

УДК 531.383

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ ДВУХСТЕПЕННЫХ СИЛОВЫХ ГИРОСКОПОВ

ВАСИЛЬЕВ В. Н.

Для характеристики управляющих возможностей системы двухстепенных силовых гироскопов-гиродинов используется область W изменения вектора управляющего момента [1, 2]. Установлена связь между матрицей состояния, областью S изменения вектора кинетического момента и областью W . Исследованы свойства области W , показано, что она представляет собой многогранник, гранями которого являются ромбы. Получены расчетные формулы для определения размеров области W в направлении произвольного единичного вектора g , выявлены особые состояния гиросиловой системы. В качестве примера рассмотрена система четырех гиродинов [1].

1. Системой гиродинов или гиросиловой системой назовем совокупность n одинаковых двухстепенных силовых гироскопов-гиродинов, установленных на космическом аппарате произвольным образом.

Пусть G_j — вектор кинетического момента j -го гиродина, g_j — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором G_j , h_j — единичный вектор, направленный по оси прецессии j -го гиродина. Полагаем, что эти векторы заданы в системе осей космического аппарата $Oxyz$. Совокупность векторов h_j определяет схему установки гиродинов на космическом аппарате, т. е. положение осей прецессии относительно осей $Oxyz$. Совокупность векторов G_j характеризует взаимное положение роторов и их расположение относительно системы осей $Oxyz$. Она может быть задана различными способами.

Введем в рассмотрение n связанных с векторами h_j правых систем координат $Ox_j y_j z_j$, у которых оси Oz_j направлены по векторам h_j , а оси Ox_j расположены в плоскостях, образованных осями прецессии и какой-либо осью $Oxyz$. В этих системах координат положение векторов G_j и g_j однозначно определяется углами прецессии β_j , которые отсчитываются от положительного направления оси Ox_j , или проекциями единичных векторов

$$\begin{pmatrix} g_{x_j} \\ g_{y_j} \\ g_{z_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_j \\ \sin \beta_j \\ 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

При известной схеме установки гиродинов совокупность векторов G_j однозначно определяется вектором $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Совокупность векторов G_j в осях $Oxyz$ может быть задана матрицей состояния

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

элементы которой x_j, y_j, z_j — проекции единичных векторов g_j на оси $Oxyz$ — вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{j11} & \gamma_{j12} & \gamma_{j13} \\ \gamma_{j21} & \gamma_{j22} & \gamma_{j23} \\ \gamma_{j31} & \gamma_{j32} & \gamma_{j33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta_j \\ \sin \beta_j \\ 0 \end{pmatrix}$$

где квадратная матрица представляет собой матрицу поворота, осуществляющую совмещение системы осей $Ox_j y_j z_j$ с системой $Oxyz$. Матрица поворота считается заданной, если задана совокупность единичных векторов \mathbf{h}_j .

Изменение состояния гиросиловой системы происходит за счет изменения углов прецессии. Каждому вектору β соответствует матрица состояния (1.1) и вектор кинетического момента системы гиродинов

$$\mathbf{H}(\beta) = G \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_j(\beta_j)$$

где G — кинетический момент одного гиродина.

Матрица A и вектор β характеризуют текущее состояние гиросиловой системы.

Одной из обобщенных характеристик, дающих представление об управляющих возможностях системы в целом, является область S изменения вектора кинетического момента, под которой понимается область возможных положений вектора \mathbf{H} [3]. Поверхность области S характеризует состояния насыщения гиросиловой системы.

Геометрическая форма области S зависит от числа и схемы установки гиродинов на космическом аппарате, а ее размеры пропорциональны кинетическому моменту гиродина. Область S , построенную при условии $G=1$ Н·м·с, обозначим S_0 . Она характеризует геометрическую форму области S .

Каждой матрице состояния внутри области S_0 или на ее поверхности соответствует одна точка s_0 или s_0^* , определяемая вектором с соответствующими координатами

$$\mathbf{g} = \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_j, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Обратное утверждение об однозначном соответствии справедливо лишь для точек s_0^* , расположенных на поверхности области S_0 . Для точек s_0 , расположенных внутри области S_0 , обратное утверждение в общем случае ($n > 3$) неверно: каждой точке s_0 может соответствовать множество матриц состояния, элементы которых удовлетворяют второму равенству (1.2).

При изменении угла прецессии v -го гиродина точка s_0 перемещается по окружности единичного радиуса с центром в точке $\sum \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_v$, плоскость окружности перпендикулярна вектору \mathbf{h}_v . Всей совокупности углов прецессии гиродинов при их изменении в диапазоне от 0 до 2π соответствует вся область S , которая дает наглядное представление о величине кинетического момента, создаваемой гиросиловой системой в произвольном направлении.

2. Момент, создаваемый гиросиловой системой, вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}_c = -G \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \times \mathbf{g}_j + \omega \times \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_j \right]$$

где ω — вектор угловой скорости космического аппарата, λ_j — вектор скорости прецессии j -го гиродина. Первое слагаемое — момент, создаваемый

за счет изменения взаимного положения главных осей гироскопов, или управляющий момент системы гироскопов. Второе слагаемое характеризует гироскопический момент, возникающий при вращении гироскопов совместно с космическим аппаратом.

Вектор управляющего момента системы n гироскопов

$$\mathbf{M} = -G \sum_{j=1}^n \lambda_j \times \mathbf{g}_j$$

с учетом $\lambda_j = \lambda_j \mathbf{h}_j$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{M} = G \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{m}_j$$

где $\mathbf{m}_j = \mathbf{g}_j \times \mathbf{h}_j$ — единичный вектор, коллинеарный вектору управляющего момента j -го гироскопа $\mathbf{M}_j = -G \lambda_j \times \mathbf{g}_j$.

Каждой матрице состояния может быть поставлена в соответствие область W изменения вектора управляющего момента, под которой будем понимать геометрическое место возможных положений вектора \mathbf{M} . Геометрическая форма области W зависит от матрицы состояния, а ее размеры пропорциональны кинетическому моменту гироскопа и максимальной скорости прецессии λ . Область W , построенную при условии $G = 1$ Н·м·с и нормировании скоростей прецессии $\lambda_j^\circ = \lambda_j / \lambda$, обозначим W_0 . Она характеризует геометрическую форму области W .

Любая скорость прецессии λ_j° представляет собой управляющий параметр, область изменения которого не зависит от значений остальных управляющих параметров и задается условием $|\lambda_j^\circ| \leq 1$. Эти условия определяют n -мерный куб в пространстве переменных λ_j .

Каждому вектору $\lambda^\circ = \|\lambda_1^\circ \lambda_2^\circ \dots \lambda_n^\circ\|^T$ внутри области W_0 или на ее поверхности соответствует одна точка m , определяемая вектором

$$\mathbf{m} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^\circ \mathbf{m}_j$$

с компонентами

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{d\beta_1} & \frac{dx_2}{d\beta_2} & \dots & \frac{dx_n}{d\beta_n} \\ \frac{dy_1}{d\beta_1} & \frac{dy_2}{d\beta_2} & \dots & \frac{dy_n}{d\beta_n} \\ \frac{dz_1}{d\beta_1} & \frac{dz_2}{d\beta_2} & \dots & \frac{dz_n}{d\beta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^\circ \\ \lambda_2^\circ \\ \vdots \\ \lambda_n^\circ \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} dx_j / d\beta_j &= \gamma_{j 12} \cos \beta_j - \gamma_{j 11} \sin \beta_j \\ dy_j / d\beta_j &= \gamma_{j 22} \cos \beta_j - \gamma_{j 21} \sin \beta_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ dz_j / d\beta_j &= \gamma_{j 32} \cos \beta_j - \gamma_{j 31} \sin \beta_j \end{aligned}$$

Обратное утверждение об однозначном соответствии справедливо лишь для точек, расположенных на поверхности области W_0 . Для точек m , расположенных внутри области W_0 , обратное утверждение в общем случае ($n > 3$) неверно: каждой точке m может соответствовать множество скоростей прецессии, которые удовлетворяют равенству (2.1).

При заданном векторе β ($3 \times n$)-матрица Якоби соотношения (2.1) осуществляет линейное преобразование n -мерного вектора λ° , заданного в пространстве параметров λ_j , в вектор \mathbf{m} , определенный в системе осей $Oxuz$. Это означает, что при изменении скорости прецессии v -го гироскопа точка m перемещается по прямой линии. Область W_0 является линейным отображением n -мерного куба, заданного в пространстве параметров λ_j°

($|\lambda_j| \leq 1$), в трехмерное пространство, определяемое системой осей *Oxyz*. Область *W* является обобщенной характеристикой, которая дает представление о величине управляющих моментов, создаваемых гиросиловой системой в произвольном направлении.

Покажем, что область изменения вектора управляющего момента системы *n* одинаковых гиродинов с произвольно расположенными осями прецессии представляет собой многогранник, симметричный относительно центра *O* и обладающий следующими свойствами: число его граней не превышает удвоенного числа сочетаний из *n* по 2 ($2C_n^2$), а его гранями являются ромбы со стороной $2G\lambda$.

Обозначим через $\mathbf{m}_j^* = -\lambda_j \times \mathbf{g}_j$ вектор управляющего момента *j*-го гиродина при условии $G=1$ Н·м·с. Его можно представить в виде $\mathbf{m}_j^* = \lambda_j \mathbf{m}_j$. Пусть $\mathbf{m}_k = \mathbf{g}_k \times \mathbf{h}_k$ и $\mathbf{m}_l = \mathbf{g}_l \times \mathbf{h}_l$ — два вектора, проекции которых на направление, заданное единичным вектором *r*, наименьшие по абсолютной величине среди всех проекций векторов $\mathbf{m}_j = \mathbf{g}_j \times \mathbf{h}_j$. Полагаем, что все векторы попарно не коллинеарны.

Проектуруя вектор управляющего момента системы *n* гиродинов на вектор *r*, получим

$$M_r = G\mathbf{r} \cdot \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{m}_j$$

Величины M_r , λ_k и λ_l можно рассматривать как линейные функции *n*-2 скоростей прецессии. Чтобы обеспечить максимальную величину момента в направлении вектора *r*, выберем $\lambda_j = \lambda \operatorname{sign}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}_j)$, $j \neq k, l$.

Тогда

$$M_r = G \left(\lambda \sum_{j \neq k, l} \delta_j \mathbf{r} \cdot \mathbf{m}_j + \mathbf{r} \cdot \mathbf{m}_k \lambda_k + \mathbf{r} \cdot \mathbf{m}_l \lambda_l \right), \quad \delta_j = \operatorname{sign} \lambda_j \quad (2.2)$$

Для определения λ_k и λ_l воспользуемся равенством нулю проекций вектора *M* на направления \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , такие, что $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$. Запишем эти равенства в виде двух уравнений относительно λ_k и λ_l :

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{m}_k \lambda_k + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{m}_l \lambda_l + \lambda \sum_{j \neq k, l} \delta_j \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{m}_j = 0$$

$$\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{m}_k \lambda_k + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{m}_l \lambda_l + \lambda \sum_{j \neq k, l} \delta_j \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{m}_j = 0$$

Решая уравнения, найдем

$$\lambda_k = \frac{\mathbf{r} \cdot \sum \delta_j \mathbf{m}_j \times \mathbf{m}_l}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{m}_l \times \mathbf{m}_k)}, \quad \lambda_l = \frac{\mathbf{r} \cdot \sum \delta_j \mathbf{m}_j \times \mathbf{m}_k}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{m}_k \times \mathbf{m}_l)}$$

(знак суммы показывает суммирование по всем индексам *j*, кроме *k* и *l*).

Подставим λ_k и λ_l в выражение (2.2) и, опуская промежуточные преобразования, получим

$$M_r = G\lambda \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{m}_k \times \mathbf{m}_l, \quad \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \delta_j \mathbf{m}_j \quad (2.3)$$

Годограф вектора $M_r \mathbf{r}$ представляет собой плоскость, уравнение которой имеет вид

$$M_r \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 - G\lambda \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

Эта плоскость параллельна векторам \mathbf{m}_k и \mathbf{m}_l .

Условие минимальности по абсолютной величине проекций векторов \mathbf{m}_k и \mathbf{m}_l сохраняется и для направления, заданного вектором $\mathbf{r}^* = -\mathbf{r}$, поэтому существует плоскость, симметричная плоскости (2.4) относительно начала координат.

Если три любых вектора из совокупности векторов \mathbf{m}_i не компланарны, то для каждой пары векторов существуют свои направления \mathbf{r} и \mathbf{r}^* , на которых выполняются условия минимальности, и две плоскости, симметричные относительно начала координат. Поскольку число пар векторов \mathbf{m}_i равно C_n^2 , число граней области W при принятых допущениях составляет $2C_n^2$.

В направлении $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \mathbf{m}_k \times \mathbf{m}_l$ величина управляющего момента минимальна ($M_{r_0} = G\lambda r_0 \cdot \mathbf{u}$), так как в его создании не принимают участие k -й и l -й гироидины. Вектору \mathbf{r}_0 соответствует точка O_1 , расположенная на плоскости (2.4). Относительно этой точки k -й и l -й гироидины создают управляющий момент, область изменения которого имеет форму ромба (фиг. 1). Стороны ромба параллельны векторам \mathbf{m}_k и \mathbf{m}_l , а длина сторон с учетом $m_k = m_l = 1$ составляет $2G\lambda$. Таким образом, гранями области W являются ромбы.

Если среди векторов \mathbf{m}_i имеется n_1 коллинеарных векторов, то отдельными гранями области W будут параллелограммы с длиной сторон $2G\lambda n_1$ и $2G\lambda$. Если среди векторов \mathbf{m}_i имеется n_2 векторов компланарных, но не коллинеарных, то отдельными гранями области W будут равносторонние $2n_2$ -угольники. Параллелограммы и равносторонние многоугольники образуются в результате геометрического сложения на одной плоскости нескольких ромбов. При наличии коллинеарных и компланарных векторов \mathbf{m}_i число граней области W будет меньше, чем $2C_n^2$.

Из изложенного выше, в частности, следует, что область изменения вектора управляющего момента системы n одинаковых гироидинов с параллельными осями прецессии представляет собой равносторонний $2n$ -угольник, симметричный относительно центра [2].

Между областями W и S существует соответствие, в силу которого каждой области W , заданной вектором β , соответствует одна точка s или s^* внутри или на поверхности области S . Обратное утверждение об однозначном соответствии справедливо лишь для точек s^* , расположенных на поверхности области S . Для точек, расположенных внутри области S , обратное утверждение в общем случае ($n > 3$) неверно: каждой точке s может соответствовать множество областей W и векторов β .

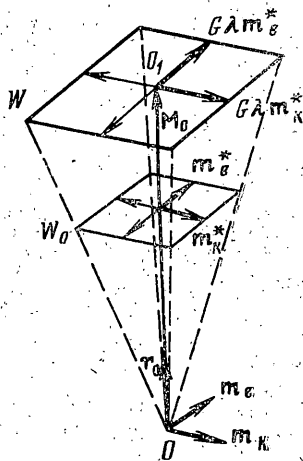
Для точек s^* , характеризующих состояние насыщения гиросиловой системы, область W вырождается в плоскую фигуру, которая параллельна плоскости, касательной к поверхности области S . Это означает, что в точках s^* гиросиловая система не может создавать управляющие моменты в направлении градиента к поверхности области S .

Состояния гиросиловой системы, при которых область W образует лишь двумерное или одномерное множество, назовем особыми, а соответствующие им области W — вырожденными.

Из формулы (2.4) получим общие условия, при которых управляющий момент, создаваемый системой гироидинов в произвольном направлении \mathbf{r} , обращается в нуль

$$\mathbf{r}_0 \cdot \sum_{j=1}^n \delta_j \mathbf{m}_j = 0$$

Поскольку при соответствующем управлении скоростями прецессии $\sum \delta_j \mathbf{m}_j \neq 0$, то последнее условие выполняется, если все векторы \mathbf{m}_j распо-

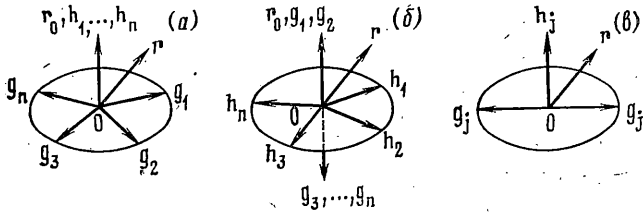


Фиг. 1

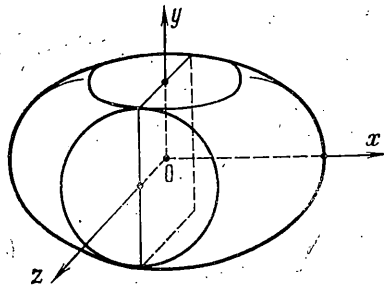
ложены в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{r}_0

$$\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{g}_j \times \mathbf{h}_j) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

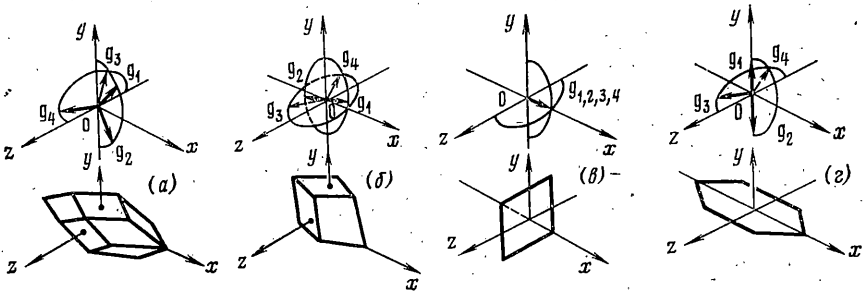
Следовательно, система гиросилов теряет управляющие свойства в произвольном направлении \mathbf{r} ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 \neq 0$), если ось прецессии каждого гиросилова, его вектор кинетического момента и вектор \mathbf{r}_0 компланарны. В частности, гиросиловая система теряет управляющие свойства, если оси прецессии всех гиросилов параллельны (фиг. 2, а) или векторы кинетического момента всех гиросилов коллинеарны между собой (фиг. 2, б). В особых состояниях гиросиловая система может создавать управляющий мо-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

мент только в направлениях, перпендикулярных вектору \mathbf{r}_0 , при этом область W вырождается в плоскую фигуру.

В любой схеме установки гиросилов (система векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$) при вращении вектора \mathbf{g}_j вокруг оси прецессии ($0 \leq \beta_j \leq 2\pi$) особые состояния для j -го гиросилова возникают по крайней мере дважды (фиг. 2, в). Гиросиловая система сохраняет свои управляющие свойства, если особые состояния для всех гиросилов не возникают одновременно.

Особые состояния гиросиловой системы образуют особые точки и поверхности внутри области S [4]. Каждой особой точке могут соответствовать как вырожденные, так и невырожденные области W . Наличие невырожденных областей в особых точках дает возможность регулировать взаимное положение гиросилов, не меняя результирующий вектор кинетического момента.

тического момента гиросиловой системы, так, чтобы либо исключить возможность возникновения особых состояний, либо уменьшить вероятность их возникновения.

Объем области W может служить мерой удаления гиросиловой системы от особых состояний. Поэтому в задачах управления системой гиросиловой целесообразно использовать критерий максимума объема области W [1].

3. В качестве примера рассмотрим систему четырех гиросиловых, которая установлена на космическом аппарате так, что оси прецессии двух гиросиловых параллельны оси Oy , двух других — параллельны оси Oz [1].

Матрица состояния такой системы имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

$x_j = \cos \beta_j$ ($j=1, 2, 3, 4$), $y_1 = \sin \beta_1$, $y_2 = \sin \beta_2$, $z_3 = \sin \beta_3$, $z_4 = \sin \beta_4$ где β_j — угол прецессии j -го гиросилового, который отсчитывается от положительного направления оси Ox .

Положение точки s_0 определяется координатами $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $y = y_1 + y_2$, $z = z_3 + z_4$.

Если углы прецессии гиросиловых не ограничены, область S_0 системы четырех гиросиловых представляет собой симметричную относительно осей координат фигуру, вытянутую вдоль оси Ox (фиг. 3). Она пересекает координатные оси в точках $x = \pm 4$, $y = \pm 2$, $z = \pm 2$.

Положение точки m области W_0 определяется координатами

$$\begin{vmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & z_3 & z_4 \\ -x_1 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & -x_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1^0 \\ \lambda_2^0 \\ \lambda_3^0 \\ \lambda_4^0 \end{vmatrix}$$

Область W_0 системы четырех гиросиловых в общем случае представляет собой многогранник, симметричный относительно начала координат (фиг. 4, а). Число его граней составляет $2C_n^2 = 12$. Форма 12-гранника меняется при изменении взаимного положения векторов g_j . В частности, если векторы g_1 и g_2 или g_3 и g_4 коллинеарны, область W_0 представляет собой параллелепипед (фиг. 4, б). Этим состояниям соответствуют точки внутри области S_0 . Максимальный объем области W_0 имеет в точке O области S_0 при условии $g_1 \cdot g_2 = 0$ и $g_3 \cdot g_4 = 0$.

В состояниях насыщения область W_0 вырождается в плоскую фигуру. В точках s_0^* с координатами $(\pm 4, 0, 0)$, $(\pm 2, 0, \pm 2)$, $(\pm 2, \pm 2, 0)$ область W_0 имеет форму квадрата (фиг. 4, в). В точках s_0^* с координатами $(0, \pm 2, \pm 2)$ область W_0 представляет собой отрезок на оси Ox . В остальных точках на поверхности области S_0 область W_0 имеет форму ромба.

В особых состояниях, когда главные оси одной пары гиросиловых (с параллельными осями прецессии) располагаются в одной плоскости с осями прецессии другой пары, область W_0 вырождается в плоскую фигуру (фиг. 4, г) или отрезок прямой. В системе четырех гиросиловых особые состояния могут возникать, например, в точках, расположенных на оси Ox . Регулируя взаимное положение двух пар гиросиловых g_1, g_2 и g_3, g_4 , можно свести все множество особых состояний на оси Ox к одной точке, расположенной на заданном расстоянии от начала координат [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В. Н., Вейнберг Д. М., Шереметьевский Н. Н. Управление угловым положением долговременной орбитальной станции при помощи двухстепенных силовых гироскопов. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 3–9.
2. Васильев В. Н. Управление системой двухстепенных силовых гироскопов с параллельными осями прецессии. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 14–20.
3. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
4. Токарь Е. Н., Платонов В. Н. Исследование особых поверхностей систем безупорных гиросиловых. — Космические исследования, 1978, т. 16, вып. 5, с. 675–685.

Москва

Поступила в редакцию
12.IX.1980