

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА НА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

ГРИГОЛЮК Э. И., ОСИПОВ Н. Л.

Исследуется поведение трехслойной круговой цилиндрической оболочки при осесимметричном неадиабатическом нагружении. При этом в материале оболочки появляются пластические деформации. Методика расчета строится на основе гипотезы жесткой нормали для всего пакета и гипотезы ломаной линии [1-5].

Учет пластических деформаций осуществляется при помощи теории течения с изотропным и трансляционно-изотропным упрочнением, деформационной теории и уравнений нелинейной упругости. Считается, что температурная задача несвязанная, а деформациями ползучести можно пренебречь. Материалы слоев различны, несжимаемы и первоначально изотропны. Толщины слоев различны, но постоянны вдоль координат поверхности приведения, которая совмещается: в первом случае — с внутренней поверхностью пакета, во втором — со срединной поверхностью заполнителя. Криволинейные ортогональные координаты x, θ, z направлены вдоль образующей, направляющей и по нормали к поверхности приведения.

1. Для решения упругопластической задачи запишем систему уравнений геометрии и равновесия в конечных приращениях следующим образом:

$$\Delta u_x^{(z)} = \Delta u_x + z \Delta \vartheta_x, \quad \Delta w^{(z)} = \Delta w, \quad \Delta \varepsilon_x^{(z)} = \Delta \varepsilon_x + z \Delta \kappa_x, \quad \Delta \varepsilon_\theta^{(z)} = \Delta \varepsilon_\theta \quad (1)$$

$$\Delta N_x = \text{const}, \quad \Delta Q_x' - R^{-1} \Delta N_\theta + \Delta p = 0, \quad \Delta M_x' - \Delta Q_x = 0$$

$$\Delta u_x^{(z)} = \Delta u_x \pm c \Delta \alpha + z \Delta \vartheta_x, \quad \Delta u_x^{(z)} = \Delta u_x + z (\Delta \alpha + \Delta \vartheta_x), \quad \Delta w^{(z)} = \Delta w$$

$$\Delta \varepsilon_x^{(z)} = \Delta \varepsilon_x \pm c \Delta \alpha_x + z \Delta \kappa_x, \quad \Delta \varepsilon_\theta^{(z)} = \Delta \varepsilon_\theta$$

$$\Delta \varepsilon_x^{(z)} = \Delta \varepsilon_x + z (\Delta \alpha_x + \Delta \kappa_x), \quad \Delta \varepsilon_{xz}^{(z)} = \Delta \alpha \quad (2)$$

$$\Delta N_x = \text{const}, \quad \Delta Q_x' - R^{-1} \Delta N_\theta + \Delta p = 0, \quad \Delta M_x' - \Delta Q_x = 0, \quad \Delta H_x' - \Delta Q_x^{(z)} = 0$$

$$\Delta \varepsilon_x = \Delta u_x', \quad \Delta \varepsilon_\theta = R^{-1} \Delta w, \quad \Delta \vartheta_x = -\Delta w, \quad \Delta \kappa_x = \Delta \vartheta_x', \quad \Delta \alpha_x = \Delta \alpha'$$

Здесь система (1) относится к первому случаю, а (2) — ко второму; R — радиус оболочки; Δp — приращение нормального давления; штрих означает дифференцирование по координате x ; нижний минус относится к внутреннему слою; верхний индекс (z) означает принадлежность компонентов к точке, отстоящей на расстоянии z от поверхности приведения; c — половина толщины заполнителя; нижние индексы (x) и (θ) означают принадлежность компонентов к соответствующим осям; $\Delta u_x^{(z)}$, $\Delta w^{(z)}$, Δu_x , Δw — приращения тангенциального и нормального перемещений;

$\Delta \varepsilon_x^{(z)}$, $\Delta \varepsilon_\theta^{(z)}$, $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_\theta$ — приращения тангенциальных деформаций; $\Delta \varepsilon_x^z$, $\Delta \alpha$ — приращения деформации сдвига и относительного угла сдвига в заполнителе; ΔN_x , ΔN_θ , ΔQ_x , $\Delta Q_x^{(z)}$ — приращения удельных тангенциальных и поперечных усилий (верхний индекс означает принадлежность усилия только к заполнителю); ΔM_x , ΔH_x — приращения удельных изгибающего и сдвигающего моментов.

В общем случае физические уравнения запишем в виде [6]:

$$d\varepsilon_{ij} = 1/2 d(S_{ij}/G) + \delta_{ij} d(\beta T) + \Phi \quad (3)$$

$$\Phi = 0, \text{ если } f = 0, f^* \leq 0; \quad \Phi = d\lambda S_{ij}^*, \text{ если } f = 0, f^* > 0$$

где в соответствии с [7]:

$$f = S_{ij}^* S_{ij}^{*2} - 2/3 [\sigma_T^* (\varepsilon_{i*}^{*p}, T)]^2 = 0 \quad (i, j = x, \theta, z), \quad (4)$$

$$S_{ij}^* = S_{ij} - \rho_{ij}, \quad f^* = \frac{\partial f}{\partial S_{ij}^*} dS_{ij}^* + \frac{\partial f}{\partial T} dT$$

$$d\lambda = g \left(d\sigma_i^* - \frac{\partial \sigma_T^*}{\partial T} dT \right), \quad g = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_i^*} \left(\frac{\partial \sigma_T^*}{\partial \varepsilon_{i*}^{*p}} \right)^{-1}, \quad \sigma_i^* = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^* S_{ij}^*},$$

$$\varepsilon_{i*}^{*p} = \int \sqrt{2 d\varepsilon_{ij}^{*p} d\varepsilon_{ij}^{*p}}$$

S_{ij} — компоненты девиатора напряжений, ρ_{ij} — тензор смещения центра поверхности нагружения, σ_T^* — величина, характеризующая размер поверхности нагружения, $d\epsilon_{ij}^p$ — бесконечно малые приращения компонентов пластической деформации, T — температура, β — коэффициент линейного температурного расширения, G — модуль упругости второго рода, δ_{ij} — символ Кронекера.

Девиатор трансляции ρ_{ij} определяется следующей дифференциальной линейной зависимостью [8]:

$$d\rho_{ij} = A(\epsilon_{ik}^p, T) d\epsilon_{ij}^p \quad (5)$$

где $A(\epsilon_{ik}^p, T)$ — функционал траектории деформаций. Если положить $A(\epsilon_{ik}^p, T) = 0$, то уравнение (4) будет выражать закон изотропного упрочнения. Уравнения (3) можно использовать и в случае деформационной теории пластичности и нелинейной упругости. Для этого в них отбрасывается последнее слагаемое и знак дифференциала. Уругопластическая задача решается путем последовательного решения ряда упругих задач с использованием полученных уравнений для различных моментов времени с переменными параметрами упругости [9]. Предполагается, что при простой разгрузке материал не получает новых пластических деформаций.

Если далее воспользоваться соотношениями, связывающими компоненты векторов усилий и моментов с компонентами напряжения [5], а также геометрическими и физическими уравнениями с заменой в последних дифференциалов приращениями, то нетрудно получить физические зависимости для оболочки, связывающие линейно приращения удельных усилий и моментов с деформацией поверхности приведения:

$$[\Delta N] = [a_{ij}] [\Delta \epsilon] + [b_i] \quad (6)$$

где вектор $[\Delta N]$ для первого случая содержит компоненты $\Delta N_x, \Delta N_\theta, \Delta M_x, \Delta M_\theta$, а для второго — $\Delta N_x, \Delta N_\theta, \Delta Q_x, \Delta M_x, \Delta M_\theta, \Delta H_x$; вектор $[\Delta \epsilon]$ содержит соответственно компоненты $\Delta \epsilon_x, \Delta \epsilon_\theta, \Delta \kappa_x, \Delta \epsilon_x, \Delta \epsilon_\theta, \Delta \alpha_x, \Delta \alpha, \Delta \kappa_x$; матрицы $[a_{ij}]$ и $[b_i]$ содержат жесткостные коэффициенты и свободные члены, являющиеся функционалами траектории деформаций.

2. Для решения уругопластической задачи по теориям течения применяется шаговый метод, в котором величина шага определяется в соответствии с условиями (3), выполняемыми с некоторой заданной точностью. В случае деформационной теории и нелинейной упругости, уравнения которых при активном нагружении совпадают, решение можно видоизменить. Весь процесс нагружения заранее разбивается на малые этапы, и на каждом из них для заданных нагрузок методом переменных параметров упругости [9] находится нужное решение, совокупность которых дает траекторию нагружения или деформаций.

При этом на каждом этапе или шаге интегрирования необходимо решить систему уравнений (1), (2), (6) при заданных граничных условиях. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что некоторые из функций, входящих в эти уравнения, линейно выражаются через остальные разрешающие функции, и применим ход решения, разработанный в [10]. Системы разрешающих дифференциальных уравнений относительно этих функций в нормальном виде записываются следующим образом:

$$\Delta Q_x' = R^{-1} \Delta N_\theta - \Delta p, \quad \Delta M_x' = \Delta Q_x, \quad \Delta \theta_x' = \Delta \kappa_x, \quad \Delta \epsilon_\theta' = -R^{-1} \Delta \theta_x \quad (7)$$

$$\Delta Q_x' = R^{-1} \Delta N_\theta - \Delta p, \quad \Delta M_x' = \Delta Q_x, \quad \Delta H_x' = \Delta Q_x^{(3)}, \quad \Delta \theta_x' = \Delta \kappa_x, \quad \Delta \epsilon_\theta' = -R^{-1} \Delta \theta_x, \quad (8)$$

$$\Delta \alpha' = \Delta \alpha_x$$

Решение систем (7), (8) для данной краевой задачи проводится методом ортогональной прогонки [11], а решение начальной задачи — методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага в зависимости от заданной точности. Подобранная из условий устойчивости и точности метода система точек ортонормирования принимается одинаковой в обоих случаях расчета. В этих точках ЭВМ запоминаются параметры напряженного состояния, температура и механические характеристики материалов. В промежуточных точках указанные величины находятся путем квадратичной интерполяции.

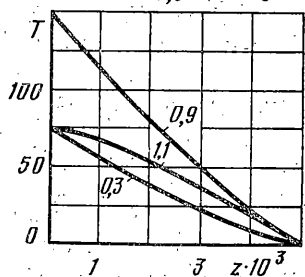
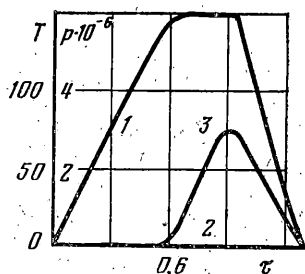
По приведенной методике была составлена программа для ЭВМ БЭСМ-6. В качестве примера рассматривается трехслойная цилиндрическая оболочка средней длины с несимметричным пакетом при следующих граничных условиях (для первого и второго случаев соответственно):

$$N_x = \theta_x = w = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad Q_x = \theta_x = 0 \quad \text{при } x = L \quad (9)$$

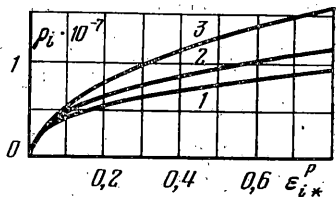
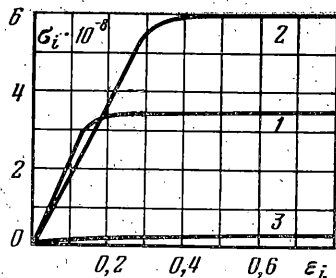
$$N_x = w = \theta_x = H_x = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad Q_x = \theta_x = \alpha = 0 \quad \text{при } x = L \quad (10)$$

Здесь L — длина оболочки. Оболочка нагружается одномерным, изменяющимся только по толщине температурным полем и равномерно распределенным внутренним давлением. Для тонкой оболочки можно воспользоваться уравнением теплопроводности для плоской стенки [12]:

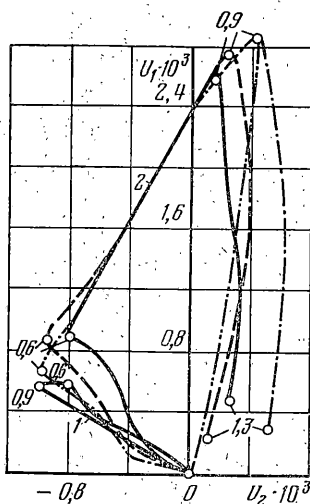
$$\partial T(z, \tau) / \partial \tau = a \quad \partial^2 T(z, \tau) / \partial z^2 \quad (11)$$



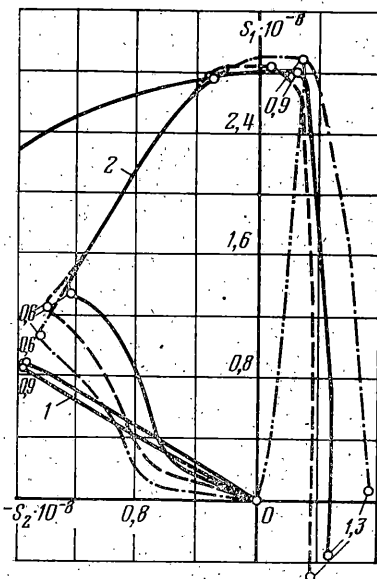
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь a — коэффициент температуропроводности, τ — время. Краевые условия записываются следующим образом: $T(z, 0) = 0$; $T(0, \tau) = f_1(\tau)$, $T(h, \tau) = f_2(\tau)$; на стыках слоев $\lambda_i (\partial T / \partial z)_i = \lambda_{i+1} (\partial T / \partial z)_{i+1}$, $T_i = T_{i+1}$; где i — номер слоя, λ_i — коэффициент теплопроводности i -го слоя, h — толщина пакета; начало координат берется на внутренней поверхности стенки.

Для решения уравнения (11) применяется численный метод сеток с явной схемой. Вопросы устойчивости и точности этого метода в применении к аналогичным задачам освещены в [12].

Функции f_1 , f_2 (кривые 1, 2), изменение давления (Н/М², кривая 3) и распределение температуры (°С) в некоторые моменты времени (с) показаны на фиг. 1. В заданном диапазоне температур зависимость физико-механических констант от температуры можно пренебречь. Толщины внешнего, внутреннего слоев и заполнителя равны соответственно: $h_1 = h_3 = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м, $h_2 = 0,1 \cdot 10^{-2}$ м. Радиус и длина оболочки: $R = 15 \cdot 10^{-2}$ м, $L = 12 \cdot 10^{-2}$ м.

Кривые деформирования изображены на фиг. 2. Здесь цифрами 1, 2, 3 отмечены кривые, относящиеся к наружному, внутреннему слоям и заполнителю соответственно.

На фиг. 3 изображены проекции на плоскость U_1U_2 [13] траекторий деформаций в точке, находящейся в сечении $x=0$ на границе заполнителя с наружным несущим слоем. На фиг. 4 представлены траектории нагружения в осях S_1S_2 [13] для той же точки по отношению к несущему слою. Кривые 1 и 2 соответствуют первому и второму случаям. Сплошными, штриховыми, штрихпунктирными линиями с одной и двумя промежуточными точками проведены кривые соответственно для решений: по теориям пластического течения с трансляционно-изотропным и изотропным упрочнением, деформационной теории и нелинейной упругости. Направление траектории определяется по меткам времени. Дуга окружности на фиг. 4 представляет собой условие текучести в пространстве напряжений.

Сравнение траекторий для обоих случаев показывает совершенно разный характер напряженно-деформированного состояния и его изменения в процессе нагружения в этих случаях. При отсутствии сдвига в заполнителе пакет стенки оболочки получается более жестким и все напряжения и деформации находятся в пределах упругости. Сдвиговая податливость пакета приводит к появлению заметных пластических деформаций и усложнению общей картины напряженного состояния. Естественно, что при нагружении в пределах упругости в обоих случаях траектории нагружения и деформации подобны — их соответствующие точки связаны линейными соотношениями с постоянными коэффициентами. При этом во втором случае отличие траекторий, вычисленных по теории течения и деформационной теории, объясняется различным протеканием упругопластического процесса в соседних с рассматриваемой точкой областях.

После выхода материала слоя за предел упругости ($\tau=0,8$ с) траектория нагружения делает заметный поворот и векторы деформаций и напряжений перестают быть коллинеарными [13]. Так как относительный поворот этих векторов оказывается небольшим, то деформационная теория на этом участке дает траектории, близкие к полученным по теориям течения. После момента $\tau=0,9$ с все теории пластичности и нелинейная упругость дают разгрузку. Траектории деформации и напряжений с заметным взаимным отклонением сильно отличаются и от траектории простой разгрузки. После снятия всех нагрузок в точке имеют место остаточные деформации и напряжения, также значительно различающиеся между собой.

Как показывает анализ траекторий, процесс нагружения является весьма сложным и для более точной оценки упругопластического состояния было целесообразно применять достаточно общий вариант теории пластического течения (3). Это особенно важно для повторяющихся процессов нагружения, когда точная оценка остаточных деформаций и возникающая на их основе анизотропия материала имеют большое значение.

Таким образом, сдвиговая податливость оболочки совершенно преобразует характер изменения напряженно-деформированного состояния и пренебрежение этим обстоятельством, особенно при циклических нагружениях, недопустимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И. Упругая устойчивость ортотропных и слоистых конических и цилиндрических оболочек. — В сб.: Расчет пространственных конструкций. Вып. 3. М.: Стройиздат, 1955, с. 375—420.
2. Григолюк Э. И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем. — Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 1, с. 77—84.
3. Григолюк Э. И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем. — Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 1, с. 26—34.
4. Григолюк Э. И. Об устойчивости трехслойных оболочек и пластин за пределом упругости. — Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 6, с. 68—72.
5. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
6. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
7. Биргер И. А., Демьянушко И. В. Теория пластичности при неизотермическом нагружении. — Инж. ж. МТТ, 1968, № 6, с. 70—77.
8. Арагюнян Р. А., Вакуленко А. А. О многократном нагружении упругопластической среды. — Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4, с. 53—60.
9. Биргер И. А. Методы упругих решений в теории пластического течения. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 2, с. 116—119.
10. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. К.: Наукова думка, 1973. 228 с.
11. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Успехи матем. наук, 1961, т. 16, № 3, с. 171—175.
12. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Гостехиздат, 1952. 392 с.
13. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.V.1979