

УДК 539.3:534.1

## РЕАКЦИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ДЕЙСТВИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

ПОЖУЕВ В. И.

Осесимметричные стационарные задачи о воздействии подвижных нагрузок на трехслойные цилиндрические оболочки рассмотрены в [1, 2]. Уточненное решение таких задач, когда для заполнителя используются уравнения теории упругости, а несущие слои рассматриваются как тонкие оболочки, проведено в [3]. При этом исследован жесткий и скользящий контакты между несущими слоями и заполнителем, а также проведено сравнение с результатами, получаемыми при использовании теории оболочек с несжимаемым заполнителем. Неосесимметричная задача о воздействии подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку с заполнителем решена в [4]. Распространение неосесимметричных свободных волн в трехслойных цилиндрических оболочках в уточненной постановке рассматривалось в [5].

В публикуемой работе изучается реакция бесконечно длинной трехслойной цилиндрической оболочки на действие неосесимметричной нагрузки, движущейся вдоль оси с постоянной скоростью  $c$ , меньшей скорости распространения волн сдвига в заполнителе. В качестве примера для докритической скорости движения получено распределение перемещений и контактных напряжений для системы равномерно распределенных вдоль окружности сил, а также показано влияние толщины и жесткости заполнителя на прогибы оболочки и контактные напряжения.

1. Для неосесимметричного движения несущих слоев исходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a_k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2a_k} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{a_k} \frac{\partial w}{\partial x} &= \rho \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{1+\nu}{2a_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a_k^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a_k^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \rho \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\nu}{a_k} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a_k^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{w}{a_k^2} &= -\rho \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-\nu}{2Gh} (q_k + p_k) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь индекс  $k=1$  относится к внутреннему несущему слою, а  $k=2$  — к внешнему,  $u, v, w$  — перемещения точек срединных поверхностей оболочек в направлении осей  $x, \theta, r, h, a_k$  — толщина и радиус срединной поверхности несущего слоя,  $q_k$  — нормальная реакция со стороны заполнителя,  $p_1=0, p_2=p, p$  — интенсивность подвижной нагрузки.

Рассматривается оболочка симметричного строения, поэтому механические характеристики и толщины несущих слоев одинаковы.

Для заполнителя используются динамические уравнения теории упругости, которые в векторной форме имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} (\lambda_c + 2\mu_c) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu_c \text{rot rot } \mathbf{u} &= \rho_c \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 \\ \lambda_c &= 2\nu_c G_c / (1 - 2\nu_c), \mu_c = G_c \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{u} (u_x, u_\theta, u_r)$  — вектор перемещения.

В силу малой толщины несущих слоев принимается, что заполнитель

контактирует с оболочками вдоль их срединных поверхностей. Тогда граничные условия в случае скользящего контакта и двусторонней связи запишутся в виде

$$\sigma_{rx} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad u_r = w \quad \text{при } r = a_k \quad (1.3)$$

$$\sigma_{rr} = -q_1, \quad \text{если } r = a_1; \quad \sigma_{rr} = q_2, \quad \text{если } r = a_2$$

Для постоянной скорости движения нагрузки и установившегося процесса решение уравнений (1.1), (1.2) ищется в подвижной системе координат  $r, \theta, \eta = (x-ct)/a_2$ .

В уравнениях (1.1), (1.2) перейдем к подвижной системе координат и рассмотрим вначале единичную нормальную нагрузку с произвольной зависимостью от угловой координаты, изменяющуюся вдоль  $\eta$  синусоидально и движущуюся с постоянной скоростью вдоль внешней оболочки

$$p(\theta, \eta) = P(\theta) \exp(i\xi\eta) \quad (1.4)$$

Предполагается, что функция  $P(\theta)$  разложима в ряд Фурье по угловой координате.

В установившемся состоянии зависимость всех величин от  $\eta$  имеет вид (1.4), поэтому решение уравнений (1.1), (1.2) представим в форме

$$\{u, v, w, q_k, \mathbf{u}\} = \{u_0, v_0, w_0, q_{k0}, \mathbf{u}_0\} \exp(i\xi\eta) \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.1), ищем решение полученных уравнений в виде рядов Фурье по угловой координате

$$\{u_0, w_0, q_{k0}, P(\theta)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{u_n, w_n, q_{k0,n}, p_n\} \cos(n\theta), \quad v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\xi) \sin(n\theta) \quad (1.6)$$

Тогда для  $n$ -го члена разложения приходим к следующим уравнениям:

$$-\left[ \left( 1 - \frac{1-\nu}{3} c_0^2 \right) \xi^2 + \frac{(1-\nu)n^2}{2\varepsilon_k^2} \right] u_n^0 + i\xi \frac{(1+\nu)n}{2\varepsilon_k} v_n^0 + i\xi \frac{\nu}{\varepsilon_k} w_n^0 = 0 \quad (1.7)$$

$$i\xi \frac{(1+\nu)n}{2\varepsilon_k} u_n^0 + \left[ \frac{1-\nu}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} c_0^2 \right) \xi^2 + \frac{n^2}{\varepsilon_k^2} \right] v_n^0 + \frac{n}{\varepsilon_k^2} w_n^0 = 0$$

$$i\xi \frac{\nu}{\varepsilon_k} u_n^0 + \frac{n}{\varepsilon_k^2} v_n^0 + \left[ \frac{\kappa^2}{12} \left( \xi^2 + \frac{n^2}{\varepsilon_k^2} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_k^2} - \frac{1-\nu}{3} c_0^2 \xi^2 \right] w_n^0 = -\frac{1-\nu}{\kappa} (p_{k,n}^0 + q_{k,n}^0)$$

$$\{u_n^0, v_n^0, w_n^0\} = \{u_n, v_n, w_n\}/h, \quad \kappa = h/a_2, \quad \kappa_c = h_c/h, \quad c_0 = c^2/2\rho/G)^{1/2} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_k = 1 - \kappa(1 + \kappa_c), \quad \text{если } k=1, \quad \varepsilon_k = 1, \quad \text{если } k=2$$

$$\{p_{k,n}^0, q_{k,n}^0\} = a_2 \{p_{k,n}, q_{k0,n}\} / (2Gh)$$

Из (1.7) находим нормальные нагрузки, которые передаются на заполнитель со стороны обшивок

$$q_{k0,n} = -p_{k,n} - \frac{2G}{1-\nu} \kappa^2 f(k) \frac{w_n}{h}, \quad f(k) = e_3 + \frac{n^2}{\varepsilon_k^4} \frac{e_5}{e_4} - \frac{\nu \xi^2}{\varepsilon_k^2} e_6 \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= \left(1 - \frac{1-\nu}{3} c_0^2\right) \xi^2 + \frac{1-\nu}{2} \frac{n^2}{\varepsilon_k^2} \\
e_2 &= \frac{1-\nu}{2} \left(1 - \frac{2}{3} c_0^2\right) \xi^2 + \frac{n^2}{\varepsilon_k^2}, \quad e_4 = \frac{(1+\nu)^2 n^2}{4e_1 \varepsilon_k^2} \xi^2 - e_2 \\
e_3 &= \frac{\kappa^2}{12} \left(\xi^2 + \frac{n^2}{\varepsilon_k^2}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_k^2} - \frac{1-\nu}{3} c_0^2 \xi^2 \\
e_5 &= 1 - \frac{\nu(1+\nu)}{2e_1} \xi^2, \quad e_6 = \frac{(1+\nu)n^2}{2\varepsilon_k^2} \frac{e_5}{e_1 e_4} + \frac{\nu}{e_1}
\end{aligned}$$

В осесимметричном случае ( $n=0$ ) из (1.9) получаем

$$q_{k0} = -p_k - \frac{2G\kappa^2}{1-\nu} \left[ \frac{\kappa^2 \xi^4}{12} + \frac{1}{\varepsilon_k^2} \left(1 - \frac{3\nu^2}{3-(1-\nu)c_0^2}\right) - \frac{1-\nu}{3} c_0^2 \xi^2 \right] \frac{w_0}{h} \quad (1.10)$$

что совпадает с формулой (1.8) из [3].

2. Решение уравнений движения заполнителя в подвижной системе координат с учетом (1.5) ищется в виде рядов Фурье по  $\theta$ . Аналогично [4, 5] для  $c < c_s$  получаем

$$\begin{aligned}
u_{x,n}(r, \xi) &= i \frac{\xi}{a_2} K_n(br) A_n + i \frac{\xi}{a_2} I_n(br) B_n + d^2 K_n(dr) C_n + d^2 I_n(dr) D_n \\
u_{\theta,n}(r, \xi) &= -\frac{n}{r} K_n(br) A_n - \frac{n}{r} I_n(br) B_n + \\
&+ i \frac{\xi}{a_2} \frac{n}{r} K_n(dr) C_n + i \frac{\xi}{a_2} \frac{n}{r} I_n(dr) D_n - \left[ \frac{n}{r} K_n(dr) - dK_{n+1}(dr) \right] E_n - \\
&- \left[ \frac{n}{r} I_n(dr) + dI_{n+1}(dr) \right] S_n
\end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
u_{r,n}(r, \xi) &= \left[ \frac{n}{r} K_n(br) - bK_{n+1}(br) \right] A_n + \\
&+ \left[ \frac{n}{r} I_n(br) + bI_{n+1}(br) \right] B_n - i \frac{\xi}{a_2} \left[ \frac{n}{r} K_n(dr) - dK_{n+1}(dr) \right] C_n - \\
&- i \frac{\xi}{a_2} \left[ \frac{n}{r} I_n(dr) + dI_{n+1}(dr) \right] D_n + \frac{n}{r} K_n(dr) E_n + \frac{n}{r} I_n(dr) S_n \\
b &= m\xi/a_2, \quad d = m_s \xi/a_2, \quad m = (1-c^2/c_p^2)^{1/2}, \quad m_s = (1-c^2/c_s^2)^{1/2}
\end{aligned}$$

где  $I_n(x)$ ,  $K_n(x)$  — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента,  $c_p$ ,  $c_s$  — скорости распространения волн растяжения — сжатия и сдвига в заполнителе.

Определяя при помощи закона Гука компоненты напряжения и удовлетворяя затем с учетом (1.9) граничным условиям (1.3), получаем систему алгебраических уравнений для определения функции  $A_n(\xi) \div S_n(\xi)$ , решение которой можно записать в виде

$$\{A_n \div S_n\} = -\frac{a_2^2 p_n}{2G_e} \frac{1}{\det_n \|a_{ij}\|} \{A_n^0 \div S_n^0\} \quad (i, j=1, 2, \dots, 6) \quad (2.2)$$

$$A_n^\circ = \frac{A_{61}}{K_{n+1}(m\xi)}, \quad B_n^\circ = \frac{A_{62}}{I_n(m\xi)}, \quad C_n^\circ = i \frac{a_2 A_{63}}{\xi K_{n+1}(m_s \xi)},$$

$$D_n^\circ = -i \frac{a_2 A_{64}}{\xi I_n(m_s \xi)}, \quad E_n^\circ = -\frac{A_{65}}{K_{n+1}(m_s \xi)}, \quad S_n^\circ = \frac{A_{66}}{I_n(m_s \xi)}$$

Здесь  $A_{6j}$  — алгебраические дополнения элементов  $a_{6j}$ , а элементы определителей  $\det_n \|a_{ij}\|$  вычисляются по формулам (2.3) из [5].

Зная  $A_n \div S_n$ , получаем выражения для  $n$ -х членов разложения перемещений и напряжений в заполнителе, а также перемещений срединных поверхностей оболочек. Принимая во внимание формулы (1.6), находим решение для единичной нагрузки. Так, радиальные перемещения в заполнителе определяются по формуле

$$u_r(\xi, \theta, r_*) = -\frac{a_2}{G_c} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\xi) v_n(\xi, r_*)}{\det_n \|a_{ij}\|} \cos(n\theta) \right\} \exp(i\xi\eta) \quad (2.3)$$

$$v_n(\xi, r_*) = \left( \frac{n}{r_*} s_{14} - m\xi s_{13} \right) A_{61} + \left( \frac{n}{r_*} s_{16} + m\xi s_{15} \right) A_{62} + \left( \frac{n}{r_*} s_{18} - m_s \xi s_{17} \right) A_{63} -$$

$$- \left( \frac{n}{r_*} s_{20} + m_s \xi s_{19} \right) A_{64} - \frac{n}{r_*} s_{18} A_{65} + \frac{n}{r_*} s_{20} A_{66}, \quad r_* = \frac{r}{a_2}$$

Для радиальных напряжений имеем

$$\sigma_{rr}(\xi, \theta, r_*) = - \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\xi) \varepsilon_n(\xi, r_*)}{\det_n \|a_{ij}\|} \cos(n\theta) \right\} \exp(i\xi\eta). \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_n(\xi, r_*) = \left\{ \left[ t_1 \xi^2 + \frac{n(n-1)}{r_*^2} \right] s_{14} + \frac{m\xi}{r_*} s_{13} \right\} A_{61} +$$

$$+ \left\{ \left[ t_1 \xi^2 + \frac{n(n-1)}{r_*^2} \right] s_{16} - \frac{m\xi}{r_*} s_{15} \right\} A_{62} +$$

$$+ \left\{ \left[ m_s^2 \xi^2 + \frac{n(n-1)}{r_*^2} \right] s_{18} + \frac{m_s \xi}{r_*} s_{17} \right\} A_{63} -$$

$$- \left\{ \left[ m_s^2 \xi^2 + \frac{n(n-1)}{r_*^2} \right] s_{20} - \frac{m_s \xi}{r_*} s_{19} \right\} A_{64} -$$

$$- \frac{n}{r_*} \left[ \frac{n-1}{r_*} s_{18} - m_s \xi s_{17} \right] A_{65} + \frac{n}{r_*} \left[ \frac{n-1}{r_*} s_{20} + m_s \xi s_{19} \right] A_{66}$$

$$s_{13} = K_{n+1}(m\xi r_*) / K_{n+1}(m\xi), \quad s_{14} = K_n(m\xi r_*) / K_{n+1}(m\xi)$$

$$s_{15} = I_{n+1}(m\xi r_*) / I_n(m\xi), \quad s_{16} = I_n(m\xi r_*) / I_n(m\xi)$$

где  $s_{17}$ ,  $s_{18}$  получаются из  $s_{13}$ ,  $s_{14}$ , а  $s_{19}$ ,  $s_{20}$  — из  $s_{15}$ ,  $s_{16}$  заменой  $m$  на  $m_s$ .

3. Зная решение для синусоидальной по длине нагрузки, реакцию на движение другого вида нормального давления получаем при помощи су-

перпозиции, используя представление нагрузки интегралом Фурье. Так, для нагрузки, распределенной вдоль окружности  $p(\theta, \eta) = P(\theta)\delta(\eta)$ , используется представление функции Дирака в виде интеграла с бесконечным верхним пределом

$$\delta(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\xi\eta) d\xi \quad (3.1)$$

Реакцию на косинусоидальную нагрузку единичной амплитуды можно получить, если взять действительные части выражений (2.3), (2.4). Линейной суперпозицией находим затем решение для сосредоточенной кольцевой нагрузки интегрированием результатов для косинусоидальной нагрузки по волновому числу  $\xi$  в пределах от 0 до  $\infty$ .

В качестве примера дальнейшие расчеты проведены для системы  $l$  сосредоточенных на одинаковом расстоянии вдоль окружности сил, так что

$$P(\theta) = p_1 \sum_{k=1}^l \delta(\theta - \theta_k) \quad (3.2)$$

Если принять, что  $p_1 = 2\pi p_0/l$ , где  $p_0$  — интенсивность равномерно распределенной вдоль окружности нагрузки, и обозначить  $a_n$  — коэффициенты Фурье функции (3.2), тогда из (2.3), (2.4) находим перемещения и напряжения в заполнителе

$$\frac{2Gu_r}{p_0} = -\frac{2\gamma}{l} \int_0^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n v_n(\xi, r_*) \cos(n\theta)}{\det_n \|a_{ij}\|} \right] \cos(\xi\eta) d\xi \quad (3.3)$$

$$\frac{\sigma_{rr} a_2}{p_0} = -\frac{2}{l} \int_0^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \varepsilon_n(\xi, r_*) \cos(n\theta)}{\det_n \|a_{ij}\|} \right] \cos(\xi\eta) d\xi$$

4. Рассмотрим некоторые частные случаи. Для однослойной оболочки одинакового с внешним несущим слоем радиуса решение получается непосредственно из (1.7) и окончательная формула для определения прогибов имеет вид

$$\frac{2Gw}{p_0} = -\frac{2}{l} \frac{1-\nu}{\kappa} \int_0^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\theta)}{t_4(n, \xi)} \right] \cos(\xi\eta) d\xi \quad (4.1)$$

Если внутренняя поверхность заполнителя не контактирует с несущим слоем (оболочка с пустотелым заполнителем, на внутренней поверхности которого отсутствуют напряжения), то граничные условия записываются в форме

$$\sigma_{rx} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rr} = 0 \quad \text{при } r = a_1 \quad (4.2)$$

Решение для этого случая получается из (3.3), если элементы пятой строки определителей заменить следующими:

$$a_{51} = \frac{m\xi}{\varepsilon_1^2} s_1 + \left[ t_1 \xi^2 + \frac{n(n-1)}{\varepsilon_1^2} \right] s_2, \quad a_{52} = -\frac{m\xi}{\varepsilon_1^2} s_4 + \left[ t_1 \xi^2 + \frac{n(n-1)}{\varepsilon_1^2} \right] s_5$$

$$a_{53} = m_s \xi s_7 + \left[ m_s^2 \xi^2 + \frac{n(n-1)}{\varepsilon_1^2} \right] s_8, \quad a_{54} = m_s \xi s_{10} - \left[ m_s^2 \xi^2 + \frac{n(n-1)}{\varepsilon_1^2} \right] s_{11}$$

$$a_{55} = \frac{n}{\varepsilon_1} \left[ m_s \xi s_7 - \frac{n-1}{\varepsilon_1} s_8 \right], \quad a_{56} = \frac{n}{\varepsilon_1} \left[ m_s \xi s_{10} + \frac{n-1}{\varepsilon_1} s_{11} \right]$$

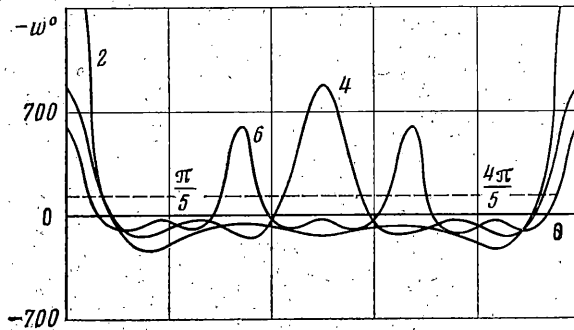
Для случая абсолютно жесткой внутренней оболочки граничные условия имеют вид

$$\sigma_{rx} = \sigma_{r\theta} = u_r = 0 \quad \text{при } r = a_1 \quad (4.3)$$

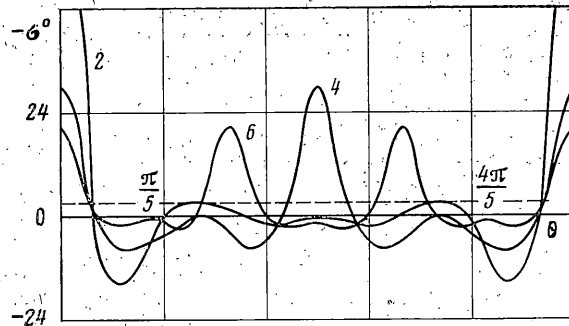
и тогда элементы определителей необходимо заменить таким образом:

$$a_{51} = m \xi s_1 - \frac{n}{\varepsilon_1} s_2, \quad a_{52} = -m \xi s_4 - \frac{n}{\varepsilon_1} s_5, \quad a_{53} = m \xi s_7 - \frac{n}{\varepsilon_1} s_8$$

$$a_{54} = m \xi s_{10} + \frac{n}{\varepsilon_1} s_{11}, \quad a_{55} = \frac{n}{\varepsilon_1} s_3, \quad a_{56} = -\frac{n}{\varepsilon_1} s_{14}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

5. Окончательное решение задачи зависит от скорости движения нагрузки. Поэтому, прежде чем переходить к оригиналам в формуле (3.3), необходимо проанализировать знаменатели подынтегральных выражений и определить критические скорости. В [5] показано, что при определении первой (низшей) критической скорости можно воспользоваться решением соответствующей осесимметричной задачи, поскольку минимумы дисперсионных кривых для осесимметричных и неосесимметричных волн совпадают. Для сравнительно толстого заполнителя можно также воспользоваться приведенной в [3] приближенной формулой, определяющей критическую скорость в трехслойной оболочке

$$c_*^2 = 3(1 + \kappa_c) \rho_* / [2\gamma(1 + \kappa_c + 2\rho_*)] \quad (5.1)$$

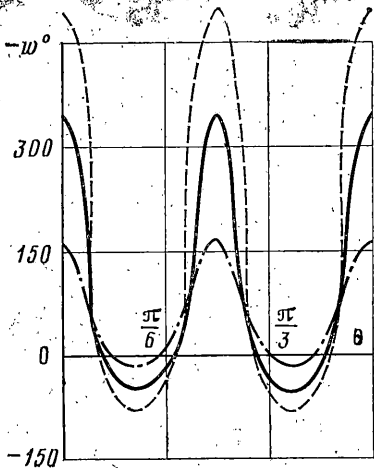
Дальнейшее рассмотрение ограничено докритическими скоростями движения ( $c_0 < c_*$ ). В этом случае несобственные интегралы (3.3) не являются особыми и могут быть найдены по формулам Файлона [7]. Численные расчеты проведены для двух, четырех, шести и восьми сил, при этом использовалось представление дельта-функции в (3.2) конечным рядом

Фурье с улучшенной сходимостью [8]:

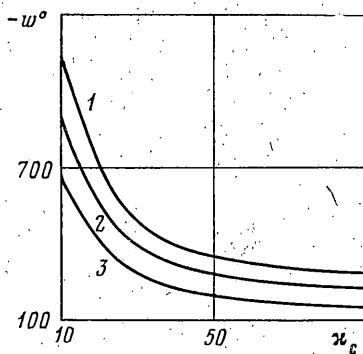
$$\delta(\theta) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) \cos(n\theta) \right] \quad (5.2)$$

С использованием (5.2) коэффициенты Фурье в формулах (3.3) принимают вид:  $a_n = l/2\pi$  при  $n=0$  ( $l=2, 4, 6, 8$ );  $a_n = (lN/n\pi^2) \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)$  при  $n = lj$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ). При  $n \neq lj$  коэффициенты  $a_n = 0$ .

Число членов в конечных рядах Фурье определялось численным экс-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

периментом на ЭВМ и, как показали расчеты для получения требуемой точности 3%; достаточно при всех рассмотренных значениях  $\theta$  и  $l$  положить  $N=121$ .

Распределение безразмерных прогибов внешнего несущего слоя  $w^0 = 2Gw/p_0$  по окружности в сечении  $\eta=0$  для двух, четырех и шести сосредоточенных сил показано на фиг. 1. Расчеты проведены для следующих значений безразмерных параметров:  $\kappa=0,02$ ,  $\nu=\nu_c=0,33$ ,  $\rho_*=12,5$ ,  $\gamma=250$ ,  $\kappa_c=20$ ,  $c_0=0,05$ . Пунктирная прямая построена для соответствующего осесимметричного решения. Согласно выбору  $p_1$ , суммарная нагрузка на оболочку остается для всех случаев неизменной.

Фиг. 2 иллюстрирует изменение контактных напряжений  $\sigma^0 = \sigma_{rr}a_2/p_0$  на внешней границе заполнителя в том же сечении и для тех же значений параметров. Как и в случае оболочки с заполнителем [4], с удалением по окружности от места приложения силы напряжения становятся растягивающими, что свидетельствует о возможности отставания несущего слоя от заполнителя.

На фиг. 3 показано распределение прогибов внешнего несущего слоя по окружности в сечении  $\eta=0$  для восьми сосредоточенных сил, причем сплошная кривая соответствует трехслойной оболочке с одинаковыми несущими слоями, штриховая — построена для оболочки с пустотелым заполнителем, а штрихпунктирная — для оболочки с абсолютно жестким внутренним несущим слоем.

Результаты расчета для осесимметричной кольцевой нагрузки приведены на фиг. 4, где  $\kappa=0,004$ ,  $\nu=\nu_c=0,33$ ,  $\rho_*=12,5$ ,  $c_0=0,1$ ,  $\eta=0$ . Кривые 1, 2, 3 показывают влияние толщины и жесткости заполнителя на прогибы внешней оболочки ( $\gamma=150, 100, 50$ ). Из фиг. 4 видно, что увеличение толщины заполнителя особенно существенно сказывается при сравнительно малых ( $\kappa_c < 50$ ) толщинах заполнителя. Как показали расчеты, аналогичные выводы можно сделать также для контактных напряжений, где с ростом толщины заполнителя напряжения вначале существенно возрастают, а затем для  $\kappa_c > 50$  меняются мало.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Herrmann G., Baker E. H. Response of cylindrical sandwich shells to moving loads.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, No. 3, p. 81–86.— Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк.-ва инж.-механ. Сер. Е., 1967, № 3, с. 1–8.

2. Бурдун Е. Т., Кржечковский П. Г., Попов В. Г. Реакция трехслойной цилиндрической оболочки при осесимметричной подвижной нагрузке.— Тр. Николаев. кораблестроит. ин-та, 1973, вып. 70, с. 88–94.
3. Пожуев В. И. Реакция трехслойной цилиндрической оболочки на действие подвижной нагрузки.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 1, с. 32–39.
4. Пожуев В. И. Реакция цилиндрической оболочки с заполнителем на действие неосесимметричной подвижной нагрузки.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 106–112.
5. Пожуев В. И. Неосесимметричные свободные волны в трехслойных цилиндрических оболочках.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 140–148.
6. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
7. Крылов В. И., Шувльгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966. 370 с.
8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

Запорожье

Поступила в редакцию  
23.VI.1980