

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИБКОЙ НИТИ С ГРУЗАМИ
 В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

ЕФИМЕНКО Г. Г., КРИВОНОСОВА Н. В.

Гибкая нить, соединяющая две точечные массы на круговой орбите, совершает малые колебания относительно невозмущенной (прямолинейной) формы [1]. Неоднородность ньютоновского поля сил приводит к тому, что при невозмущенном движении сила натяжения нити является периодической функцией времени. При определенных соотношениях между частотой изменения силы натяжения и одной из частот собственных колебаний нити происходит параметрическое возбуждение соответствующей формы колебаний и прямолинейная форма нити становится неустойчивой (динамическая неустойчивость).

Впервые задачу об устойчивости невозмущенного движения двух связанных катушек для случая вращения их относительно центра масс на круговой орбите исследовал Чоботов в работе [2], в которой уравнения возмущенного движения связки двух тел после некоторых упрощений сведены к уравнениям Матье. При этом предполагалось, что угловая скорость вращения связки постоянна, что привело к ошибочному выражению для коэффициентов уравнения Матье. В действительности угловая скорость свободно вращающейся связки двух тел на орбите является периодической функцией времени, определяемой из уравнения $\varphi'^2 + 3\sin^2 \varphi = h$ [3].

В публикуемой работе рассматриваются либрационный и ротационный режимы движения гибкой нити с грузами на концах в ньютоновском поле сил. Уравнения возмущенного движения нити, полученные в [1], преобразуются к уравнениям Хилла, которые затем исследуются асимптотическим и численным методами. В плоскости параметров системы, характеризующих собственную частоту колебаний и уровень энергии относительного движения нити, строятся области динамической неустойчивости.

1. Уравнения малых колебаний в ньютоновском поле сил гибкой нерастяжимой нити с равномерно распределенной массой и имеющей две точечные массы на своих концах относительно невозмущенной (прямолинейной) формы имеют вид [1]:

$$X_n''(\tau) + [(\lambda_n^2 - 1)(h \pm 2\sqrt{hd}) + 3\lambda_n^2 \cos 2\varphi] X_n(\tau) = 0 \quad (1.1)$$

$$Y_n''(\tau) + [1 + \lambda_n^2(h \pm 2\sqrt{hd}) + 3\lambda_n^2 \cos 2\varphi] Y_n(\tau) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь X_n, Y_n — обобщенные координаты, характеризующие n -ю форму колебаний нити соответственно в плоскости орбиты (тангенциальные) и в перпендикулярной к ней плоскости (аксиальные); $\tau = \omega_0 t$; ω_0 — орбитальная угловая скорость; φ — угол, определяющий невозмущенное положение нити относительно радиус-вектора центра масс системы; $\lambda_n^2 = \frac{1}{2}v_n(v_n + 1)$, v_n — собственные числа, соответствующие n -й форме колебаний нити; h — константа, характеризующая уровень энергии невозмущенного движения нити ($h = \varphi'^2 + 3\sin^2 \varphi$).

В зависимости от значения параметра h нить с грузами может совершать либрационное движение (колебание относительно положения равновесия $\varphi = 0, 0 < h < 2,5$) или вращение с $\varphi' > 0$ ($h > 3$) и с $\varphi' < 0$ ($h > 7$) [3]. В работе [1] уравнения (1.1) и (1.2) сводятся к уравнениям Хилла для следующих предельных случаев невозмущенного движения: быстрое вра-

жение относительно центра масс ($3/h \ll 1$) и малые колебания относительно положения равновесия ($h/3 \ll 1$).

Рассмотрим более общие случаи невозмущенного движения и преобразуем уравнения (1.1) и (1.2) к уравнениям Хилла, используя разные подстановки в зависимости от режима движения.

1. *Режим вращения.* Вместо переменной τ введем переменную $\varphi(\tau)$, удовлетворяющую уравнению невозмущенного движения $\varphi'' + 3 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0$, а вместо координат X, Y — обобщенные координаты

$$\alpha = X(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/4}, \quad \beta = Y(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/4}, \quad k^2 = 3/h < 1$$

Уравнения (1.1) и (1.2) после преобразования запишем в виде

$$\alpha'' + \Phi_\alpha(\varphi, \lambda, k) \alpha = 0 \quad (1.3)$$

$$\beta'' + \Phi_\beta(\varphi, \lambda, k) \beta = 0 \quad (1.4)$$

$$\Phi_{\alpha, \beta} = \frac{1}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \left[F_{\alpha, \beta}(\varphi) + \frac{k^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{3k^4 \sin^2 2\varphi}{16(1 - k^2 \sin^2 \varphi)} \right]$$

$$F_\alpha(\varphi) = (\lambda^2 - 1) \left(1 + \frac{2k}{\sqrt{3}} \operatorname{sign} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right) + k^2 \lambda^2 \cos 2\varphi$$

$$F_\beta(\varphi) = \frac{k^2}{3} + \lambda^2 \left(1 + \frac{2k}{\sqrt{3}} \operatorname{sign} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right) + k^2 \lambda^2 \cos 2\varphi$$

Штрих означает дифференцирование по переменной φ . Функции Φ_α, Φ_β являются периодическими с периодом π . Коэффициент k^2 пропорционален отношению угловой скорости орбитального движения центра масс к средней за период угловой скорости невозмущенного движения системы относительно центра масс.

2. *Режим колебаний.* Для преобразования уравнений (1.1) и (1.2) в случае режима колебаний связки относительно положения равновесия ($\varphi = 0$) введем новую переменную ψ , удовлетворяющую уравнениям: $d^2\psi/d\tau'^2 = -k_1^2 \sin \psi \cos \psi$, $(d\psi/d\tau')^2 = 1 - k_1^2 \sin^2 \psi$, где $k_1^2 = 4/3 h < 5/6$, $\tau' = \sqrt{3}\tau = \sqrt{3}\omega_0 t$.

Решением указанных уравнений является функции $\psi = \operatorname{am}(\tau' + \sigma, k_1^2)$, которая связана с переменной φ соотношением $\sin \varphi = k_1 \sin \psi$. Заменяя в уравнениях (1.1) и (1.2) переменную τ на переменную ψ , а обобщенные координаты X и Y — на координаты $\gamma = X(1 - k_1^2 \sin^2 \psi)^{1/4}$, $\delta = Y(1 - k_1^2 \sin^2 \psi)^{1/4}$, получим уравнения

$$\gamma'' + \Phi_\gamma(\psi, \lambda, k_1) \gamma = 0 \quad (1.5)$$

$$\delta'' + \Phi_\delta(\psi, \lambda, k_1) \delta = 0 \quad (1.6)$$

$$\Phi_{\gamma, \delta} = \frac{1}{1 - k_1^2 \sin^2 \psi} \left[F_{\gamma, \delta} + \frac{k_1^2}{2} \cos 2\psi + \frac{3k_1^4 \sin^2 2\psi}{16(1 - k_1^2 \sin^2 \psi)} \right]$$

Φ_γ, Φ_δ — периодические функции аргумента ψ с периодом 2π

$$F_\gamma = \lambda^2 - k_1^2 + \frac{2(\lambda^2 - 1)}{\sqrt{3}} k_1 \cos \psi + k_1^2 \lambda^2 \cos 2\psi$$

$$F_\delta = \lambda^2 + \frac{1}{3} + \frac{2\lambda^2 k_1}{\sqrt{3}} \cos \psi + k_1^2 \lambda^2 \cos 2\psi$$

Таким образом, уравнения возмущенного движения нити с грузами и в общем случае сводятся к уравнениям Хилла как для режима колебаний, так и для режима вращения.

2. Периодические функции Φ уравнений (1.3)–(1.6) зависят от параметров k и k_1 , которые, как показано, удовлетворяют неравенствам

$$0 < k^2 < \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi > 0; \\ 3/7 & \text{при } \varphi < 0; \end{cases} \quad 0 < k_1^2 < 5/6, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} k = \lim_{h \rightarrow 0} k_1 = 0$$

Таким образом, при достаточно малой амплитуде колебаний связки относительно устойчивого положения равновесия ($1/3h \ll 1$) и при быстром ее вращении относительно центра масс ($3/h \ll 1$) параметры k и k_1 являются малыми, что позволяет применить к исследованию уравнений (1.3)–(1.6) асимптотические методы.

Периодические функции $\Phi_{\alpha, \beta}(\varphi, k)$ и $\Phi_{\tau, \delta}(\psi, k_1)$ после разложения в ряд по степеням малого параметра принимают следующий вид:

$$\Phi_{\alpha}(\varphi, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^{2n} \cos 2n\varphi, \quad \Phi_{\beta}(\varphi, k) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n k^{2n} \cos 2n\varphi, \quad (2.1)$$

$$\Phi_{\tau}(\psi, k_1) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n k_1^n \cos n\psi, \quad \Phi_{\delta}(\psi, k_1) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n k_1^n \cos n\psi$$

Если ограничиться в (2.1) членами порядка k^4 и k_1^3 , то коэффициенты разложения функции Φ_{α} , Φ_{β} , Φ_{τ} , Φ_{δ} вычисляются по формулам

$$a_0 = (\lambda^2 - 1) \left(1 \pm \frac{2k}{\sqrt{3}} + \frac{k^2}{2} \pm \frac{k^3}{2\sqrt{3}} \right) + \frac{4\lambda^2 - 13}{32} k^4$$

$$a_1 = \frac{\lambda^2 + 2}{2} \mp \frac{k}{2\sqrt{3}} (\lambda^2 - 1) + k^2, \quad a_2 = -\frac{4\lambda^2 + 11}{32}$$

$$b_0 = \lambda^2 \pm \frac{2k\lambda^2}{\sqrt{3}} + \frac{4 + 9\lambda^2}{12} k^2 \pm \frac{\lambda^2}{\sqrt{3}} k^3 - \frac{13}{96} k^4$$

$$b_1 = \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{4} \mp \frac{\lambda^2}{\sqrt{3}} k + \frac{1 - 12\lambda^2}{12} k^2, \quad b_2 = -\frac{7}{32}$$

$$c_0 = 4\lambda^2 + 2(\lambda^2 - 2)k_1^2, \quad c_1 = \frac{8(\lambda^2 - 1)}{\sqrt{3}}, \quad c_2 = 2(1 + \lambda^2), \quad c_3 = -\frac{2(\lambda^2 - 4)}{\sqrt{3}} \quad (2.2)$$

$$d_0 = 2 \left(\lambda^2 + \frac{1}{3} \right) (2 + k_1^2), \quad d_1 = \frac{8\lambda^2}{\sqrt{3}} + \frac{2\lambda^2 k_1^2}{\sqrt{3}}, \quad d_2 = 2 \left(\lambda^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right), \quad d_3 = -\frac{2\lambda^2}{\sqrt{3}}$$

Верхний знак в формулах для коэффициентов разложения функций Φ_{α} , Φ_{β} соответствует вращению связки с $\varphi > 0$, а нижний знак — вращению с $\varphi < 0$.

Исследуя решения уравнений (1.3)–(1.6) асимптотическим методом [4], с учетом (2.1) и (2.2) при малых значениях параметров k и k_1 можно показать, что области неустойчивости уравнений в плоскости параметров λ^2 , $k^2(k_1^2)$ при $k \rightarrow 0$ и $k_1 \rightarrow 0$ примыкают к значениям λ^2 , определяемым из следующих соотношений: $a_0 = \lambda^2 - 1 = n^2$, $b_0 = \lambda^2 = n^2$, $c_0 = 4\lambda^2 = n^2$, $d_0 = 4(\lambda^2 + 1/3) = n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Для определения первых областей неустойчивости уравнений (1.3)–(1.6) ($n = 1$) с точностью до членов порядка k^2 и k_1 ограничимся в разложении (2.1) первыми двумя членами. Уравнения возмущенного движения нити с грузами в этом случае приводятся к уравнениям Матье, для которых известны формулы определения границ областей неустойчивости [5]. Ширина следующих областей неустойчивости уравнений (1.3)–(1.6) про-

порциональна k^{2n} и k_1^n ($n=2, 3, \dots$), поэтому для их определения необходимо учитывать большее количество членов в разложении периодических функций $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma, \Phi_\delta$. Границы областей неустойчивости в этом случае можно определить исследуя асимптотическим методом [4] приближенное решение уравнений (1.3)–(1.6). Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведем окончательные приближенные формулы для определения границ первых нескольких областей динамической неустойчивости гибкой нити с грузами, полученные асимптотическим методом с учетом малости параметров k и k_1 . При ротационном движении связки для тангенциальных колебаний

$$\lambda^2 = 2 - \frac{2k}{\sqrt{3}} \operatorname{sign} \varphi + \left(\frac{5}{6} \pm 1 \right) k^2 \quad (\text{область } 1) \quad (2.3)$$

$$\lambda^2 = 5 - \frac{8k}{\sqrt{3}} \operatorname{sign} \varphi + \frac{10}{3} k^2 - \frac{14}{3\sqrt{3}} k^3 \operatorname{sign} \varphi - \left(\frac{711}{72} \pm \frac{255}{256} \right) k^4 \quad (\text{область } 2)$$

для аксиальных колебаний

$$\lambda^2 = 1 - \frac{2k}{\sqrt{3}} \operatorname{sign} \varphi + \frac{k^2}{4} \pm \frac{3}{4} k^2 \quad (\text{область } 1) \quad (2.4)$$

$$\lambda^2 = 4 - \frac{8k}{\sqrt{3}} \operatorname{sign} \varphi + 2k^2 - \frac{26}{3\sqrt{3}} k^3 \operatorname{sign} \varphi + \frac{529}{72} k^4 \pm \frac{1}{4} k^4 \quad (\text{область } 2)$$

При либрационном движении связки для тангенциальных колебаний

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \left(1 \pm \frac{3}{\sqrt{3}} k_1 \right) \quad (\text{область } 1) \quad (2.5)$$

$$\lambda^2 = 1 + \frac{1}{2} k_1^2 \pm \frac{1}{2} k_1^2 \quad (\text{область } 2)$$

$$\lambda^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{192} k_1^2 \pm \frac{335}{768\sqrt{3}} k_1^3 \quad (\text{область } 3)$$

для аксиальных колебаний

$$\lambda^2 = \frac{1}{12} \left(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} k_1 \right) \quad (\text{область } 1) \quad (2.6)$$

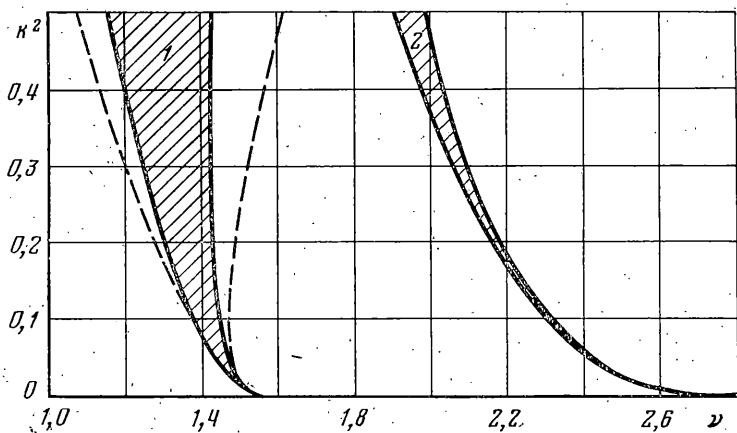
$$\lambda^2 = \frac{2}{3} - \frac{65}{162} k_1^2 \pm \frac{5}{27} k_1^2 \quad (\text{область } 2)$$

$$\lambda^2 = \frac{23}{12} - \frac{1415}{12^3} k_1^2 \pm \frac{23 \cdot 617}{12^3 \sqrt{3}} k_1^3 \quad (\text{область } 3)$$

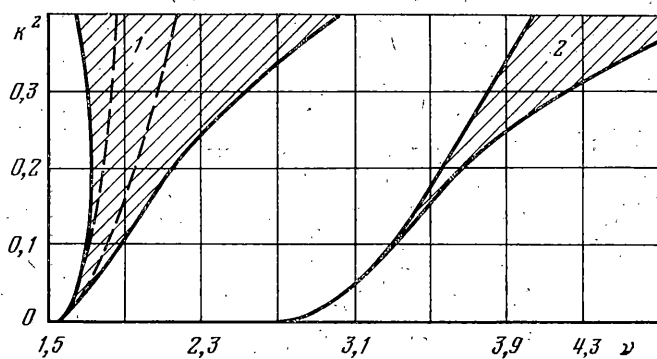
Как видно из (2.3)–(2.6), с ростом порядкового номера области ширина областей неустойчивости уменьшается, как k^{2n} и k_1^n . В рассматриваемой задаче параметр $\lambda^2 = \frac{1}{2}v(v+1) > 1$, поэтому первая область в (2.4) и первые две области (2.5) и (2.6) лежат вне области значений параметра v системы.

3. Для построения областей динамической неустойчивости уравнений (1.3)–(1.6) во всем диапазоне изменения параметров k и k_1 был использован модифицированный численный метод исследования устойчивости решения уравнений Хилла, использующий свойство четности периодических функций $\Phi_{\alpha, \beta}$ и $\Phi_{\gamma, \delta}$. Свойство четности периодической функции $\Phi(t)$ в уравнении Хилла

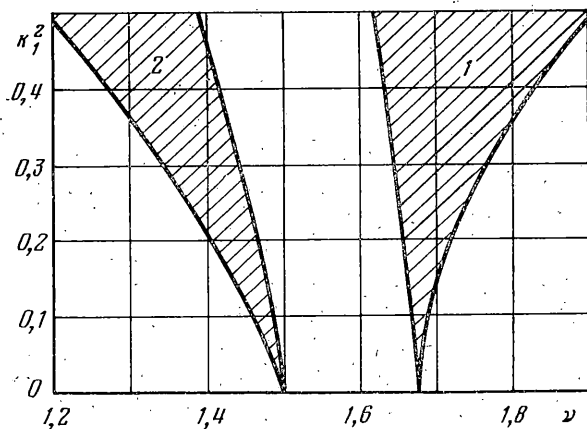
$$d^2x/dt^2 + \Phi(t)x = 0 \quad (3.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

позволяет при исследовании устойчивости вместо поиска двух линейно-независимых решений уравнения (3.1) [5–7] численно определять значение $x(T)$, решения уравнения (3.1) с начальными условиями $x(0)=1$; $x'(0)=0$, где T — период функции $\Phi(t)$. Характеристическое уравнение для (3.1) в этом случае имеет вид

$$\rho^2 - 2x(T)\rho + 1 = 0 \quad (3.2)$$

Таким образом, (3.1) будет иметь устойчивые решения, если $|x(T)| > 1$. Граница неустойчивости определяется из условия $|x(T)| = 1$.

Описанным выше численным методом были проведены расчеты областей неустойчивости уравнений (1.3)–(1.6) в плоскости параметров k^2 , ν и k_1^2 , ν . Результаты расчетов представлены на фиг. 1–3. На фиг. 1 заштрихованы две первые области неустойчивости уравнения (1.3) для случая, когда направление вращения орбитальной системы координат ($\varphi^* > 0$). Две первые области неустойчивости уравнения (1.3) при вращении связки в противоположном направлении $\varphi^* < 0$ изображены на фиг. 2.

Области неустойчивости уравнений (1.5), (1.6), описывающих либрационное движение нити с грузами, представлены на фиг. 3. Область 1 на фиг. 3 соответствует третьей области неустойчивости уравнения (1.5), а область 2 – третьей области неустойчивости уравнения (1.6). Первые две области неустойчивости уравнения (1.5), (1.6) не представлены, так как лежат вне области значений параметра ν системы.

Не представлены графически также области неустойчивости уравнения (1.4), описывающего аксиальные колебания вращающейся нити с грузами, так как первая область неустойчивости этого уравнения также лежит вне области значений параметра ν , а вторая область неустойчивости очень узкая. Так, для $k^2 = 0,49$ ширина второй области неустойчивости по параметру ν составляет 0,007 для $\varphi^* > 0$ и 0,1 для $\varphi^* < 0$.

С уменьшением параметра k область неустойчивости еще более сужается.

На фиг. 1, 2 для сравнения изображены штриховыми линиями границы областей неустойчивости, рассчитанные по приближенным формулам (2.3) с точностью до членов порядка k^2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефименко Г. Г. О движении гибкой нити с грузами в ньютоновском поле сил. – Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2, с. 24–31.
2. Chobotov V. Gravity-gradient excitation of a rotating cable-counterweight Space station in orbit. – Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, v. 30, № 4, p. 547–554. – Рус. перев.: Прикл. механ: Тр. Амер. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1963, т. 30, № 4, с. 83–90.
3. Белецкий В. В., Новикова Е. Т. Об относительном движении связки двух тел на орбите. – Космические исследования, 1969, т. 7, вып. 3, с. 377–384.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.
5. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
6. Болотин В. В. Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. – В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНТИ, 1974, с. 155–166.
7. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.IV.1981