

интерполируется полиномом Лагранжа второго порядка. Учитывается кривизна границы области. Интегралы с логарифмической особенностью по особым отрезкам вычисляются методом, предложенным в [4].

По этому алгоритму составлена и отлажена универсальная программа на языке ФОРТРАН для решения плоских краевых задач теории упругости с заданными на границе области усилиями или смещениями и задачи с граничными условиями кусочно-смешанного вида. Программа позволяет учитывать наличие двух осей симметрии, если они имеются. Каждая ось симметрии дает возможность понизить порядок матрицы алгебраической системы в два раза.

При отладке программы решены контрольные примеры. Проводился численный эксперимент на задаче о всестороннем растяжении круга единичной нормальной к границе области нагрузкой. Точное решение интегральных уравнений этой задачи известно, оно использовалось для отладки программы и анализа точности решения. Полученные при этом главные и контурные напряжения практически не отличаются от точного решения (при разбиении четверти границы круга на девять элементов).

4. Численно исследована задача о распределении напряжений в стенке толстостенного цилиндра со сложной внутренней границей (фиг. 2), нагруженного изнутри единичным нормальным давлением. При этом использовались два различных подхода к ее решению.

В первом случае задача рассматривалась как вторая краевая задача (на всей границе области заданы усилия). Во втором случае эта же задача решалась как задача с граничными условиями кусочно-смешанного вида и рассматривалась $1/8$ часть области.

При одной и той же точности вычислений затраты машинного времени во втором случае более чем в четыре раза меньше по сравнению с первым случаем.

По результатам численного решения (сплошные линии) и эксперимента (штриховые линии), проведенного методом фотоупругости, построены эпюры напряжений (фиг. 2). Сопоставление результатов численного решения и результатов эксперимента показало, что наибольшее расхождение составляет $\approx 14\%$ ($R=15$ м, $R_1=5,05$ м, $R_2=6,8$ м, $R_3=1,7$ м, $R_4=0,8$ м). Расчетный коэффициент концентрации напряжений α_s в опасном сечении равен 5,62. При таком же нагружении кольца, толщина которого равна наименьшей толщине стенки цилиндра, этот коэффициент равен 2,06.

Как видно, наличие утолщений в стенке цилиндра повышает коэффициент концентрации напряжений в 2,72 раза. Следует отметить, что вычисленные по результатам расчета тангенциальные усилия (интегралы вычислялись по формуле Симпсона) в опасном сечении отличаются от заданных граничными условиями на 0,208%. Этим подтверждается достоверность указанных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
2. Шишкин В. П. Об интегральных уравнениях теории потенциала для решения плоских задач теории упругости.— Строительство и архитектура, 1978, вып. 5, с. 30.
3. Копейкин Ю. Д., Бормот Ю. Л. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности.— Матер. IV Всес. конф., 1976, № 1, с. 72—80.
4. Лащенков А. Н. О мультипликативном методе выделения особенностей в численном интегрировании.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, вып. 183, с. 151—177.

Витебск

Поступила в редакцию
21.IV.1980

УДК 539.374

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ МЕТАЛЛА ПРИ ЧАСТНОМ УСЛОВИИ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

ПЕНЬКОВ В. Б., ТОЛОКОННИКОВ Л. А.

Изучается пластическое течение изотропного материала с пределом упругости, зависящим от гидростатического напряжения, при условии полной пластичности. Для случая осевой симметрии задача определения напряженного состояния становится статистически определяемой. Для поверхности течения, имеющей форму параболоида вращения, при условии постоянства угла вида напряженного состояния система разрешающих уравнений является гиперболической всюду, кроме конечной области с известными размерами, локализованной в вершине параболоида течения.

Система дифференциальных уравнений относительно скоростей перемещений, построенная на основе ассоциированного закона упруго-пластического течения, гиперболична всюду, за исключением полос окрестности углов вида напряженного состояния, соответствующих чистому растяжению или сжатию волокон, ориентированных в плоскостях, проходящих через ось симметрии. В области сжимающих давлений ширина полос много меньше 1° . За пределами полос шириной в 5° объемным изменением материала можно пренебречь. В этом случае совпадают поля характеристических направлений обеих систем с полем линий скольжения. В качестве примера приводится численное решение задачи прессования трубы, находящейся под гидростатическим давлением.

1. Общее условие полной пластичности записывается как некоторое конечное соотношение между компонентами тензора напряжений σ_{ij} . Условие полной пластичности изотропного тела в пространстве главных напряжений представляется некоторой кривой

$$F_p(\sigma, \tau, \varphi) = 0 \quad (p=1, 2) \quad (1.1)$$

Здесь в качестве аргументов выбраны гидростатическое напряжение, октаэдрическое касательное напряжение и фаза напряжений, причем $(\delta_{ij} - \text{символ Кронекера})$:

$$3\sigma = \sigma_{ii}, \quad 3\tau^2 = s_{ij}s_{ij}, \quad 2\tau^3 \cos 3\varphi = -\sqrt{3} s_{ij}s_{ik}s_{kj}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma \quad (1.2)$$

Частное условие пластичности выбираем согласно постулату Друккера и экспериментальным данным [1-4] в виде некоторой кривой на поверхности вращения в пространстве главных напряжений, полагая

$$F_1 = \tau^2 - \tau_s^2 + f(\sigma) = 0, \quad F_2 = \varphi - \varphi(\sigma) = 0 \quad (1.3)$$

Для закона течения, ассоциированного с (1.3), получаем соотношения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_1 [1/3 \delta_{ij} f' + s_{ij}] + \lambda_2 [\mu \tau s_{ij} + 3s_{ik}s_{kj} - 2\tau^2 \delta_{ij} - 1/3 \delta_{ij} \kappa \varphi'] \quad (1.4)$$

$$\mu = \sqrt{3} \cos 3\varphi, \quad \kappa = 2\sqrt{3} \tau^3 \sin 3\varphi$$

где λ_1, λ_2 — неопределенные множители, ε_{ij} — тензор скоростей деформаций.

2. В случае установившегося осесимметричного течения система (1.3), записанная в цилиндрических координатах r, θ, z , и уравнения равновесия (здесь и далее по индексам r и θ не суммировать)

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_r + \partial_z \sigma_{rz} + (\sigma_r - \sigma_\theta) / r &= 0 \\ \partial_r \sigma_{rz} + \partial_z \sigma_z + \sigma_{rz} / r &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ∂_r и ∂_z — операторы дифференцирования $\partial / \partial r$ и $\partial / \partial z$, образуют замкнутую систему относительно напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$. Последние удобно представить через три функции H, Φ, Ψ , формулами

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma + \sqrt{2} H \cos \Phi \cos \Psi_1, & \sigma_\theta &= \sigma + \sqrt{2} H \cos \Phi \cos \Psi_2 \\ \sigma_z &= \sigma + \sqrt{2} H \cos \Phi \cos \Psi_3, & \sigma_{rz} &= \sqrt{3/2} H \sin \Phi \\ \Psi_1 &= \Psi + 2/3\pi, & \Psi_2 &= \Psi, & \Psi_3 &= \Psi - 2/3\pi \end{aligned} \quad (2.2)$$

При $H = \tau$ уравнение (1.4) удовлетворяется при подстановке формул (2.2) тождественно. Представление главных напряжений σ_i в тригонометрической форме

$$\sigma_i = \sigma + \sqrt{2} \tau \cos \varphi_i, \quad \varphi_1 = \varphi + 2/3\pi, \quad \varphi_2 = \varphi, \quad \varphi_3 = \varphi - 2/3\pi \quad (2.3)$$

позволяет переписать соотношение для F_2 в виде $\cos \Phi \cos \Psi = \cos \varphi(\sigma)$.

Подстановка (2.2) в (2.1) дает систему двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных

$$a_{ij} \partial_r g_j + b_{ij} \partial_z g_j = c_i \quad (i, j=1, 2) \quad (2.4)$$

$$c_1 = \sqrt{3} H \cos \Phi (\sin \Psi + \sqrt{3} \cos \Psi) / r, \quad c_2 = -\sqrt{3} H \sin \Phi / r$$

$$g_1 = H, \quad g_2 = \Psi, \quad a_{11} = \alpha_{11} + \beta_1, \quad a_{12} = -b_{22} = \beta_2, \quad a_{21} = b_{11} = \alpha_{21}$$

$$a_{22} = b_{12} = \alpha_{22}, \quad b_{21} = \alpha_{11} - \beta_1, \quad \alpha_{11} = \sqrt{2} - \cos \varphi \partial_\sigma \tau + H \sin \varphi \partial_\sigma \varphi$$

$$\alpha_{21} = \sqrt{3} \sin \Phi \partial_\sigma \tau + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \Phi H \sin \varphi \partial_\sigma \varphi / \cos \Psi, \quad \alpha_{22} = -\sqrt{3} H \operatorname{ctg} \Phi \cos \Phi \operatorname{tg} \Psi$$

$$\beta_1 = \sqrt{3} \sin \Psi (H \sin \varphi \partial_\sigma \varphi - \cos \varphi \partial_\sigma \tau) / \cos \Psi, \quad \beta_2 = -\sqrt{3} H \cos \Phi / \cos \Psi$$

Характеристики системы (2.4) определяются соотношением

$$(A+C)(dz)^2 + 2Bdzdr - (A-C)(dr)^2 = 0$$

$$A = \alpha_{11}\alpha_{22}, \quad B = \beta_2\alpha_{11}, \quad C = \beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{21} \quad (2.5)$$

Система (2.4) будет гиперболична, если $A^2 + B^2 - C^2 > 0$. Асимптотический анализ показывает, что в области сжимающих давлений, где $f'(\sigma) \ll \tau^2$, условием гиперболичности является неравенство $\sqrt{2} |\tau\varphi'(\sigma)| < 1$.

При наличии граничных условий [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_r \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \sigma_{rz} \sin 2\alpha \\ \tau_n &= 1/2 (\sigma_r - \sigma_z) \sin 2\alpha + \sigma_{rz} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (2.6)$$

где σ_n , τ_n — нормальное и касательное напряжения на граничных площадках, α — угол между нормалью к площадке и положительным направлением оси r , систему (2.4) можно решить численно методом Массо.

Для осесимметричных скоростей деформации ε_r , ε_θ , ε_z , ε_{rz} ассоциированный закон (1.4) записывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \partial_r u_r = \lambda_1 (1/3 f' + s_r) + \lambda_2 (\mu \tau s_r + s_r^2 + 2s_\theta s_z + s_{rz}^2 - 1/3 \kappa \varphi') \\ \varepsilon_\theta &= u_r / r = \lambda_1 (1/3 f' + s_\theta) + \lambda_2 (\mu \tau s_\theta + s_\theta^2 + 2s_r s_z - 2s_{rz}^2 - 1/3 \kappa \varphi') \\ \varepsilon_z &= \partial_z u_z = \lambda_1 (1/3 f' + s_z) + \lambda_2 (\mu \tau s_z + s_z^2 + 2s_\theta s_r + s_{rz}^2 - 1/3 \kappa \varphi') \\ 2\varepsilon_{rz} &= \partial_z u_r + \partial_r u_z = 2\lambda_1 s_{rz} + 2\lambda_2 (\mu \tau s_{rz} - 3s_\theta s_{rz}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где u_r , u_z — скорости перемещений вдоль осей r и z ; s_r , s_θ , s_z , s_{rz} — компоненты девиатора осесимметричных напряжений. Исключая из (2.7) неопределенные множители λ_1 , λ_2 , получим систему двух квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\partial_r u_r + E(\partial_r u_z + \partial_z u_r) + \partial_z u_z = (G-1) u_r / r \quad (2.8)$$

$$\partial_r u_r + m(\partial_r u_z + \partial_z u_r) - \partial_z u_z = 0$$

$$E = 1/2 \eta (bf' + a\kappa\varphi') / s_{rz}, \quad G = \eta (cf' + \kappa\varphi'), \quad \eta = (ac - b)^{-1}$$

$$m = 1/2 (s_z - s_r) / s_{rz}, \quad a = 1/3 f' + s_\theta, \quad c = \mu\tau - 3s_\theta$$

$$b = \mu\tau s_\theta + s_\theta^2 + 2s_r s_z - 2s_{rz}^2 - 1/3 \kappa \varphi'$$

Множители λ_1 , λ_2 при этом можно вычислять по формулам

$$\lambda_1 = \eta (c\varepsilon_\theta - b\varepsilon_{rz} / s_{rz}), \quad \lambda_2 = \eta (-\varepsilon_\theta + a\varepsilon_{rz} / s_{rz}) \quad (2.9)$$

Система (2.8) будет гиперболична, если $1 + m^2 - E^2 > 0$.

Решать систему (2.8) следует численно при наличии граничных условий для скоростей перемещений и ранее найденных функциях H , Φ , Ψ .

Системы (2.4), (2.8) в области гиперболичности имеют четыре семейства характеристик. Анализ показывает, что в случае $f' \ll \tau_s$ или предельном случае цилиндра Мизеса два семейства характеристик системы (2.4) ортогональны и совпадают с линиями скольжения. Если к тому же $|\varphi'\tau| \ll 1$, что соответствует условию несжимаемости, то пара семейств характеристик системы (2.8) также ортогональна и совпадает с линиями скольжения. Последнее свидетельствует о том, что совпадают направляющие тензоры напряжений и скоростей деформаций.

3. В частном случае, когда поверхность текучести представляет собой параболоид вращения

$$F_1 = \tau^2 + k^2 \sigma - \tau_s^2 = 0 \quad (3.1)$$

где k^2 — экспериментально определяемая константа [6], а дополнительное условие есть условие неизменности фазы напряженного состояния $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, область негиперболичности системы (2.4) локализована у вершины параболоида внутри зоны, ограниченной радиусом $2^{-1/2} k^2$.

Физически наличие области негиперболичности в окрестности $\tau = 0$ на поверхности текучести означает, что наложение равномерно растягивающего напряжения вызовет в материале не пластическое разрушение, но хрупкое.

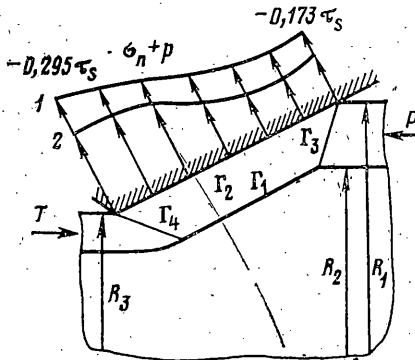
Анализ системы (2.8) показывает, что ее гиперболичность теряется в окрестности $\varphi = \pm \pi/3$, $\pm 2\pi/3$. Эти углы соответствуют чистому растяжению или сжатию волокон, ориентированных в плоскости $r \sim z$. При $k \ll \tau$ ширина полос есть величина порядка $0,003 k^2 / \tau$. Если угол вида напряженного состояния отличается от указанных значений более чем на 5° , то $E \approx 0$, $G \approx 0$ и первое уравнение (2.8) превращается в условие несжимаемости. В этом случае поле характеристик системы (2.8) совпадает с полем линий скольжения и задается выражением

$$dz / dr = (\sin \Phi \pm \sin \varphi) / (\cos^2 \Phi - \cos^2 \varphi)^{1/2}$$

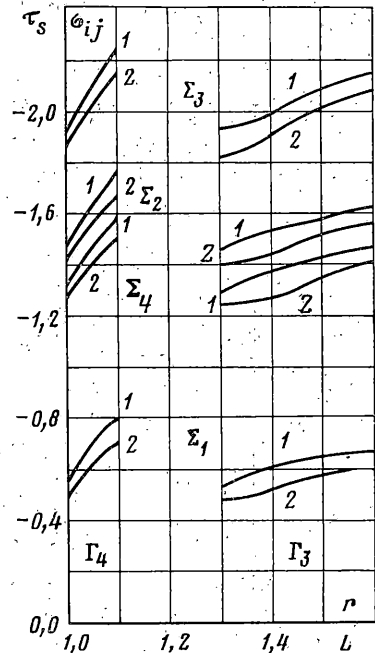
4. При расчете прессования трубы в камере высокого давления (фиг. 1) возможно следующее задание граничных условий: на внутренней стенке Γ_1 трубы нормальное давление равно давлению жидкости, взятому с противоположным знаком, а касательное отсутствует ($\sigma_n = -p$, $\tau_n = 0$); на внешней стенке Γ_2 определено либо касательное напряжение. ($\tau_n = \tau_m$, τ_m — величина силы трения между трубой и матрицей, отнесенная к единице площади), либо коэффициент кулонова трения ($\mu = \tau_n / \sigma_n$).

На свободной границе второе уравнение из (2.7) принимает вид $\cos^2 \Phi = \cos^2 2\alpha + \cos^2 \Phi \sin 2\alpha$. Для удовлетворения граничным условиям можно варьировать форму границы Γ_1 , Φ вдоль Γ_3 .

Для трубы с размерами $R_1 = 1,6L$ и $R_2 = 1,3L$, где L — характерный линейный размер, и конической матрицы с уклоном 0,5 и радиусом выхода $R_3 = 1,1L$ прове-



Фиг. 1



Фиг. 2

дены расчеты на прессование материалов с $k^2 = 0,001\tau_s$ и $k^2 = 0,0001\tau_s$ под гидростатическим давлением $p = 10\tau_s$. Предполагалось, что $\tau_m = 0$.

Усилия прессования P и противодействия T при $\cos \Phi = 0,1$ оказались в первом случае 30,4 и 10,1, во втором случае 30,3 и 10,0 соответственно в масштабе $\tau_s L^2$. На фиг. 1 изображено также распределение нормальных напряжений в зоне контакта с матрицей.

На фиг. 2 изображено распределение напряжений $\Sigma_1 = \sigma_r + p$, $\Sigma_2 = \sigma_\theta + p$, $\Sigma_3 = \sigma_z + p$, $\Sigma_4 = \sigma + p$ вдоль границ Γ_3 и Γ_4 в зависимости от r , причем кривые 1 соответствуют $k^2 = 0,001\tau_s$, кривые 2 — $k^2 = 0,0001\tau_s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бриджмен П. В. Исследование больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит., 1965. 444 с.
2. Береснев Б. И., Маргынгов Е. Д., Родионов К. П., Бульчев Д. К., Рябинин Ю. Н. Пластичность и прочность твердых тел при высоких давлениях. М.: Наука, 1970. 162 с.
3. Прозоров Л. В., Костава А. А., Ревтов В. Д. Прессование металлов жидкостью высокого давления. М.: Машиностроение, 1972. 152 с.
4. Огибалов П. М., Кийко И. А. Поведение вещества под давлением. М.: Изд-во МГУ, 1962. 154 с.
5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.
6. Голожонников Л. А. Механика деформируемого твердого тела, М.: Высшая школа, 1979. 318 с.

Тула

Поступила в редакцию
10.II.1980