях параметра ω_+/ω_- от 1,04 до 32,0 показали, что при $\varepsilon \leqslant 0,3$ (от 10 дБ и выше) правые части (3.19) и (3.18) отличаются незначительно. При бóльших значениях ε правая часть (3.19) очень слабо зависит от параметра ω_+/ω_- (максимальное различие результатов для $\omega_+/\omega_- = 1,04$ и 32,0 менее 0,02). Результат вычисления правой части (3.19) показан на фигуре сплошной линией. Точки на плоскости $(\tau, |\ln\varepsilon|)$, лежащие правее и ниже этой линии, не могут соответствовать никакой линейной консервативной механической системе.

4. Чтобы построить механическую систему с параметрами, приближающимися к оптимальным (в смысле максимума $|\ln\varepsilon|$ при данном τ или минимума τ при данном ε), расположим собственные частоты в тех точках, в которых неравенство (3.11) обращается в равенство. Согласно (3.12), (3.13), (3.16) эти собственные частоты определяются из уравнения

$$\left|\sin\left[\left(\frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi}{\varepsilon}\right)\ln\frac{(\omega_+ - \omega)(\omega_- + \omega)}{(\omega_- - \omega)(\omega_+ + \omega)}\right]\right| = 1 \tag{4.1}$$

Решения этого уравнения не представляет труда выписать в явном виде. Они образуют две последовательности, одна из которых, монотонно возрастая, сходится к ω_-, а другая, монотонно убывая, сходится к ω_+. Рассмотрим сформулированную выше задачу 2, в которой в качестве частот ω_i взяты по нескольку первых членов указанных последовательностей и бесконечно большая собственная частота. Задача 2 решается численно при помощи алгоритма А. Я. Ремеза [8]. Этот алгоритм основан на определении точек ξ_i отрезка $[\omega_-, \omega_+]$, в которых $|r(\xi_i)|=\varepsilon$ при помощи довольно трудоемкого итерационного процесса. Было замечено, что те же численные результаты получаются, если сразу взять в качестве ξ_i точки ω_-, ω_+ и нужное число корней уравнения

$$\left|\cos\left[\left(\frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi}{\varepsilon}\right)\ln\frac{(\omega_+-\xi)(\omega_-+\xi)}{(\omega_++\xi)(\xi-\omega_-)}\right]\right|=1$$

При увеличении количества собственных частот построенные таким образом решения быстро сходятся к точкам, лежащим на пунктирной линии, показанной на фиг. 1. При достаточно малых ε эта линия — прямая, параллельная сплошной прямой, отражающей неравенство (3.18), и немного от нее отстоящая (примерно на 0,15 по оси ординат или на 1,9 дБ по оси абсцисс). Зависимость от ω_+/ω_- на прямолинейном участке отсутствует, а на криволинейном — незначительна, как и для оценки снизу.

Решив задачу 2 для некоторого набора ω_i, найденного, как указано выше ($\omega_n=\infty$ заменяется на большое конечное значение $\omega_n\gg\omega_{n-1}$) можно, пользуясь методами, изложенными в [5, 6], построить конкретные динамические схемы с параметрами, близкими к оптимальным. Матрицы M и C определяются единственным образом, если потребовать, например, чтобы C была трехдиагональной. Соответствующие динамические схемы представляются в виде цепочек масс, соединенных между собой и с основанием посредством идеальных невесомых пружин, шарниров и рычагов; они, по-видимому, не представляют общего интереса и здесь не приводятся.

5. Общая оценка (3.17) позволяет рассмотреть и более сложные варианты требований (2.5). Пусть, например, область виброизоляции Ω представляет собой объединение непересекающихся отрезков $[\omega_-^{(1)}, \omega_+^{(1)}]$ $[\omega_-^{(2)}, \omega_+^{(2)}], \ldots, [\omega_-^N, \omega_+^N]$, причем $\varepsilon(\omega)=\varepsilon_i$ $(\omega_-^{(i)}\leqslant\omega\leqslant\omega_+^{(i)})$. Оценка (3.17) дает

$$\sqrt{\frac{m}{c}}\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{\omega_+^{(i)}-\omega_-^{(i)}}{\omega_-^{(i)}\omega_+^{(i)}}\left[\ln\frac{\pi}{\varepsilon_i}-1\right]$$

Уравнение для определения собственных частот системы с характеристиками, близкими к оптимальным (аналог уравнения (4.1)) имеет вид

$$\sin\left[\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\frac{\pi}{\varepsilon_i}\right)\ln\frac{(\omega_+^{(i)}-\omega)(\omega_-^{(i)}+\omega)}{(\omega_-^{(i)}-\omega)(\omega_+^{(i)}+\omega)}\right]=1$$

Рассмотрим теперь случай, когда требуется быстрое убывание коэффициента передачи, начиная с некоторой частоты: $\varepsilon(\omega)=\varepsilon_-(\omega_-/\omega)^l$, $\omega\geqslant\omega_-$.

Пользуясь формулой (3.17), где $\Omega=[\omega_-, \omega_+]$ и устремляя ω_+ к бесконечности, получаем оценку

$$\sqrt{\frac{m}{c}}\geqslant\frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{\pi}{\varepsilon_-}+l-1\right]\frac{1}{\omega_-}$$

Не представляет принципиальных трудностей также обобщение уточненной оценки (3.19) и методики построения частотной характеристики и динамической схемы с близкими к оптимальным параметрами. Заметим, основные результаты публикуемой работы, представленные на фигуре формулами (3.14), (3.17)—(3.19) и др., не содержат числа степеней свободы системы. Представляется естественной гипотеза о том, что эти результаты непосредственно обобщаются и на континуальные линейно-упругие консервативные системы. Доказательство этого утверждения, разумеется, не вытекает из данной работы и представляет самостоятельную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляковский Н. Г.* Конструктивная амортизация механизмов, приборов и аппаратуры на судах. Л.: Судостроение, 1965. 523 с.
2. *Коловский М. З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 319 с.
3. *Гурецкий В. В., Мазин Л. С.* Синтез оптимальной виброзащитной системы при учете динамических свойств амортизирующего крепления.— Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 3, с. 50—55.
4. *Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.* Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
5. *Рябой В. М.* О наименьшей массе упругоинерционных виброизолирующих систем.— Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 4, с. 59—67.
6. *Генкин М. Д., Рябой В. М., Яблонский В. В.* Об одной обратной задаче виброакустики.— Акуст. ж., 1980, т. 26, в. 4, с 618—620.
7. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
8. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.

Москва — Поступила в редакцию 11.XI.1980