

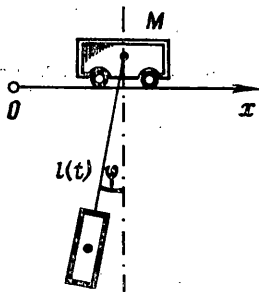
УДК 531.53

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНОЙ ПОДВЕСА

НГУЕН ЧЬОНГ

Рассматривается движение математического маятника с изменяющейся по линейному закону длиной подвеса. Движение осуществляется силой, приложенной к имеющей конечную массу точке подвеса. Решена задача разгона и торможения с гашением колебаний для режима с тремя участками постоянства силы (отдельно рассмотрен предельный случай малой скорости изменения длины) и задача перемещения с постоянной длиной подвеса с произвольно ограниченной силой, исследованы случаи ограничений, мало отличающихся от симметричных, а также случай, допускающий возможность импульсного уменьшения скорости подвеса. По постановке задач и способам решений работа близка к [1, 2]. Поставленные задачи представляют интерес в связи с исследованием оптимальных режимов работы контейнерных подъемных кранов и перегружателей.

1. Рассматривается движение маятника в вертикальной плоскости. Груз у маятника подвешен на нерастяжимой нити, длина которой может изменяться по известному закону. Точка подвеса маятника может перемещаться в заданном горизонтальном направлении. Управление движением точки подвеса осуществляется при помощи двигателя, имеющего ограниченную тягу. Обозначим через φ угол отклонения маятника от вертикали, $x \geq 0$ — координату точки подвеса, отсчитанную от начального положения вдоль заданного горизонтального направления Ox , v — скорость точки подвеса, m — массу груза, M — массу, связанную жестко с точкой подвеса (тележка), l — расстояние от центра масс груза до точки подвеса, $F(t)$ — управляющую силу, направленную вдоль оси x (фиг. 1). Уравнения движения системы маятник — тележка с известным законом изменения длины маятника имеют следующий вид:



Фиг. 1

$$(M+m)x'' - ml\varphi'' \cos \varphi - ml'' \sin \varphi - 2ml'\varphi' \cos \varphi + ml\varphi'^2 \sin \varphi = F(t) \quad (1.1)$$

$$l\varphi'' + 2l'\varphi' + g \sin \varphi = x'' \cos \varphi, \quad x' = v, \quad \varphi' = \omega$$

Первое уравнение (1.1) описывает движение точки подвеса, а второе уравнение — колебания маятника. Предположим, что длина маятника определяется линейной зависимостью от времени

$$l(t) = l_0 + s\lambda t \quad (1.2)$$

где l_0 — начальная длина, λ — постоянная скорость изменения длины, $s = +1$ и $s = -1$ для случаев опускания и подъема груза соответственно.

При принятых предположениях в случае малых колебаний уравнения (1.1) упрощаются

$$l\varphi'' + 2s\lambda\varphi' + k\varphi = F/M, \quad k = (1+m/M)g \quad (1.3)$$

$$v' + mg\varphi/M = F/M, \quad x' = v, \quad \varphi' = \omega$$

На управляющую силу наложены ограничения

$$-F_1 \leq F(t) \leq F_0, F_1 > 0, F_2 > 0, F_1 \neq F_2 \quad (1.4)$$

Ставятся следующие задачи управления.

Задача 1 (задача разгона). Требуется найти управление $F(t)$, удовлетворяющее ограничениям (1.4) и перемещающее систему (1.1) из состояния покоя

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = x(0) = v(0) = 0 \quad (1.5)$$

в состояние поступательного движения со скоростью $v_0(x(T))$ свободно):

$$\varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = 0, v(T) = v_0 \quad (1.6)$$

Задача 2 (задача перемещения). Требуется найти управление $F(t)$ удовлетворяющее ограничениям (1.4) и перемещающее систему (1.1) из состояния покоя (1.5) на заданное расстояние a с гашением колебаний

$$\varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = v(T) = 0, x(T) = a \quad (1.7)$$

Введем безразмерные переменные t', x', φ' и параметры u, λ', b, μ по формулам

$$t' = \frac{T_0}{t}, \quad x' = \frac{M}{F_0 T_0^2} x, \quad \varphi' = \frac{M l_0}{F_0 T_0^2} \varphi, \quad T_0 = \sqrt{\frac{l_0}{k}}, \quad u = \frac{F(t)}{F_0} \quad (1.8)$$

$$v_0' = \frac{M}{F_0 T_0} v_0, \quad k = \left(1 + \frac{m}{M}\right) g, \quad \mu = 1 + \frac{M}{m}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{l_0} T_0, \quad b = \frac{F_1}{F_0}$$

В переменных (1.8) соотношения (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) примут вид (штрихи далее опущены):

$$(1 + s\lambda t) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2s\lambda \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = u, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\mu} \varphi + u$$

$$-b \leq u(t) \leq 1, \quad \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = v(0) = 0, \quad \varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = 0, \quad v(T) = v_0 \quad (1.9)$$

В задаче торможения краевые условия следующие:

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0, \quad v(0) = v_0, \quad \varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = v(T) = 0 \quad (1.10)$$

Ниже будут построены режимы разгона и торможения в случаях подъема и опускания груза без обоснования их оптимальности. Построенные ниже режимы обладают минимально возможным числом переключения.

2. Как известно [1], разгон при ограниченном управляющем ускорении точки подвеса маятника постоянной длины ($\lambda = 0$) оптимален по быстродействию только при нечетном количестве интервалов постоянства управления. Для удовлетворения краевым условиям в случае управления силой минимально возможное число интервалов постоянства управления равно трем. Построим режим разгона с тремя интервалами постоянства. Случаи опускания и подъема груза характеризуются значениями параметра $s = \pm 1$ из (1.2).

Будем искать управление в задаче разгона в виде

$$u(t) = 1 \text{ при } 0 < t < t_1, t \geq T \quad (2.1)$$

$$u(t) = -b \text{ при } t_1 < t < t_2; u(t) = 1 \text{ при } t_2 < t < T$$

Здесь t_1, t_2, T — моменты переключения. Первое уравнение (1.9) интегрируется в бесселевых функциях на интервалах $[0, t_1], (t_1, t_2), (t_2, T]$. Состыковывая эти решения в точках t_1, t_2 и удовлетворяя краевым условиям при управлении (2.1), получим систему трех трансцендентных уравнений для определения моментов переключения, выраженных через пе-

ременные q_1, q_2, q_k :

$$\begin{aligned} q_1 &= p\sqrt{1+s\lambda t_1}, \quad q_2 = p\sqrt{1+s\lambda t_2} \\ q_k &= p\sqrt{1+s\lambda T}, \quad p=2/\lambda \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} pE(q_1)E(q_k)Z_1^{(1)}(q_2) + (1+b)q_1E(q_k)Z_1^{(2)}(q_2) - q_kE(q_1)Z_1^{(3)}(q_2) &= (1+b)q_2E(q_1)E(q_k) \\ pE(q_1)E(q_k)Z_2^{(1)}(q_2) + (1+b)q_1E(q_k)Z_2^{(2)}(q_2) - q_kE(q_1)Z_2^{(3)}(q_2) &= 0 \\ \mu p v_0 + 1/2(1+b)(\mu-1)(q_2^2 - q_1^2) - 1/2(\mu-1)(q_k^2 - p^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} E(q) &= J_1(q)N_2(q) - J_2(q)N_1(q) \\ Z_1^{(1)}(q) &= \left[-\frac{N_2(p)}{E(p)} \right] J_1(q) + \left[\frac{J_2(p)}{E(p)} \right] N_1(q) \\ Z_1^{(2)}(q) &= [N_2(q_1)]J_1(q) + [-J_2(q_1)]N_1(q) \\ Z_1^{(3)}(q) &= [-N_2(q_k)]J_1(q) + [J_2(q_k)]N_1(q) \\ Z_2^{(1)}(q) &= \left[-\frac{N_2(p)}{E(p)} \right] J_2(q) + \left[\frac{J_2(p)}{E(p)} \right] N_2(q) \\ Z_2^{(2)}(q) &= [N_2(q_1)]J_2(q) + [-J_2(q_1)]N_2(q) \\ Z_2^{(3)}(q) &= [-N_2(q_k)]J_2(q) + [J_2(q_k)]N_2(q) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где J_1, J_2 и N_1, N_2 — функции Бесселя и Неймана соответствующих порядков, $Z_m^{(i)}$ — цилиндрические функции порядка m с линейной комбинацией i . Значения q_1, q_2, q_k найдены численно на ЭВМ решением системы (2.3) при определенных наборах параметров p, b, μ, v_0 и $s=\pm 1$. При решении отбираются корни, соответствующие наименьшему значению T . Моменты переключения находятся из соотношений (2.2), а именно

$$t_i = 1/2s[(q_i^2 - p^2) / p] \quad (i=1, 2, k) \quad (2.5)$$

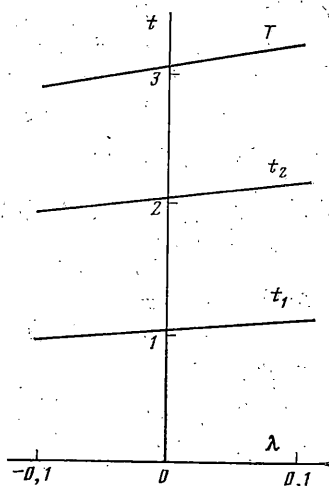
В случае постоянной длины подвеса ($\lambda \rightarrow 0, p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty$) при асимптотическом представлении бесселевых функций при больших аргументах после несложных преобразований система (2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \cos T - 1 &= (1+b)[\cos(T-t_1) - \cos(T-t_2)] \\ \sin T &= (1+b)[\sin(T-t_1) - \sin(T-t_2)] \\ \frac{1}{1+b}T - \frac{\mu}{(\mu-1)(1+b)}v_0 &= t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

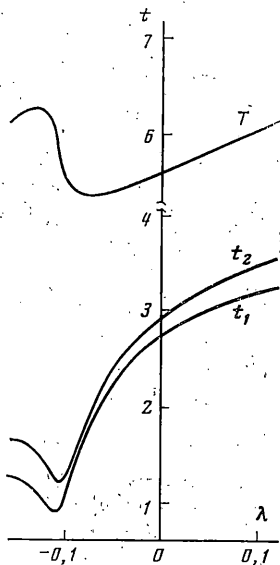
Система (2.6) совпадает с результатом, полученным в [2] при достаточно больших μ .

На фиг. 2-4 показаны результаты численного решения системы уравнений (2.3). По горизонтальной оси отложены значения λ — скорости опускания груза. Таким образом значениям $\lambda > 0$ соответствует опускание ($s=1$), а $\lambda < 0$ — подъем груза ($s=-1$). По вертикальной оси отложены рассчитанные значения t_1, t_2, T . Решение уравнений (2.3) при $\lambda=0$ известно и приведено в [2]. При $\lambda \neq 0$ система (2.3) решалась численно методом Ньютона. В качестве начального приближения при решении системы $\lambda_i = \pm 0,02 i$ ($i=1, 2, 3, \dots$) бралось решение, полученное на предыдущем шаге (т. е. при $\lambda = \lambda_{i-1}$).

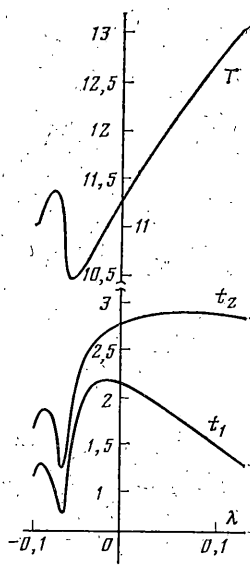
На фиг. 2 представлены результаты расчетов при $v_0=0,5; \mu=2; b=1$. Время движения мало, а величины t_1, t_2, T зависят примерно линейно от λ . При возрастании v_0 время движения увеличивается и картина меняется. На фиг. 3 приведены результаты при $v_0=2,5; \mu=2; b=1$. При дальнейшем росте v_0 (см. фиг. 4, где $v_0=5; \mu=2; b=1$) картина качественно не меняется. Время движения T на фиг. 3 и 4 имеет внутренний минимум, что связано, по-видимому, с тем, что число интервалов постоянства управления было фиксировано заранее. Отметим, что левая граница интервала λ при которых существует решение системы (2.3), обусловлена возможностью поднять груз до момента окончания, т. е. $\lambda > -l_0 T^{-1}$.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

В отличие от задачи разгона будем искать управление в задаче торможения

$$u(t) = \begin{cases} -b & \text{при } 0 < t < t_1 \\ 1 & \text{при } t_1 < t < t_2 \\ -b & \text{при } t_2 < t < T \end{cases} \quad (2.7)$$

Величины t_1 , t_2 , T характеризуют моменты переключения. Поступая как в задаче разгона, получим следующую систему трех трансцендентных уравнений для определения моментов переключения, выраженных через переменные q_1 , q_2 , q_h :

$$\begin{aligned} pbE(q_1)E(q_h)Z_1^{(4)}(q_2) + (1+b)q_1E(q_h)Z_1^{(2)}(q_2) - bq_hE(q_1)Z_1^{(3)}(q_2) &= \\ = (1+b)q_2E(q_1)E(q_h) & \\ pbE(q_1)E(q_h)Z_2^{(4)}(q_2) + (1+b)q_1E(q_h)Z_2^{(2)}(q_2) - bq_hE(q_1)Z_2^{(3)}(q_2) &= 0 \\ -spr\mu v_0 + 1/2(1+b)(\mu-1)(q_1^2 - q_2^2) + 1/2b(\mu-1)(q_h^2 - p^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь использованы ранее введенные обозначения (2.2), (2.4), (2.5). При постоянной длине подвеса, т. е. при $p \rightarrow \infty$, $q_i \rightarrow \infty$, используя асимптотическое представление функций Бесселя при больших аргументах в уравнениях (2.8), имеем в пределе

$$\begin{aligned} b[\cos t_2 - \cos(T - t_2)] &= (1+b)[\cos(t_2 - t_1) - 1] \\ b[\sin t_2 + \sin(T - t_2)] &= (1+b)\sin(t_2 - t_1) \\ \frac{b}{1+b}T - \frac{\mu}{(\mu-1)(1+b)}v_0 &= t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения (2.9) и их решение при достаточно больших приведены в [2].

Заметим, что в качестве первого приближения для систем трансцендентных уравнений в бесселевых функциях (2.3) и (2.8) можно взять решения этих систем при достаточно малой скорости изменения длины под-

веса (т. е. при $\lambda \ll 1$). Эти решения ищем в виде разложения по малому параметру $\varepsilon = 1/p$, удерживая в разложении члены первого порядка малости

$$t_1 = t_1^* + \varepsilon \delta_1, \quad t_2 = t_2^* + \varepsilon \delta_2, \quad T = T^* + \varepsilon \delta_3 \quad (2.10)$$

Подставляя значения t_1, t_2, T в системы (2.3) и (2.8) и учитывая, что t_1^*, t_2^* и T^* удовлетворяют им при $\lambda = 0$, получим системы линейных уравнений относительно δ_i ($i = 1, 2, 3$).

Для случая разгона с режимом управления (2.1) имеем (звездочки у переменных в следующих двух системах и их решениях опущены):

$$\begin{aligned} & (1+b) \sin(t_2 - t_1) \delta_1 + [\sin(T - t_2) + \sin t_2 - (1+b) \sin(t_2 - t_1)] \delta_2 - \sin(T - t_2) \delta_3 = \\ & = s \{ 1/2(1+b)(t_1 + 3t_2 + T) + (T + t_1) \cos t_2 - (1+b)(1/2T + 2t_1) \cos(t_2 - t_1) - (2T + 1/2t_1) \cos(T - t_2) \} \\ & - (1+b) \cos(t_2 - t_1) \delta_1 + [\cos(T - t_2) + \cos t_2 + (1+b) \cos(t_2 - t_1)] \delta_2 - \cos(T - t_2) \delta_3 = \\ & = s \{ (T + t_1) \sin t_2 - (1+b)(1/2T + 2t_1) \sin(t_2 - t_1) + (2T + 1/2t_1) \sin(T - t_2) \} \\ & - \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 / (1+b) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для случая торможения с режимом управления (2.7) имеем

$$\begin{aligned} & (1+b) \sin(t_2 - t_1) \delta_1 + [-(1+b) \sin(t_2 - t_1) + b \sin(T - t_2) + b \sin t_2] \delta_2 - b \sin(T - t_2) \delta_3 = \\ & = s \{ 1/2(1+b)(T + 3t_2 + t_1) + b(T + t_1) \cos t_2 - (1+b)(1/2T + 2t_1) \cos(t_2 - t_1) - b(2T + 1/2t_1) \cos(T - t_2) \} \\ & - (1+b) \cos(t_2 - t_1) \delta_1 + [(1+b) \cos(t_2 - t_1) + b \cos(T - t_2) + b \cos t_2] \delta_2 - b \cos(T - t_2) \delta_3 = \\ & = s \{ b(T + t_1) \sin t_2 - (1+b)(1/2T + 2t_1) \sin(t_2 - t_1) + b(2T + 1/2t_1) \sin(T - t_2) \} \\ & - \delta_1 + \delta_2 - b \delta_3 / (1+b) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решив эти системы, получим следующие соотношения: для задачи разгона

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{s}{\det \Delta} \left\{ A_0 C + \frac{A_1}{1+b} [b \cos T - (1+b) \cos t_1 - \cos 2t_2] + \right. \\ & \quad + \frac{A_2}{1+b} [(1+b) - b \cos(T - t_1) + \cos(2t_2 - t_1)] + \\ & \quad \left. + \frac{A_3}{1+b} [(1+b) \cos(T - t_1) + \cos(T - 2t_2) - b] \right\} \\ \delta_2 &= \frac{s}{\det \Delta} \{ A_0 [\cos(T - t_2) - \cos(t_2 - t_1)] + A_1 (\cos T - \cos t_1) + \\ & \quad + A_2 [1 - \cos(T - t_1)] + A_3 [\cos(T - t_1) - 1] \} \\ \delta_3 &= \frac{s}{\det \Delta} \{ A_0 D + A_1 (\cos T + \cos 2t_2) - A_2 [\cos(2t_2 - t_1) + \cos(T - t_1)] - A_3 (1 + \cos T) \} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\det \Delta = -\sin(T - 2t_2) - \sin(2t_2 - t_1) - \sin(T - t_1)$$

$$A_0 = 1/2(1+b)(t_1 + 3t_2 + T), \quad A_1 = (T + t_1)$$

$$A_2 = (1+b)(1/2T + 2t_1), \quad A_3 = (2T + 1/2t_1)$$

$$C = -\frac{1}{1+b} \cos t_2 - \cos(t_2 - t_1) - \frac{1}{1+b} \cos(T - t_2) + \cos(T - t_2)$$

$$D = \cos t_2 + \cos(T - t_2), \quad s = \pm 1 \quad (2.14)$$

для задачи торможения

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{s}{\det \Delta_T} \left\{ A_0 \left[b \cos(T - t_2) - \frac{bG}{1+b} \right] + b^2 A_1 \left\{ \cos T - \cos t_1 - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{b}{1+b} (\cos T + \cos 2t_2) \right\} + b A_2 \left[1 - \frac{1}{1+b} \cos(T - t_1) + \frac{1}{1+b} \cos(2t_2 - t_1) \right] + \right. \\ & \quad \left. + b^2 A_3 \left[-1 + \cos(T - t_1) + \frac{b}{1+b} [1 + \cos(T - 2t_2)] \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\delta_2 = \frac{s}{\det \Delta_T} \{A_0 b [\cos(T-t_2) - \cos(t_2-t_1)] + A_1 b^2 (\cos T - \cos t_1) +$$

$$+ A_2 b [1 - \cos(T-t_1)] + A_3 b^2 [\cos(T-t_1) - 1]\}$$

$$\delta_3 = \frac{s}{\det \Delta_T} \{A_0 [-(1+b)\cos(t_2-t_1) + G] + A_1 b^2 [\cos T + \cos 2t_2] -$$

$$- A_2 [(1+b) + b \cos(T-t_1) + b \cos(2t_2-t_1)] - A_3 b^2 [1 + \cos(T-2t_2)]\} \quad (2.15)$$

$$\det \Delta_T = b^2 [\sin(T-2t_2) - \sin(2t_2-t_1) - \sin(T-t_1)]$$

$$G = (1+b) \cos(t_2-t_1) + b \cos(T-t_2) + b \cos t_2 \quad (2.16)$$

величины A_0, A_1, A_2, A_3 определены в (2.14).

3. Рассмотрим задачу перемещения при помощи несимметрично ограниченной силы в случае постоянной длины подвеса ($\lambda=0$). Уравнения (1.9) переписутся в виде

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\varphi + u, \quad \dot{v} = -\mu^{-1}\varphi + u, \quad \dot{x} = v \quad (3.1)$$

с краевыми условиями (1.5), (1.7) и ограничением на управление $-b \leq u(t) \leq 1$.

Задачи оптимального управления для линейных систем, подобных (3.1), с симметричными ограничениями рассматривались в ряде работ (см., например, [3-5] и библиографию в [2]). В рассматриваемой работе ставится цель исследовать задачу 2 при произвольном ограничении на управление u (исследование здесь проводится по методике [2]).

Как известно, оптимальное по быстродействию управление в линейных системах есть релейная функция времени [6]. В [2] показано, что оптимум в задаче перемещения с ограниченной по модулю силой достигается в классе режимов с четырьмя участками постоянства управления. Будем в задаче перемещения с произвольно ограниченным управлением искать управление также в классе режимов с четырьмя участками постоянства:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < t_1 \text{ и } t_2 < t < t_3 \\ -b & \text{при } t_1 < t < t_2 \text{ и } t_3 < t < T \end{cases} \quad (3.2)$$

где t_1, t_2, t_3 — моменты переключения, T — время перемещения. Интегрируя систему уравнений (3.1) с учетом соотношений (3.2) и краевых условий (1.5) и (1.7), получим систему четырех трансцендентных уравнений для определения t_1, t_2, t_3, T :

$$\frac{b}{1+b} T = t_1 - t_2 + t_3$$

$$\frac{b}{1+b} T^2 - \frac{2\mu}{(1+b)(\mu-1)} a = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2 \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{1+b} (1 + \cos T) = \cos t_1 - \cos t_2 + \cos t_3$$

$$\frac{b}{1+b} \sin T = \sin t_1 - \sin t_2 + \sin t_3$$

Случай $b=1$, т. е. при симметричном ограничении на управление, при больших μ подробно разобран в [2]. В публикуемой работе рассмотрены два случая: b мало отличается от единицы, а именно $b=1+\varepsilon$ (где ε — достаточно малый положительный параметр) и b достаточно велико ($b \rightarrow \infty$), этот случай отвечает возможности импульсного уменьшения скорости.

Рассмотрим случай, когда $b=1+\varepsilon$. При $b=1$ решение системы (3.3) t_i^* , T^* известно [2] и определяется формулами

$$t_2^* = 1/2 T^*, \quad t_1^* = 1/2 T^* - \xi, \quad t_3^* = 1/2 T^* + \xi \quad (3.4)$$

где ξ — постоянная, связанная с T^* соотношением $1/4 T^{*2} - \mu a / (\mu - 1) = 2\xi^2$.

Время перемещения T и расстояние перемещения a связаны уравнением

$$\frac{T^{*2}}{4} - 2 \left\{ \arccos \left[\cos^2 \left(\frac{T^*}{4} \right) \right] \right\}^2 = \frac{\mu}{\mu - 1} a$$

Решение системы (3.3) при $b=1+\varepsilon$ ищем в виде разложения по малому параметру ε , удерживая в разложении члены первого порядка малости

$$T = T^* + \varepsilon \Delta, \quad t_1 = t_1^* + \varepsilon \delta_1 \quad (3.5)$$

$$t_2 = t_2^* + \varepsilon \delta_2, \quad t_3 = t_3^* + \varepsilon \delta_3$$

Подставляя значения T , t_1 , t_2 , t_3 (3.5) в (3.3) и учитывая, что T^* , t_1^* , t_2^* , t_3^* удовлетворяют системе (3.3) при $b=1$ из первого уравнения (3.3) имеем

$$\Delta = 1/2 T^* + 2(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3) \quad (3.6)$$

Оставшиеся три уравнения, линейные относительно δ_i ($i=1, 2, 3$) с учетом найденного значения Δ примут вид

$$\begin{aligned} (T^* + 2\xi)\delta_1 - T^*\delta_2 + (T^* - 2\xi)\delta_3 &= -\frac{T^{*2}}{4} + \frac{\mu a}{2(\mu - 1)} \\ (\sin T^* - \sin t_1^*)\delta_1 - (\sin T^* - \sin t_2^*)\delta_2 + (\sin T^* - \sin t_3^*)\delta_3 &= \\ &= 1/2 \sin 1/2 T^* - 1/4 T^* \sin T^* \\ (\cos T^* - \cos t_1^*)\delta_1 - (\cos T^* - \cos t_2^*)\delta_2 + (\cos T^* - \cos t_3^*)\delta_3 &= \\ &= 1/4 \sin T^* - 1/4 T^* \cos T^* \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решив эту систему, учитывая (3.4), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{D} \left\{ \sin \xi \left[\frac{\mu a}{2(\mu - 1)} - \frac{T^{*2}}{4} + \frac{T^*}{2} \sin \frac{T^*}{2} \right] + \right. \\ &+ \sin \frac{T^*}{2} \left[\xi \frac{T^*}{2} - \frac{\mu a}{2(\mu - 1)} - \xi \sin \frac{T^*}{2} \right] + \sin \left(\frac{T^*}{2} - \xi \right) \left[\frac{\mu a}{2(\mu - 1)} \right] \left. \right\} \\ \delta_2 &= \frac{1}{D} \left\{ \sin \xi \left[\frac{\mu a}{\mu - 1} \sin^2 \frac{T^*}{4} + T^* \sin \frac{T^*}{2} - \frac{T^{*2}}{2} \cos^2 \frac{T^*}{4} \right] + \right. \\ &+ \sin \frac{T^*}{2} \left[\xi T^* \cos^2 \frac{T^*}{4} - \sin \frac{T^*}{2} \right] \left. \right\} \\ \delta_3 &= \frac{1}{D} \left\{ \sin \xi \left[\frac{\mu a}{2(\mu - 1)} + \frac{T^*}{2} \sin \frac{T^*}{2} - \frac{T^{*2}}{4} \right] + \right. \\ &+ \sin \frac{T^*}{2} \left[\frac{\mu a}{2(\mu - 1)} + \xi \frac{T^*}{2} - \xi \sin \frac{T^*}{2} \right] - \sin \left(\frac{T^*}{2} + \xi \right) \left[\frac{\mu a}{2(\mu - 1)} \right] \left. \right\} \\ \Delta &= \frac{T^*}{2} + \frac{1}{D} \left\{ \sin \xi (A) + \sin \frac{T^*}{2} (B) \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где D — определитель системы

$$\begin{aligned} D &= 2 \sin^2 1/4 T^* [T^* \sin \xi - 2\xi \sin 1/2 T^*] \\ A &= \frac{\mu a}{\mu - 1} + \left(\frac{T^{*2}}{2} - \frac{\mu a}{\mu - 1} \right) \cos^2 \frac{T^*}{4} - \frac{T^{*2}}{2} \\ B &= \xi T^* + \sin 1/2 T^* - 2\xi \sin 1/2 T^* - \xi T^* \cos 1/4 T^* \end{aligned}$$

Значения поправок Δ , δ_1 , δ_2 , δ_3 позволяют определить моменты переключения, когда ограничения на управляющую силу мало отличаются от симметричных. Соответствующие моменты переключения определяются из соотношений (3.8), (3.5).

Рассмотрим случай, когда $b \rightarrow \infty$, который соответствует возможности импульсного уменьшения скорости. Естественно предположить, что время изменения скорости очень мало, поэтому имеет место ударное воздействие. Поскольку положение при воздействии не изменяется, а скорость меняется скачком, применима механическая теория удара, согласно которой, сила удара является большой величиной, время воздействия мало, но импульс силы конечен. Для режима управления (3.2) при $b \rightarrow \infty$ можно считать $t_2 - t_1 = \tau_1$ и $T - t_3 = \tau_2$ исчезающе малыми величинами, а величины их импульсов I_1 , I_2 конечными, т. е.

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} b dt = b(t_2 - t_1) = b\tau_1, \quad I_2 = \int_{t_3}^T b dt = b(T - t_3) = b\tau_2 \quad (3.9)$$

Подставим I_1 , I_2 (3.9) в систему уравнений (3.3) и учтем, что τ_1 и $\tau_2 \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$. Переходя в (3.3) к пределу при $b \rightarrow \infty$, получим следующую систему четырех трансцендентных уравнений:

$$I_1 + I_2 = t_3, \quad t_1 I_1 + t_3 I_2 = \frac{t_3^2}{2} + \frac{\mu}{\mu - 1} a \quad (3.10)$$

$$I_1 \sin t_1 + I_2 \sin t_3 = 1 - \cos t_3, \quad I_1 \cos t_1 + I_2 \cos t_3 = \sin t_3$$

Решив эту систему относительно неизвестных t_3 , t_1 , I_1 , I_2 , имеем

$$t_3 = \left(\frac{2\mu}{\mu - 1} a \right)^{1/2}, \quad t_1 = \frac{2\mu a - \sqrt{2\mu a(\mu - 1)}}{\mu - 1} \times \\ \times \left[\frac{\mu(a - 1) + 1 + \cos t_3}{\mu a - \sqrt{2\mu a(\mu - 1)} \sin t_3 + (\mu - 1)(1 - \cos t_3)} \right] \quad (3.11)$$

$$I_1 = [t_3^2 - 2t_3 \sin t_3 + 2(1 - \cos t_3)] / [2(t_3 - \sin t_3)] \\ I_2 = [t_3^2 - 2(1 - \cos t_3)] / [2(t_3 - \sin t_3)]$$

При заданном перемещении a моменты приложения импульсов t_1 , t_3 вычисляются по первым двум формулам (3.11), а импульсы I_1 , I_2 легко вычисляются по найденному t_3 .

Решение системы (3.3) при достаточно большом, но конечном b будем искать в виде разложения по малому параметру $\varepsilon = 1/b$, удерживая в разложении члены первого порядка малости

$$I_1 = I_1^* + \varepsilon \Delta_1, \quad t_1 = t_1^* + \varepsilon \delta_1 \\ I_2 = I_2^* + \varepsilon \Delta_2, \quad t_3 = t_3^* + \varepsilon \delta_3 \quad (3.12)$$

Подставляя значения I_1 , I_2 , t_1 , t_3 (3.12) в (3.3) и учитывая, что I_1^* , I_2^* , t_1^* , t_3^* удовлетворяют системе (3.10), получим систему уравнений, линейных относительно δ_1 , δ_3 , Δ_1 , Δ_2 :

$$-\delta_3 + \Delta_1 + \Delta_2 = -I_1^* \\ I_1^* \delta_1 + (I_2^* - t_3^*) \delta_3 + t_1^* \Delta_1 + t_3^* \Delta_2 = -(I_1^{*2} + I_2^{*2} + 2I_1^* t_1^*) \\ I_1^* \cos t_1^* \delta_1 + (I_2^* \cos t_3^* - \sin t_3^*) \delta_3 + \sin t_1^* \Delta_1 + \sin t_3^* \Delta_2 = \\ = -(1/2 I_1^{*2} \cos t_1^* + 1/2 I_2^{*2} \cos t_3^* + I_1^* \sin t_1^*) \\ -I_1^* \sin t_1^* \delta_1 - (I_2^* \sin t_3^* + \cos t_3^*) \delta_3 + \cos t_1^* \Delta_1 + \cos t_3^* \Delta_2 = \\ = 1/2 I_1^{*2} \sin t_1^* + 1/2 I_2^{*2} \sin t_3^* - I_1^* \cos t_1^* \quad (3.13)$$

Решив эту систему, имеем следующие соотношения:

$$\delta_1 = \frac{1}{\det \Delta} \left\{ -\frac{1}{2} I_2^{*3} - \frac{3}{4} I_1^{*2} I_2^* - I_1^* I_2^* t_1^* + \cos(t_3^* - t_1^*) \left[\frac{1}{2} I_2^{*3} + \frac{3}{2} I_1^{*2} I_2^* - \right. \right. \\ \left. \left. - I_1^* I_2^* (t_3^* - t_1^* - 1) \right] + I_1^* \sin(t_3^* - t_1^*) \left(\frac{1}{2} I_1^* I_2^* t_3^* + t_3^* - 1 \right) \right\} \\ \delta_3 = \frac{1}{\det \Delta} \left\{ -\frac{1}{2} I_1^{*3} - I_1^{*2} t_1^* - \frac{3}{2} I_1^* I_2^{*2} + \cos(t_3^* - t_1^*) \left(\frac{1}{2} I_1^{*3} + I_1^{*2} t_1^* + \frac{3}{2} I_1^* I_2^{*2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} I_1^* I_2^{*2} (t_3^* - t_1^*) \sin(t_3^* - t_1^*) \right\} \\ \Delta_1 = \frac{1}{\det \Delta} \left[-\frac{1}{2} I_1^* I_2^{*2} - 2 I_1^{*2} I_2^* + t_3^* I_1^{*2} + I_1^* \cos(t_3^* - t_1^*) \left(\frac{3}{2} I_1^* I_2^{*2} - \frac{5}{4} I_1^{*2} - \right. \right. \\ \left. \left. - I_2^{*2} - 2 I_1^* t_1^* \right) + I_1^* \sin(t_3^* - t_1^*) \left(\frac{1}{2} I_1^{*2} + I_1^* I_2^* t_3^* - 2 I_1^* I_2^* t_1^* - \frac{1}{2} I_2^{*2} t_3^* - \right. \right. \\ \left. \left. I_1^{*2} \sin(t_3^* + t_1^*) \left(-\frac{1}{4} I_1^* I_2^* - \frac{1}{2} \right) + I_1^{*2} \cos(t_3^* + t_1^*) \left(\frac{1}{2} I_2^* - \frac{1}{4} I_1^* \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4} I_1^* I_2^{*3} \sin 2t_3^* - \frac{1}{4} I_1^* I_2^{*2} \cos 2t_3^* \right] \right. \\ \Delta_2 = \frac{1}{\det \Delta} \left\{ \frac{1}{2} I_1^{*3} - I_1^{*2} t_3^* + I_1^{*2} t_1^* + I_1^* I_2^* + \frac{5}{4} I_1^* I_2^{*2} + I_1^* \cos(t_3^* - t_1^*) \left(\frac{3}{4} I_1^{*2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 I_1^* t_1^* - \frac{1}{2} I_1^* I_2^* + \frac{1}{2} I_2^{*2} \right) + I_1^* \sin(t_3^* - t_1^*) \left[\frac{3}{4} I_1^{*2} I_2^* + \frac{1}{2} I_1^* + 2 I_1^* I_2^* t_1^* + \frac{1}{2} I_2^{*3} + \right. \right. \\ \left. \left. + I_1^{*2} \sin(t_3^* + t_1^*) \left(\frac{1}{4} I_1^* I_2^* + \frac{1}{2} \right) + I_1^{*2} \cos(t_3^* + t_1^*) \left(-\frac{1}{2} I_2^* + \frac{1}{4} I_1^* \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} I_1^* I_2^{*3} \sin 2t_3^* + \frac{1}{4} I_1^* I_2^{*2} \cos 2t_3^* \right] \right\} \quad (3.14) \\ \det \Delta = 2 I_1^* I_2^* - 2 I_1^{*2} I_2^* \cos(t_3^* - t_1^*) - I_1^* I_2^* (t_3^* - t_1^*) \sin(t_3^* - t_1^*)$$

Знание поправок δ_1 , δ_3 , Δ_1 , Δ_2 позволяет определить моменты приложения достаточно большой, но конечной силы b .

Отметим интересный факт. Как указано выше, a — длина безразмерного пути, выраженная через длину d реального пути следующим образом (см. (1.9)):

$$\mu a / (\mu - 1) = cd / l, \quad c = \mu M k / [(\mu - 1) F_0]$$

а безразмерное время t выражается через реальное время t^r формулой $t^r = T_0 t = (lt/k)^{1/2}$.

Тогда первая формула (3.14) для t_3^r переписывается в виде $t_3^r = (2cd/k)^{1/2}$.

Из этого соотношения вытекает, что для случая $b \rightarrow \infty$ (см. (3.2)) реальное время перемещения не зависит от длины подвеса.

Автор благодарит Ф. Л. Черноуцко за постановку задачи и ценные советы, Л. Д. Акуленко и Б. Н. Соколова — за полезные обсуждения, Л. С. Вишневецкого — за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноуцко Ф. Л. Оптимальное перемещение маятника. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 806—816.
2. Черноуцко Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. Геронисимус Я. Л., Перельмутер М. М. О некоторых методах определения оптимального закона движения, рассматриваемого как управляющее воздействие. — Машиноведение, 1966, № 6, с. 16—24.
4. Зарецкий А. А., Поргной Н. И. Оптимизация управления механизмами грузоподъемных кранов в переходных режимах. — Вестн. машиностроения, 1969, № 8, с. 14—18.
5. Beeston J. W. Solution of the time-optimal control problem for systems of similar structure. — Electronic Letters, 1967, v. 3, Nr 8, p. 378—379.
6. Понгрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 384 с.

Вьетнам, Ханой

Поступила в редакцию
4.XII.1980