

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛА**

ШИШКИН В. П.

Для решения плоских краевых задач теории упругости методом интегральных уравнений теории потенциала на основе интегральной формулы Соммиана при помощи приема, названного «сингуляризацией», получена интегральная формула, позволяющая вычислять напряжения на границе плоской области, применяя известные формулы механических квадратур. Формула реализована при решении краевых задач в данной работе. Разработан алгоритм численного решения на ЭВМ плоских краевых задач теории упругости. Численно решена задача по исследованию плоского напряженного состояния цилиндрического сосуда давления, стенки которого имеют резкие утолщения.

1. Будем разыскивать решение уравнения Ламе в виде интегрального представления [1]:

$$\eta u_i(x) = - \int_L u_j(y) T_{ij}(x, y) dl + \int_L t_j(y) K_{ij}(x, y) dl \quad (i, j=1, 2) \quad (1.1)$$

которое является аналогом формулы Грина теории гармонических функций. В этом случае плотностями потенциалов являются усилия  $t_i$  и смещения  $u_i$  в точках границы  $L$  области  $S$ . Граница  $L$  – совокупность замкнутых, но не имеющих общих точек линий  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_{m+1}$ , причем  $L_{m+1}$  охватывает все остальные, но ни одна из  $L_i$  ( $i \leq m$ ) не содержит в себе других контуров (фиг. 1). Через  $K_{ij}(x, y)$  обозначена матрица Кельвина,  $T_{ij}(x, y)$  – обобщенная нормальная производная от  $K_{ij}(x, y)$ :

$$K_{ij}(x, y) = \frac{a}{G} [\bar{\beta}_i \beta_j - \delta_{ij}(3-4\nu) \ln r], \quad a = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}$$

$$T_{ij}(x, y) = \frac{2a}{r} [(1-2\nu)(n_i \beta_i - n_i \beta_j - \delta_{ij} \varphi) - 2\beta_i \beta_j \varphi], \quad \varphi = n_i \beta_i$$

где  $\beta_i$  – направляющие косинусы вектора  $r=y-x$ ,  $n_i$  – направляющие косинусы внешней к границе  $L$  нормали  $n$ ,  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера,  $\eta=1$  при  $x \in S$ ,  $\eta=1/2$  при  $x \in L$ ,  $\eta=0$  при  $x \in S$ ,  $G$  и  $\nu$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона.

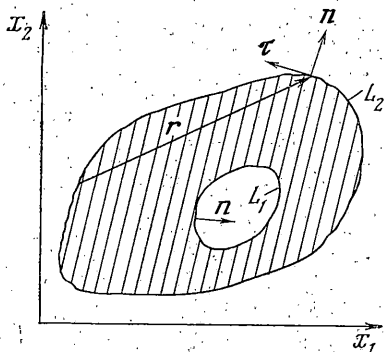
Однако при этом возникают принципиальные трудности, заключающиеся в том, что по формулам

$$\eta \sigma_{ij}(x) = G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{2\delta_{ij}\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} u \right) = - \int_L u_k(y) S_{ij}^k(x, y) dl + \int_L t_k(y) D_{ij}^k(x, y) dl \quad (1.2)$$

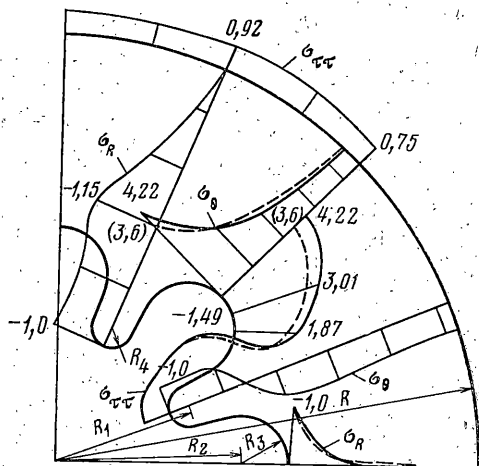
в проекциях на декартовы оси координат и по формулам [2] в проекциях на естественные оси координат (нормаль  $n$  и касательную  $\tau$  к границе области) напряжения  $\sigma_{ij}(x)$  в точках границы  $L$  не могут быть вычислены, так как интегралы с ядром  $S_{ij}^k(x, y)$  являются расходящимися. Прямые значения таких интегралов не существуют, а существуют лишь их предельные значения, но способы их вычисления пока неизвестны.

2. При определении компонентов тензора напряжений в точках  $x \in L$  указанные интегральные формулы напряжения (1.2) с дифференцируемой плотностью имеют смысл лишь для предельных значений  $\sigma_{ij}(x_0)$  при  $x \rightarrow L$  и отыскание предельных значений таких особенных интегралов требует специальных приемов. Пусть точка  $x \in S$  находится на расстоянии  $\delta$ , измеренном вдоль нормали, от предельной точки  $x_0 \in L$ . При математическом исследовании предельных значений особенных интегралов в трехмерном пространстве точку  $x_0$  окружают сферой бесконечно малого радиуса  $\varepsilon$ . Оказывается, что предельные значения, найденные для гладкой поверхности, сохраняются, если бесконечно малую часть поверхности, вырезанную сферой Ляпунова радиуса  $\varepsilon$ , заменить на часть касательной плоскости (плоский круг). Предельные значения интегралов в двумерной области с гладкой границей и дифференцируемой плотностью потенциала находят интегрированием по бесконечно малому отрезку прямой  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Так как на границе области напряжения  $\sigma_{nn}(x) = t_n(x)$ , а  $\sigma_{\tau\tau}(x) = t_\tau(x)$  и при решении той или иной краевой задачи они либо задаются, либо определяются по формулам (1.1), то остается определить только компоненту тензора напряжений  $\sigma_{\tau\tau}(x)$ . Для ее вычисления воспользуемся приемом, который далее для сокращения назовем «сингуляризацией».



Фиг. 1



Фиг. 2

«Сингуляризация» заключается в том, что для вычисления  $\sigma_{\tau\tau}(x)$  на границе плоской области вместо формулы (1.2) предлагается

$$\frac{1}{2} \sigma_{\tau\tau}(x) = \int_L u_k(y) A_k(x, y) dl + \int_L t_k(y) B_k(x, y) dl + \frac{1}{2} t_n(x) \quad (2.1)$$

$$A_n(x, y) = \frac{G}{\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-4\nu^2) [\psi^2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2] + (\alpha_1n_1 + \alpha_2n_2)^2 - (\alpha_2n_1 - \alpha_1n_2)^2 \}$$

$$A_\tau(x, y) = \frac{G}{\pi(1-\nu)r^2} \{ 4\varphi(n_1\beta_2 - n_2\beta_1) [(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 - \psi^2] + 2(\alpha_1n_1 + \alpha_2n_2)(\alpha_2n_1 - \alpha_1n_2) \}$$

$$B_n(x, y) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)r} \{ \varphi [(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 - \psi^2] +$$

$$+ (1-2\nu) [(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(n_1\beta_1 - n_2\beta_2) - 2\alpha_1\alpha_2(n_1\beta_2 + n_2\beta_1)] \}$$

$$B_\tau(x, y) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)r} \{ (n_1\beta_2 - n_2\beta_1) [(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^2 - \psi^2] +$$

$$+ (1-2\nu) [(n_1\beta_2 + n_2\beta_1)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - 2\alpha_1\alpha_2(n_1\beta_1 - n_2\beta_2)] \}, \quad \psi = \alpha_1\beta_1$$

где  $\alpha_i$  — направляющие косинусы внешней к границе  $L$  нормали  $\alpha$ , проведенной в точке  $x \in L$ .

В формуле (2.1) интегралы с ядром  $B_k(x, y)$ , имеющим особенность вида  $1/r$ , сингулярные, а интегралы с ядром  $A_k(x, y)$ , имеющим более высокую особенность вида  $1/r^2$ , тоже следует понимать в смысле главного значения Коши, так как ядро  $A_k(x, y)$  представляется разностью двух ядер, предельные значения которых при интегрировании по отрезку  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  взаимно уничтожаются. Следовательно, порядок особенности ядра снижается на единицу и в результате получается сингулярное ядро. Поэтому при решении краевых задач напряжения  $\sigma_{\tau\tau}(x)$  могут быть вычислены по формуле (2.1) методом механических квадратур [3].

3. Для численного решения плоских краевых задач теории упругости при помощи интегральных формул (1.1), (1.2), (2.1) составлен алгоритм с высоким порядком аппроксимации. По этому алгоритму все интегралы, за исключением интегралов с логарифмической особенностью по особым отрезкам, вычисляются по квадратурной формуле Гаусса с двумя узловыми точками. Незвестная плотность потенциала

интерполируется полиномом Лагранжа второго порядка. Учитывается кривизна границы области. Интегралы с логарифмической особенностью по особым отрезкам вычисляются методом, предложенным в [4].

По этому алгоритму составлена и отлажена универсальная программа на языке ФОРТРАН для решения плоских краевых задач теории упругости с заданными на границе области усилиями или смещениями и задачи с граничными условиями кусочно-смешанного вида. Программа позволяет учитывать наличие двух осей симметрии, если они имеются. Каждая ось симметрии дает возможность понизить порядок матрицы алгебраической системы в два раза.

При отладке программы решены контрольные примеры. Проводился численный эксперимент на задаче о всестороннем растяжении круга единичной нормальной к границе области нагрузкой. Точное решение интегральных уравнений этой задачи известно, оно использовалось для отладки программы и анализа точности решения. Полученные при этом главные и контурные напряжения практически не отличаются от точного решения (при разбиении четверти границы круга на девять элементов).

4. Численно исследована задача о распределении напряжений в стенке толстостенного цилиндра со сложной внутренней границей (фиг. 2), нагруженного изнутри единичным нормальным давлением. При этом использовались два различных подхода к ее решению.

В первом случае задача рассматривалась как вторая краевая задача (на всей границе области заданы усилия). Во втором случае эта же задача решалась как задача с граничными условиями кусочно-смешанного вида и рассматривалась  $1/8$  часть области.

При одной и той же точности вычислений затраты машинного времени во втором случае более чем в четыре раза меньше по сравнению с первым случаем.

По результатам численного решения (сплошные линии) и эксперимента (штриховые линии), проведенного методом фотоупругости, построены эпюры напряжений (фиг. 2). Сопоставление результатов численного решения и результатов эксперимента показало, что наибольшее расхождение составляет  $\approx 14\%$  ( $R=15$  м,  $R_1=5,05$  м,  $R_2=6,8$  м,  $R_3=1,7$  м,  $R_4=0,8$  м). Расчетный коэффициент концентрации напряжений  $\alpha_s$  в опасном сечении равен 5,62. При таком же нагружении кольца, толщина которого равна наименьшей толщине стенки цилиндра, этот коэффициент равен 2,06.

Как видно, наличие утолщений в стенке цилиндра повышает коэффициент концентрации напряжений в 2,72 раза. Следует отметить, что вычисленные по результатам расчета тангенциальные усилия (интегралы вычислялись по формуле Симпсона) в опасном сечении отличаются от заданных граничными условиями на 0,208%. Этим подтверждается достоверность указанных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
2. Шишкин В. П. Об интегральных уравнениях теории потенциала для решения плоских задач теории упругости.— Строительство и архитектура, 1978, вып. 5, с. 30.
3. Копейкин Ю. Д., Бормот Ю. Л. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности.— Матер. IV Всес. конф., 1976, № 1, с. 72—80.
4. Лащенков А. Н. О мультипликативном методе выделения особенностей в численном интегрировании.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, вып. 183, с. 151—177.

Витебск

Поступила в редакцию  
21.IV.1980

УДК 539.374

### ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ МЕТАЛЛА ПРИ ЧАСТНОМ УСЛОВИИ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

ПЕНЬКОВ В. Б., ТОЛОКОННИКОВ Л. А.

Изучается пластическое течение изотропного материала с пределом упругости, зависящим от гидростатического напряжения, при условии полной пластичности. Для случая осевой симметрии задача определения напряженного состояния становится статистически определяемой. Для поверхности течения, имеющей форму параболоида вращения, при условии постоянства угла вида напряженного состояния система разрешающих уравнений является гиперболической всюду, кроме конечной области с известными размерами, локализованной в вершине параболоида течения.