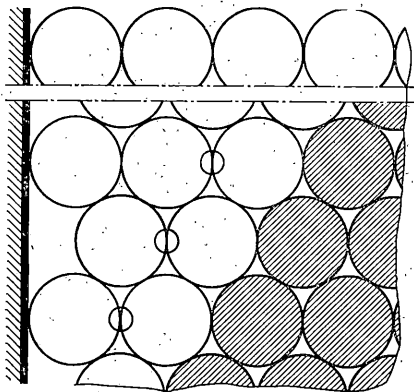


О СИЛОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СРЕДЫ ИЗ ТВЕРДЫХ КРУГЛЫХ ДИСКОВ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОДПОРНОЙ СТЕНКОЙ

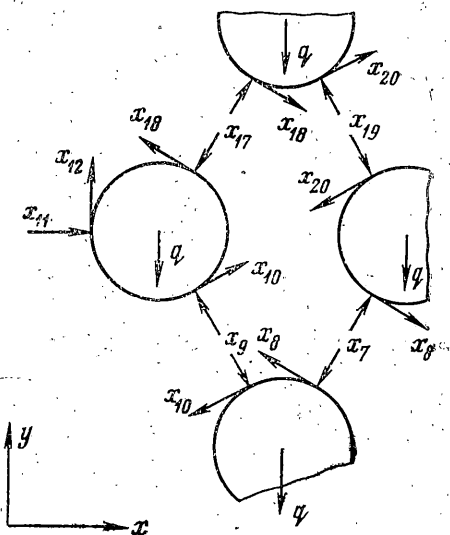
КОЗАРЬ В. Н.

Задача о силах взаимодействия среды, состоящей из совокупности круглых дисков, с подпорной стенкой возникает при исследовании давления сыпучих тел на подпорные стены, когда расчетной моделью среды служит совокупность круглых дисков [1], а также при определении сил, испытываемых ограждающими элементами штабелей труб, прутков, бревен.

Рассматривается среда, состоящая из совокупности абсолютно твердых круглых дисков одинакового диаметра плотной упаковки, ограниченная с одной стороны вертикальной подпорной стенкой, помещенной так, что верхний горизонтальный ряд среды всегда с ней контактирует (фиг. 1). Стенка может двигаться поступательно. Если смещать ее от среды, то часть дисков (назовем их подвижными), расположенная между подпорной стенкой и первым от нее наклонным рядом, движется так, что перемещаются в пространстве их центры. Между этой частью и остальными дисками среды в горизонтальных рядах происходит разрыв контактов (фиг. 1; светлые



Фиг. 1



Фиг. 2

точки). Из фиг. 1 видно, что количество подвижных дисков подчиняется соотношению $n = m^2$ (n — количество подвижных дисков, m — количество горизонтальных рядов среды, контактирующих со стенкой).

Как показывают эксперименты, проведенные с металлическими трубами и прутками, кроме подвижных дисков имеются еще и такие, которые могут только вращаться (назовем их вращающимися). Угловые смещения этих дисков являются величиной случайной, расположены они, как правило, в первом от стенки наклонном ряду, нижний диск которого с ней не соприкасается. Остальные диски среды считаются неподвижными (на фиг. 1 они заштрихованы).

Задача заключается в следующем: найти возможные значения нормальной составляющей равнодействующей силы взаимодействия стенки со средой, обеспечивающей равновесие системы, в предположении, что в горизонтальных рядах нарушены контакты между подвижными и вращающимися дисками.

Как показано в [1], силы взаимодействия дисков со стенкой могут быть различны при одинаковых исходных условиях. Однако полученные закономерности не позволяют найти всего множества возможных значений этих сил.

Рассмотрим каждый из подвижных и вращающихся дисков. Усилия в контактах разложим на нормальную и касательную (сила трения) составляющие. Для каждого диска запишем статические условия равновесия. В зоне контакта примем закон трения Кулона в виде $x_h f \geq |x_{h+1}|$. Данное условие можно записать в форме $x_h f - x_{h+1} \geq 0$, $x_h f + x_{h+1} \geq 0$ (x_h — нормальная составляющая контактного усилия, x_{h+1} — касательная составляющая этого усилия, f — коэффициент трения скольжения).

Примем, что величина f одинакова для всех контактов, вес диска q будем считать равным единице. Тогда ограничения, например для диска, контактирующего со стенкой (фиг. 2), запишутся так:

$$-\frac{1}{2}x_9 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_{10} + x_{11} - \frac{1}{2}x_{17} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_{18} = 0,$$

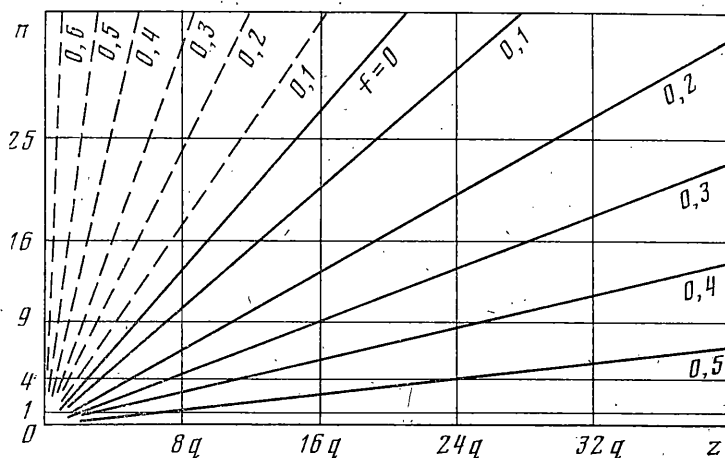
$$\frac{\sqrt{3}}{2}x_9 + \frac{1}{2}x_{10} + x_{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_{17} + \frac{1}{2}x_{18} = 1$$

$$x_{10} - x_{12} + x_{18} = 0, \quad x_9 f + x_{10} \geq 0, \quad x_9 f - x_{10} \geq 0$$

$$x_{11} f + x_{12} \geq 0, \quad x_{11} f - x_{12} \geq 0, \quad x_{17} f + x_{18} \geq 0$$

$$x_{17} f - x_{18} \geq 0, \quad x_9 \geq 0, \quad x_{11} \geq 0, \quad x_{17} \geq 0$$

Аналогично записываются ограничения для остальных дисков. В результате получим систему линейных ограничений, состоящую из равенств и неравенств. Число переменных этой системы больше числа ограничений-равенств. Известно [2], что такие системы имеют бесчисленное множество решений, среди которых необходимо найти такие, которые обеспечивают экстремальные значения функции $z = \sum x_i$ ($i =$



Фиг. 3

$= 1, 2, \dots, m$), где z — нормальная составляющая силы взаимодействия среды со стенкой, x_i — нормальная составляющая силы взаимодействия в i -м контакте диска со стенкой.

Например, для случая, когда среда состоит из трех рядов дисков ($m=2$), эта функция примет вид $z = x_{11} + x_{33}$. Данная задача является задачей линейного программирования, методы решения которой известны [2]. С увеличением числа горизонтальных рядов дисков среды растет размерность матрицы ограничений и, соответственно, увеличиваются трудности вычислительного характера.

Результаты численного решения, полученные для 1, 3, 5, 7, 9, 11 и 13 горизонтальных рядов дисков при различных значениях f , представлены на фиг. 3 (по оси ординат отложено количество подвижных дисков n , по оси абсцисс — сила нормального давления дисков на подпорную стенку в долях веса диска). Левая граница диапазона возможных значений этой силы при некотором $f = \text{const}$ (соответствует $\min z$) изображена штриховой линией, правая (соответствует $\max z$) — сплошной. Очевидно, что при $f=0$ эти границы совпадают. Как показывает расчет, при достижении коэффициентом f некоторой величины наибольшее значение функции z может быть сколь угодно большим, т. е. происходит «заклинивание» подвижных дисков между стенкой и остальными дисками. Для нахождения этой величины f рассмотрим систему ограничений в простейшем случае, когда $n=1$. Преобразовав систему уравнений, получим $x_{11} = (1 - 3x_{12}) / \sqrt{3}$. Учитывая, что $x_{11}f \geq -x_{12}$, будем иметь $\max z \rightarrow \infty$ при $f \geq 1/\sqrt{3}$.

Из анализа результатов численного решения следует, что:

задача об усилиях взаимодействия в среде из абсолютно твердых круглых дисков может быть сведена к задаче линейного программирования;

возможные значения величины нормальной составляющей силы давления твердых круглых дисков на вертикальную опорную стенку заключены в диапазоне, определяемом экстремальными значениями этой силы;

границы и длина диапазона возможных значений нормальной силы давления дисков на опорную стенку при $m \geq 2$ и $f = \text{const}$ — линейная функция количества подвижных дисков n . С увеличением f увеличивается длина этого диапазона;

при $f \geq 1/\sqrt{3}$ наибольшее давление на стенку может быть сколь угодно большим. При $f \geq 0,7$ наименьшее давление на стенку постоянно и не зависит от количества горизонтальных рядов дисков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jenkin C. F.*, The pressure exerted by granular material: an application of the principle of dilatancy.— Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1931, v. 131, p. 53—89.
2. *Гасс С. И.* Линейное программирование (методы и приложения). М.: Физматгиз, 1961. 303 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
22.VII.1980

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СРЕДЫ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ВНЕДРЕНИЯ

БИВИН Ю. К., КОЛЕСНИКОВ В. А., ФЛИТМАН Л. М.

Для определения механических свойств глинистой среды (пластилин) были проделаны опыты по внедрению в нее по нормали конусов различного раствора со скоростями до 350 м/с. В расчетах [1, 2] для малых скоростей внедрения и для тонких конусов при скорости порядка 100 м/с отмечено, что распределение касательных напряжений близко к равномерному при скорости внедрения, большей ~ 3 м/с, и величина этих напряжений не меняется с ростом скорости. Указанный результат дает основание утверждать, что среда вблизи тела может рассматриваться как пластическая и удовлетворяющая условию Мизеса.

Для проверки этого вывода и дальнейших исследований были проделаны опыты с более тупыми телами и с большими скоростями соударения. При этом для интерпретации результатов возникла необходимость учитывать вклад нормального давления в силу сопротивления. Важно также выяснить влияние давления на пластические свойства среды. Влияние давления в [1, 2] не изучалось.

Обнаружено качественное и количественное сходство явлений, сопровождающих внедрение конусов в глинистую среду и идеальную жидкость.

1. Опыты проводились по методике, изложенной в [2]. Рабочей средой был пластилин, в который по инерции внедрялись цилиндрические тела, имеющие конические наконечники с углами раствора $2\alpha = 30, 60, 90, 180^\circ$. Разгон тел осуществляли пневмоустановкой, описанной в [3]. Диапазон скоростей соударений был 50—400 м/с.

Результаты опытов приведены на фиг. 1—4 в виде зависимостей глубины проникновения H в мм от скорости соударения v_0 в м/с для тел различной геометрии и массы. Статистическая обработка экспериментальных данных показала, что в исследованном диапазоне скоростей связь между глубиной H и скоростью v_0 может быть представлена линейной зависимостью (сплошные линии на фигурах), так как коэффициент корреляции между этими параметрами для всех тел оказался не ниже 0,98. Пунктирные линии на графиках отмечают 90%-ный доверительный интервал отклонения теоретической прямой регрессии от эмпирической.

Фиг. 1 относится к результатам опытов для тела с углом $2\alpha = 180^\circ$ (линия 1 соответствует телу массой $m_1 = 2,1$ г, линия 2 — $m_2 = 5$ г, линия 3 — $m_3 = 16,7$ г); фиг. 2 — $2\alpha = 90^\circ$ (линия 1 — $m_1 = 1,3$ г, линия 2 — $m_2 = 5$ г, линия 3 — $m_3 = 16,8$ г); фиг. 3 — $2\alpha = 60^\circ$ (линия 1 — $m_1 = 1,5$ г, линия 2 — $m_2 = 5$ г, линия 3 — $m_3 = 17,2$ г); фиг. 4 — $2\alpha = 30^\circ$ (линия 1 — $m_1 = 1,9$ г, линия 2 — $m_2 = 5$ г, линия 3 — $m_3 = 16,5$ г).

2. Для интерпретации результатов опытов примем, что при внедрении на глубину, значительно большую длины наконечника, сила сопротивления F зависит лишь от мгновенных значений скорости v , ускорения v' и постоянных параметров задачи

$$-F = m'v' + F_0(v) \quad (2.1)$$