

УДК 534.11

ОСОБЕННОСТИ ПРОЯВЛЕНИЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ
И СУБУЛЬТРАГАРМОНИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСОВ В СИСТЕМАХ,
ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ ДУФФИНГА

КРЮКОВ Б. И., СЕРЕДОВИЧ Г. И.

Исследуется поведение субгармонических решений уравнения Дуффинга. При помощи специальной вычислительной процедуры [1] строятся высокоточные приближенные решения, для которых на основании теоремы Урабе [2, 3] устанавливается факт существования точных решений той же качественной структуры в их некоторой достаточно малой окрестности. Анализируются особенности проявления субгармонических и субультрагармонических резонансов в существенно нелинейных системах. Показано, что проблема Лундквиста [4, 5] имеет отрицательное решение. Установлен факт проявления резонансов порядка m/n , когда m и n не являются взаимно простыми числами. Обнаружен эффект неограниченного дробления частоты в существенно нелинейных колеблющихся системах, позволяющий объяснить факты «странного» поведения решений уравнения Дуффинга.

1. В [1] были рассмотрены вопросы, связанные с построением и анализом гармонических решений уравнения Дуффинга: $\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + kx + \beta x^3 = F \cos \omega t$.

Воспользуемся способом [1], который позволяет найти точное решение и установить соответствие между приближенными и точными решениями. С этой точки зрения получаемые при таком подходе результаты являются строгими.

Для исследования субгармонических решений порядка $1/n$ произведем замену в уравнении Дуффинга независимой переменной $\tau = \omega t/n$. Тогда это уравнение можно привести к виду

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= y, \quad dy/d\tau = F_1 \cos n\tau - \varepsilon_1 y - k_1 x - \beta_1 x^3 \\ \varepsilon_1 &= n\varepsilon/\omega, \quad k_1 = n^2 k/\omega^2, \quad \beta_1 = n^2 \beta/\omega^2, \quad F_1 = n^2 F/\omega^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Таким образом, задача нахождения субгармонических решений порядка $1/n$ сводится к нахождению 2π -периодических решений системы (1.1).

Пусть $x_0(\tau)$ — некоторое приближенное периодическое решение системы (1.1), найденное одним из традиционных методов (аналитическим или численным). В качестве $x_0(\tau)$ может быть принято, например, гармоническое решение системы (1.1). Тогда представляется целесообразным введение еще одной замены переменных

$$x = x_0(\tau) + v, \quad y = y_0(\tau) + w, \quad y_0(\tau) = dx_0(\tau)/d\tau \quad (1.2)$$

приводящей систему уравнений (1.1) к виду

$$dv/d\tau = w, \quad dw/d\tau = -(k_1 + 3\beta_1 x_0^2(\tau))v - \varepsilon_1 w - 3\beta_1 x_0(\tau)v^2 - \beta_1 v^3 + \eta(\tau) \quad (1.3)$$

$$\eta(\tau) = F_1 \cos n\tau - \frac{d^2 x_0(\tau)}{d\tau^2} - \varepsilon_1 \frac{dx_0(\tau)}{d\tau} - k_1 x_0(\tau) - \beta_1 x_0^3(\tau)$$

Обозначим через $\Phi(\tau)$ фундаментальную матрицу линейной однородной системы, соответствующей системе (1.3). Пусть

$$\Phi(\tau) = \begin{vmatrix} v_{01} & v_{02} \\ w_{01} & w_{02} \end{vmatrix}, \quad \Phi(0) = E$$

где E — единичная матрица. Отметим, что при определении матрицы $\Phi(\tau)$ представляется целесообразным использовать прямое численное интегрирование линейной однородной системы.

Задача Коши для системы (1.3) с произвольными начальными условиями ($v(0) = V$, $w(0) = W$) может быть сведена к эквивалентной задаче решения системы нелинейных интегральных уравнений вида

$$v(\tau) = H_1(\tau) + v_{01}(\tau)V + v_{02}(\tau)W - \beta_1 \int_0^\tau e^{\beta_1 s} [v_{02}(s)v_{01}(\tau) - v_{01}(s)v_{02}(\tau)] [3x_0(s)v^2 + v^3] ds$$

$$w(\tau) = H_2(\tau) + w_{01}(\tau)V + w_{02}(\tau)W - \beta_1 \int_0^\tau e^{\beta_1 s} [v_{02}(s)w_{01}(\tau) - v_{01}(s)w_{02}(\tau)] [3x_0(s)v^2 + v^3] ds \quad (1.4)$$

$$H_1(s) = \int_0^\tau e^{\beta_1 s} \eta(s) [v_{01}(s)v_{02}(\tau) - v_{02}(s)v_{01}(\tau)] ds$$

$$H_2(s) = \int_0^\tau e^{\beta_1 s} \eta(s) [v_{01}(s)w_{02}(\tau) - v_{02}(s)w_{01}(\tau)] ds$$

Принимая в качестве нулевого приближения решения системы (1.4) $v_0(\tau) = H_1(\tau) + v_{01}(\tau)V + v_{02}(\tau)W$, $w_0(\tau) = H_2(\tau) + w_{01}(\tau)V + w_{02}(\tau)W$ и воспользовавшись методом последовательных приближений, получим для второго приближения

$$v_2(\tau) = \sum_{\substack{i+j \leq 3 \\ i,j=0}} q_{ij}(\tau) V^i W^j = Q(\tau, V, W)$$

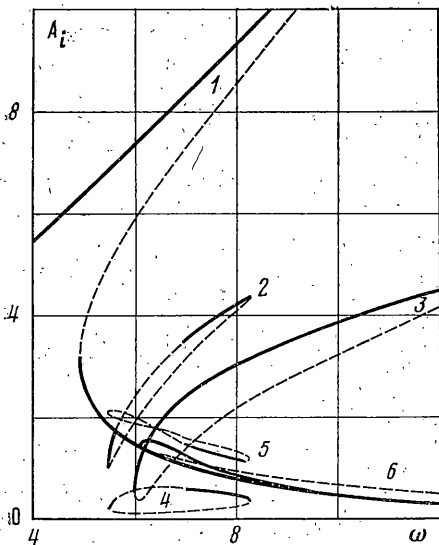
$$w_2(\tau) = \sum_{\substack{i+j \leq 3 \\ i,j=0}} r_{ij}(\tau) V^i W^j = R(\tau, V, W) \quad (1.5)$$

где $q_{ij}(\tau)$ и $r_{ij}(\tau)$ — функции, определяемые в результате невыписываемых здесь интегралов.

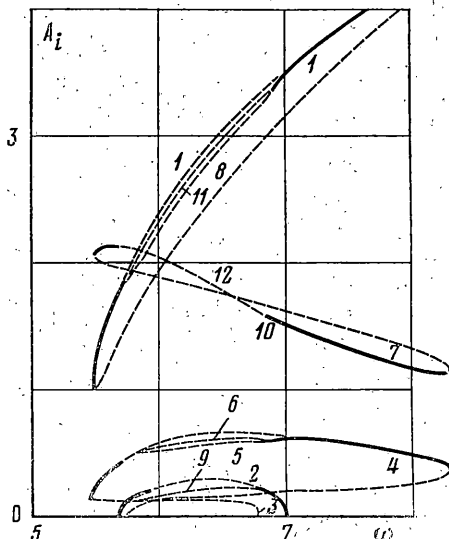
Второе приближение решения системы (1.4) оказывается достаточным для определения параметров наиболее интересных в физическом отношении периодических колебаний. Накладывая на решения условия периодичности, получим систему алгебраических уравнений для определения величин V и W :

$$V = Q(2\pi, V, W), \quad W = R(2\pi, V, W) \quad (1.6)$$

Подставляя значения V и W в (1.5), получим приближенные 2π -периодические решения системы уравнений (1.3). Заметим, что в некоторых случаях для определения параметров субгармонических решений низких порядков ($1/2$, $1/3$) можно пользоваться уравнениями, полученными на основе первого приближения решения системы (1.4).



Фиг. 1



Фиг. 2

Несмотря на определенную громоздкость данной процедуры, ее применение оказывается оправданным при исследовании сложных резонансов в нелинейных колеблющихся системах. Однако полученные таким образом приближенные решения нуждаются еще в строгом установлении факта существования соответствующих им точных решений. Это доказательство проводилось по схеме, предложенной Урабе [2, 3]. При этом были уточнены полученные приближенные решения, рассматриваемые в качестве стартовой аппроксимации, с дальнейшей проверкой выполнимости условий теоремы Урабе. Отметим также, что устойчивость по первому приближению, вычисленная для уточненного решения, удовлетворяющего условиям теоремы Урабе, совпадает с устойчивостью в смысле Ляпунова точного периодического решения.

2. В качестве конкретного объекта исследования было принято уравнение Дуффинга: $x'' + 0,2x' + x + x^3 = 50 \cos \omega t$. При этом частота внешнего воздействия ω принималась в качестве варьируемого параметра. Особенности проявления гармонических решений этого уравнения были описаны в [4]. Для удовлетворения условий теоремы Урабе надо было определять параметры сравнительно большого числа гармоник решения (до 80) и получать решения с невязкой порядка $10^{-7} - 10^{-8}$:

$$r = \max_t |50 \cos \omega t - x''(t) - 0,2x'(t) - x(t) - x^3(t)|$$

На фиг. 1 представлены амплитудно-частотные характеристики A_1 , соответствующие первому гармоническому (кривые 1), а также субгармоническим резонансам порядка $1/2$ (кривая 2) и $1/3$ (кривая 3). При этом на графике изображены только характеристики, относящиеся к гармонической составляющей решения и резонирующей субгармонике. Неустойчивые участки характеристик на графике нанесены штриховыми линиями. Каждой точке на амплитудно-частотной характеристике субгармонических колебаний порядка $1/3$ соответствуют три решения, составляющие цикл. В случае же субгармонических решений порядка $1/2$ каждой точке кривой соответствует два цикла по два решения. Различия между циклами проявляются в знаке постоянной составляющей.

Амплитудно-частотные характеристики, соответствующие субгармоническим резонансам в диссипативных системах, имеют вид замкнутых кривых. При этом характеристики $A_{n/n}$ для $n > 1$, соответствующие гармони-

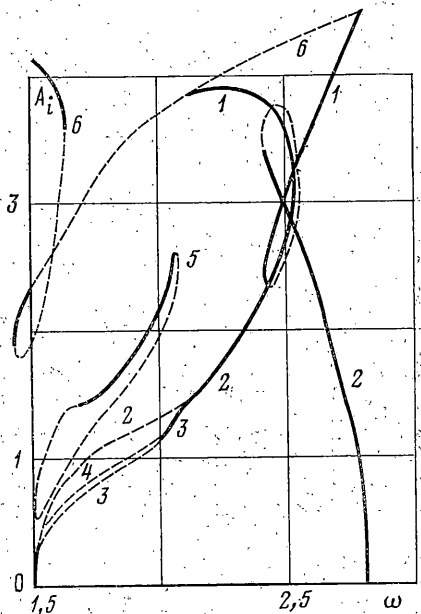
ческой составляющей на частоте возмущения, имеют вид деформированных восьмерок, лежащих выше нисходящей ветви амплитудно-частотной характеристики A_1 (кривая 1) гармонического решения (кривая 4 соответствует $A_{0/2}$, а кривые 5, 6 — $A_{2/2}$, $A_{3/3}$). Отметим также, что устойчивые режимы располагаются на верхних ветвях характеристик $A_{1/2}$ и $A_{1/3}$.

При исследовании субгармонических решений уравнения Дуффинга был обнаружен интересный эффект, не проявляющийся в системах с малой нелинейностью, но, по-видимому, характерный для систем с существенными нелинейностями. Было обнаружено, что существует частотный диапазон, в котором все субгармонические решения, соответствующие резонансу порядка $1/2$, становятся неустойчивыми. Происходящие при потере устойчивости бифуркации связаны с появлением устойчивых субгармонических решений порядка $1/4$ (субультрагармонический резонанс порядка $2/4$) и соответственно с удвоением периода устойчивых субгармонических решений. Амплитудно-частотные характеристики соответствующих решений показаны на фиг. 2 (кривые 1—12 соответствуют: $A_{1/2}$, $A_{1/4}$, $A_{1/8}$, $A_{0/2}$, $A_{0/4}$, $A_{0/8}$, $A_{2/2}$, $A_{2/4}$, $A_{2/8}$, $A_{4/4}$, $A_{4/8}$, $A_{8/8}$).

Дальнейшее изменение частоты возмущения приводит к аналогичным бифуркациям и к последовательному проявлению в системе субультрагармонических резонансов: порядка $4/8$, $8/16$, ... с соответствующим ростом числа устойчивых и неустойчивых периодических решений. К сожалению, возможности ЭВМ Минск-32 не позволили получить субгармонические решения порядка выше $1/16$ такой точности, при которой бы удовлетворялись условия теоремы Урабе, из-за быстрого возрастания числа требующих учета гармоник решения. Однако нет никаких оснований предполагать, что бифуркации описанного выше типа происходят только конечное число раз. Отметим, что уменьшение величины амплитуды возмущающей силы (например, до значения $F=10$) при сохранении неизменными остальных параметров уравнения Дуффинга приводит к исчезновению описанного выше эффекта.

Было также обнаружено, что эффект неограниченного дробления частоты может проявляться и в других частотных диапазонах. На фиг. 3 представлены амплитудно-частотные характеристики периодических решений в области второго и третьего ультрагармонических резонансов (кривые 1—5 соответствуют: A_1 , A_2 , $A_{4/2}$, $A_{8/4}$, $A_{7/3}$). При этом на фиг. 3 для гармонических решений приведены амплитудно-частотные характеристики, относящиеся к основной гармонике, а для сложных резонансов, соответственно, к резонирующим гармоникам (кривая 6 соответствует A_1 в случае симметричного решения).

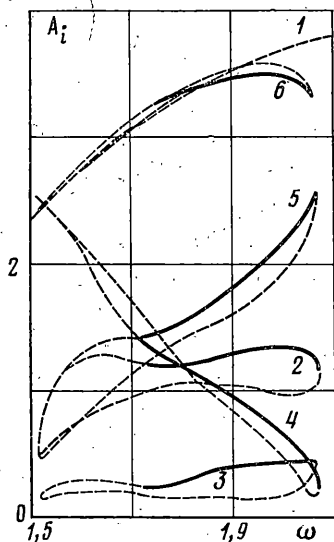
Ранее в [1] было показано, что в рассматриваемой системе ярко проявляется второй ультрагармонический резонанс. При этом симметричное гармоническое решение теряет устойчивость и появляются парные несимметричные гармонические решения. При дальнейшем уменьшении частоты возмущения происходит потеря устойчивости всеми гармоническими решениями и на сравнительно большом частотном интервале физически реализуемые гармонические колебания в рассматриваемой системе отсутствуют.



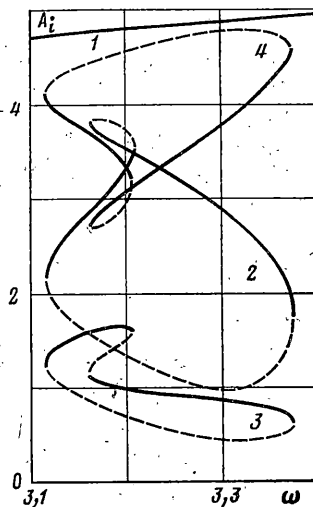
Фиг. 3

Анализ показал, что потеря устойчивости несимметричными гармоническими решениями связана с бифуркацией, в результате которой появляются две пары устойчивых периодических решений с удвоенным периодом (проявляется субультрагармонический резонанс порядка $4/2$). Аналогичный эффект имеет место и в левой части частотного диапазона, в котором проявляется второй ультрагармонический резонанс. Дальнейшее изменение частоты приводит к последовательному проявлению в системе субультрагармонических резонансов порядка $8/4$, $16/8$, $32/16$, ... с соответствующим ростом числа устойчивых и неустойчивых периодических решений.

Можно предполагать, что эффект дробления частоты в этой области каким-то образом связан с появлением в системе субгармонических реше-



Фиг. 4



Фиг. 5

ний порядка $1/3$ (субультрагармонический резонанс порядка $7/3$). Отметим также, что с ростом порядка субгармонических решений частотные диапазоны, в которых данные решения устойчивы, быстро уменьшаются. В первом приближении можно считать, что такое уменьшение происходит по закону геометрической прогрессии.

Эффект неограниченного дробления частоты позволяет объяснить обнаруженные ранее [4] в данном частотном диапазоне факты «странного» поведения решений уравнения Дуффинга. Проявляющаяся при этом «стохастичность» решений [6] объясняется появлением в системе периодических колебаний с большими периодами. Известно, что идентифицировать такие решения и, в частности, отличить их от почти-периодических решений крайне сложно, а в физических экспериментах, зачастую, и просто невозможно. Установление факта многократного дробления частоты позволяет внести некоторую ясность в крайне запутанный в настоящее время вопрос о «странном» поведении существенно нелинейных колеблющихся систем.

Отметим также некоторые особенности проявления аналогичных эффектов, обнаруженные при исследовании субультрагармонического резонанса порядка $7/3$. Соответствующие амплитудно-частотные характеристики (A_1 , $A_{1/3}$, $A_{5/3}$, $A_{7/3}$, $A_{9/3}$, $A_{3/3}$ соответствуют кривым 1–6) приведены на фиг. 4. При потере устойчивости решениями, соответствующими резонансу порядка $7/3$, сначала появляются несимметричные субгармонические решения (субультрагармонический резонанс порядка $8/3$). Дальнейшее

изменение частоты возмущения ω приводит к многократным бифуркациям, связанным с удвоением периода решений, и последовательному проявлению резонансов порядка $1/6$, $32/12$, Эффект дробления частоты во всех отмеченных выше случаях пропал при уменьшении амплитудного значения внешнего воздействия F .

В то же время для рассматриваемой системы эффекты дробления частоты не были обнаружены при изучении резонансов порядка $1/3$ и $5/3$. На фиг. 5 показаны амплитудно-частотные характеристики, относящиеся к субультрагармоническому резонансу порядка $5/3$ (кривые 1–4 соответствуют: A_1 , $A_{5/3}$, $A_{1/3}$, $A_{3/3}$). Отметим, что в этом случае число соответствующих субгармонических решений изменяется от шести до двенадцати.

Содержащиеся в [1] и приведенные выше результаты показывают, что поведение существенно нелинейных систем может качественно отличаться от поведения систем с малыми нелинейностями. В рассмотренном конкретном случае амплитудно-частотные характеристики оказываются состоящими из счетного числа ветвей. В системе могут проявляться субгармонические решения любых порядков. Это, в частности, свидетельствует об отсутствии связи между наибольшими показателями степени нелинейных членов, входящих в уравнение, и порядками возбуждаемых субгармонических решений (проблема Лундквиста). В системе могут проявляться резонансы порядка m/n , когда m и n не являются взаимно простыми числами. До последнего времени считалось невозможным существование таких решений. Переход к широкому практическому использованию существенно нелинейных колеблющихся систем настоятельно требует проведения углубленных исследований физики их поведения. Отметим также, что некоторые из описанных выше эффектов могут быть использованы, в частности при создании вибрационной техники технологического назначения.

Авторы искренне признательны А. Ю. Ишлинскому за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крюков В. И., Середович Г. И. Исследование гармонических решений уравнения Дуффинга. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 143–151.
2. Urabe M. Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. — Arch. Rational Mech. Analysis, 1965, v. 20, № 2, p. 120–152. — Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. № 3, с. 3–34.
3. Urabe M., Reiter A. Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin's procedure. — J. Math. Anal. and Appl., 1966, v. 14, № 1, p. 107–140.
4. Lundquist S. Subharmonic oscillations in a nonlinear system with positive damping. — Quart. Appl. Math., 1955, v. 29, № 3, p. 13.
5. Kronauer R. E., Musa S. A. Necessary conditions for subharmonic and superharmonic oscillations in weakly-nonlinear systems. — Quart. Appl. Math., 1966, v. 24, № 2, p. 153–160.
6. Неймарк Ю. И. О возникновении стохастичности в динамических системах. — Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4, с. 602–607.

Москва

Поступила в редакцию
23.07.1980