

УДК 533.6.013.42

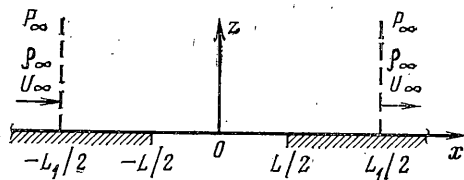
ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА
НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОТОКЕ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ИЛЬГАМОВ М. А., САБИТОВ М. З.

В линейной постановке рассматривается плоская задача о взаимодействии упругой пластины, с одной стороны обтекаемой безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Поле течения занимает всю полуплоскость. Наряду с решением исходной задачи предлагается приближенный подход, где вводятся фиктивные границы в поле течения. Это дает возможность применить аппарат рядов Фурье вместо методов интегральных преобразований, сопряженных с большими математическими трудностями. Предложенный приближенный подход, имея большую точность, принципиально упрощает решение и может быть с успехом применен при рассмотрении более сложных задач. Он представляет интерес также при разработке алгоритмов решений задач в дискретных методах, в которых всегда рассматривается ограниченное поле течения.

Поведение упругих пластин в потоке сжимаемой жидкости изучено довольно полно. При этом основное внимание уделялось случаю больших сверхзвуковых скоростей движения, допускающему значительные упрощения. Состояние исследований отражено в [4-6]. По теории взаимодействия пластин с дозвуковым потоком имеется сравнительно мало результатов. О них можно судить по статьям [7-15].

1. **Постановка задачи.** Упругая пластина прикреплена по краям к абсолютно жестким протяженным диафрагмам и находится с ними в одной плоскости (фиг. 1). На бесконечном удалении от пластины поле течения



Фиг. 1

жидкости однородно и определяется заданием скорости, давления и плотности U_∞ , P_∞ , ρ_∞ . Предполагается, что в полости под пластиной поддерживается постоянное давление, равное P_∞ , поэтому в отсутствие возмущений перепад давления с двух сторон пластины равен нулю. В невозмущенном состоянии потенциал скорости равен $\phi^0 = U_\infty x$, давление $P^0 = P_\infty$, прогиб пластины $w^0 = 0$.

Плоская динамическая задача об устойчивости пластины в потоке несжимаемой жидкости относительно возмущений потенциала ϕ и функции прогиба w сводится к решению следующей системы уравнений и граничных условий:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad P = -\rho_\infty (\lambda \phi + U_\infty \partial \phi / \partial x) \quad (1.1)$$

$$\text{grad } \phi = 0 \quad (\sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty) \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} U_\infty \partial w / \partial x + \lambda w & (|x| \leq L/2) \\ 0 & (|x| > L/2) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$D\partial^4 w/\partial x^4 + \rho_0 h \lambda^2 w = \rho_\infty (\lambda \varphi + U_\infty \partial \varphi / \partial x) \quad (z=0) \quad (1.4)$$

Здесь D , h , ρ_0 — изгибная жесткость, толщина и плотность материала пластины. Временной множитель $\exp(\lambda t)$ всюду опущен. К системе (1.1) — (1.4) должны быть добавлены условия закрепления пластины.

Для нахождения однозначного решения плоской задачи Неймана (1.1) — (1.3) необходимо воспользоваться дополнительным условием о равенстве нулю объемного расхода жидкости через граничный контур, охватывающий верхнюю полуплоскость [16]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(x=-\infty)}{\partial x} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi(z=0)}{\partial z} dx + \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(x=\infty)}{\partial x} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi(z=\infty)}{\partial z} dx = 0$$

Отсюда в силу (1.2), (1.3)

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left(\lambda w + U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (1.5)$$

Это условие накладывает дополнительное ограничение на один варьируемый параметр в аппроксимации функции прогиба в виде ряда по собственным формам. Если, например, принять в случае шарнирного опирания краев пластины ($w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$)

$$w = \sum_{k=1,3,\dots}^T W_k \cos \frac{k\pi x}{L} + \sum_{m=2,4,\dots}^{T-1} W_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (T \geq 3) \quad (1.6)$$

то применение (1.5) дает

$$w = \sum_{k=1,3,\dots}^{T-2} W_k \left[\cos \frac{k\pi x}{L} - (-1)^{1/2(k-T)} \frac{T}{k} \cos \frac{T\pi x}{L} \right] + \sum_{m=2,4,\dots}^{T-1} W_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (1.7)$$

2. Решение исходной задачи. Уравнение (1.1) при применении интегрального преобразования Фурье

$$\Phi(\mu, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, z) \exp(i\mu x) dx$$

с учетом (1.2) и вытекающего из него условия $\varphi = C_1 = 0$ при $\sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$ принимает вид

$$d^2 \Phi / dz^2 - \mu^2 \Phi = 0 \quad (2.1)$$

Решение (2.1), также удовлетворяющее (1.2), запишется в форме

$$\Phi = A(\mu) \exp(-|\mu|z) \quad (2.2)$$

Согласно (1.3)

$$A = -\frac{1}{|\mu|} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\lambda w + U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} \right) \exp(i\mu x) dx \quad (2.3)$$

Функции φ и $\partial \varphi / \partial x$ находятся из обратного преобразования

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu) \exp[-i\mu x - |\mu|z] d\mu, \dots \quad (2.4)$$

Подстановка (1.7), (2.3), (2.4) в уравнение (1.4) и интегрирование его по методу Бубнова — Галеркина на интервале $(-L/2, L/2)$ приводит к системе уравнений относительно амплитуд перемещения пластины

$$\begin{aligned}
 & W_k(k^4 + \chi^2) - T^2(T^4 + \chi^2) \sum_{q=1,3,\dots}^{T-2} (-1)^{1/2(h+q)} W_q \frac{1}{kq} = \\
 & = -2\alpha^2 \sum_{q=1,3,\dots}^{T-2} (-1)^{1/2(q+h)} W_q \left[qk J_{qh} - T^2 \frac{k}{q} J_{hT} - T^2 \frac{q}{k} J_{qT} + \frac{T^4}{qk} J_{TT} \right] + \\
 & + \sqrt{\pi} \beta \alpha \chi \sum_{p=2,4,\dots}^{T-1} (-1)^{1/2(h+p-1)} p W_p \left[k N_{pk} - \frac{T^2}{k} N_{pT} \right] + \\
 & + \frac{\pi}{2} \beta \chi^2 \sum_{q=1,3,\dots}^{T-2} (-1)^{1/2(h+q)} W_q \left[kq M_{hq} - T^2 \frac{k}{q} M_{Tq} - T^2 \frac{q}{k} M_{qT} + \frac{T^4}{kq} M_{TT} \right]
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 & W_m(m^4 + \chi^2) = 2\alpha^2 \sum_{p=2,4,\dots}^{T-1} (-1)^{1/2(m+p)} p m W_p K_{pm} - \\
 & - \sqrt{\pi} \beta \alpha \chi \sum_{q=1,3,\dots}^{T-2} (-1)^{1/2(q+m-1)} m W_q \left(q N_{qm} - \frac{T^2}{q} N_{mT} \right) - \\
 & - \frac{\pi}{2} \beta \chi^2 \sum_{p=2,4,\dots}^{T-1} (-1)^{1/2(m+p)} m p W_p T_{pm} \quad (h=1,2,\dots; m=2,4,\dots) \\
 & \alpha = \frac{U_\infty L}{\pi} \left(\frac{\rho_\infty L}{\pi D} \right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{\rho_\infty L}{\rho_0 h}, \quad \chi = \frac{\lambda}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{D}{\rho_0 h} \right)^{1/2}, \quad \nu = \frac{\mu L}{2}
 \end{aligned}$$

$$\frac{J_{sj}}{K_{sj}} = \int_0^\infty \Delta_{sj} \nu^2 \frac{\cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} d\nu, \quad \frac{M_{sj}}{T_{sj}} = \int_0^\infty \Delta_{sj} \frac{\cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} d\nu$$

$$N_{sj} = \int_0^\infty \Delta_{sj} \nu \sin(2\nu) d\nu, \quad \Delta_{sj} = \left\{ \nu \left[\left(\frac{s\pi}{2} \right)^2 - \nu^2 \right] \left[\left(\frac{j\pi}{2} \right)^2 - \nu^2 \right] \right\}^{-1}$$

Рассмотрим взаимодействие k -й и $(k+1)$ -й форм колебания оболочки. Для этого достаточно в системе (2.5) положить $q \rightarrow k$; $m, p \rightarrow k+1$; $T \rightarrow k+2$ (k — нечетное). Нетривиальное решение системы определится из характеристического уравнения

$$\{k^4 + (k+2)^2 k^{-2} + \chi^2 [1 + (k+2)^2 k^{-2} + \beta S_1] - \alpha^2 S_2\} \{ (k+1)^4 + \chi^2 [1 + \beta S_3] - \alpha^2 S_4 \} + \alpha^2 \beta \chi^2 S_5 = 0 \tag{2.6}$$

$$S_1 = 1/2 \pi (k^2 M_{kk} - 2(k+2)^2 M_{k, k+2} + (k+2)^4 k^{-2} M_{k+2, k+2}) \tag{2.7}$$

$$S_2 = 2(k^2 J_{kk} - 2(k+2)^2 J_{k, k+2} + (k+2)^4 k^{-2} J_{k+2, k+2})$$

$$S_3 = 1/2 \pi (k+1)^2 T_{k+1, k+1}, \quad S_4 = 2(k+1)^2 K_{k+1, k+1}$$

$$S_5 = \pi (k+1)^2 (k N_{k, k+1} - (k+2)^2 k^{-1} N_{k+1, k+2})^2$$

Интегралы $M_{hk}, \dots, N_{k+1, k+2}$ выражаются через элементарные функции, интегральные синусы и косинусы [17]:

$$M_{hk} = \frac{8}{k^4 \pi^4} \left\{ -C - 2 \ln(v)_{v \rightarrow 0} + \ln \frac{k\pi}{4} - 1 - \text{ci}(k\pi) + \frac{k\pi}{2} \text{si}(k\pi) \right\}$$

$$M_{k, k+2} = \frac{8}{k^2 (k+2)^2 \pi^4} \left\{ -C - 2 \ln(v)_{v \rightarrow 0} - \ln 2 + \frac{k^2}{4(k+1)} \left(\text{ci}[(k+2)\pi] - \ln \frac{(k+2)\pi}{2} \right) - \frac{(k+2)^2}{4(k+1)} \left(\text{ci}(k\pi) - \ln \frac{k\pi}{2} \right) \right\}$$

$$M_{k+2, k+2} = \frac{8}{(k+2)^4 \pi^4} \left\{ -C - 2 \ln(v)_{v \rightarrow 0} + \ln \frac{(k+2)\pi}{4} - 1 - \text{ci}[(k+2)\pi] + \frac{(k+2)\pi}{2} \text{si}[(k+2)\pi] \right\}$$

$$J_{hk} = \frac{1}{k^2 \pi^2} \{-2 + k\pi \text{si}(k\pi)\}, \quad J_{k, k+2} = -\frac{1}{2(k+1)\pi^2} \left\{ \ln \frac{k+2}{k} - \text{ci}[(k+2)\pi] + \text{ci}(k\pi) \right\}, \quad J_{k+2, k+2} = \frac{1}{(k+2)^2 \pi^2} \{-2 + (k+2)\pi \text{si}[(k+2)\pi]\},$$

$$T_{k+1, k+1} = \frac{8}{(k+1)^4 \pi^4} \left\{ C + \ln[(k+1)\pi] - \text{ci}[(k+1)\pi] + \frac{(k+1)\pi}{2} \text{si}[(k+1)\pi] \right\}$$

$$K_{k+1, k+1} = \frac{1}{(k+1)\pi} \text{si}[(k+1)\pi]$$

$$N_{k, k+1} = \frac{8}{(2k+1)\pi^3} \left\{ \frac{1}{k+1} \text{si}[(k+1)\pi] + \frac{1}{k} \text{si}(k\pi) \right\}$$

$$N_{k+1, k+2} = -\frac{8}{(2k+3)\pi^3} \left\{ \frac{1}{k+2} \text{si}[(k+2)\pi] + \frac{1}{k+1} \text{si}[(k+1)\pi] \right\}, \quad C=0,577\dots$$

При $\chi=0$ из (2.6) получаются следующие выражения для α^2 , характеризующие статическую потерю устойчивости (дивергенцию):

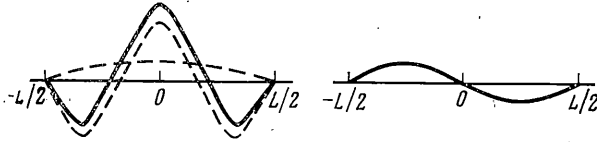
$$\alpha_1^2 = \frac{1}{S_2} \left[k^4 + \frac{(k+2)^6}{k^2} \right], \quad \alpha_2^2 = \frac{1}{S_4} (k+1)^4 \quad (2.8)$$

Непосредственные расчеты показывают, что минимальные значения α_1^2 , α_2^2 реализуются при $k=1$. При этом $\alpha_{1*}^2=27,06$; $\alpha_{2*}^2=8,86$. Первому значению соответствует форма изгиба пластины в виде $\cos(\pi x/L) + 3 \cos(3\pi x/L)$, а второму — в виде $\sin(2\pi x/L)$ (фиг. 2). Это следует из (1.7) при $k=1$ ($m=2$, $T=3$). Таким образом, из общего решения динамической задачи с использованием условия (1.5) получается, что статическая потеря устойчивости происходит с образованием двух полуволн.

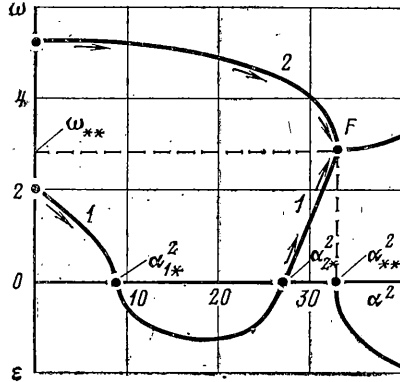
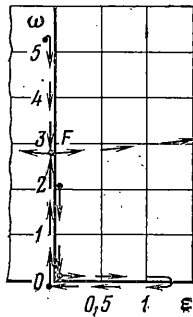
Условие возникновения флаттера имеет вид $B_2^2 - 4B_4B_0 = 0$, а соответствующая безразмерная частота колебаний равна

$$\begin{aligned} \omega &= -i\chi = \sqrt{B_2/2B_4}, \quad B_4 = [1 + (k+2)^2 k^{-2} + \beta S_1] [1 + \beta S_3] \\ B_2 &= [(k+1)^4 - \alpha^2 S_4] [1 + (k+2)^2 k^{-2} + \beta S_1] + \\ &\quad + [k^4 + (k+2)^6 k^{-2} - \alpha^2 S_2] [1 + \beta S_3] + \alpha^2 \beta S_5 \\ B_0 &= [k^4 + (k+2)^6 k^{-2} - \alpha^2 S_2] [(k+1)^4 - \alpha^2 S_4] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Вычисления показывают, что минимальное значение $\alpha^2 = \alpha_{**}^2$ достигается при $k=1$. На фиг. 3 слева показан путь продвижения корней $\chi =$



Фиг. 2



Фиг. 3

$= \varepsilon + i\omega$ характеристического уравнения (2.6) при $k=1$ в координатной системе ε, ω в зависимости от α^2 (для верхней полуплоскости). На фиг. 3 справа дан соответствующий график изменения $\chi(\alpha^2)$. Ветвь 1, соответствующая частоте колебаний по формуле $\sin(2\pi x/L)$, убывает от 2,04 при $\alpha^2=0$, до нуля при $\alpha^2=8,86$ ($\varepsilon=0$); на участке $8,86 \leq \alpha^2 \leq 27,06$ частота $\omega=0$, а $\varepsilon \neq 0$; при $\alpha^2 > 27,06$ снова $\omega \neq 0$, $\varepsilon=0$.

Ветвь 2, соответствующая частоте колебаний по форме $\cos(\pi x/L) + 3 \cos(3\pi x/L)$, в свою очередь убывает от значения 5,20 при $\alpha^2=0$. В точке F , где эти ветви встречаются, имеет место слияние значений частот двух форм колебаний. При $\alpha^2 > \alpha_{**}^2$ получаются две пары комплексно-сопряженных корней, действительные части двух из них положительны. Из сказанного следует, что имеет место флаттер, обусловленный взаимодействием форм $\cos(\pi x/L) + 3 \cos(3\pi x/L)$ и $\sin(2\pi x/L)$. Анализ результатов дан в п. 4.

3. Приближенное решение. В исходной задаче область течения занимает полуплоскость $0 \leq z < \infty, |x| < \infty$. В приближенном решении рассматривается область $0 \leq z < \infty, |x| \leq L_1/2$ с фиктивными границами $x = \pm L_1/2$ (фиг. 1). Взамен (1.2) вводятся условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (x = \pm L_1/2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z \rightarrow \infty) \quad (3.1)$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее (3.1), имеет вид

$$\varphi = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} a_s \exp\left(-\frac{s\pi z}{L_1}\right) \sin \frac{s\pi x}{L_1} + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n\pi z}{L_1}\right) \cos \frac{n\pi x}{L_1} \quad (3.2)$$

Подстановка (1.7) при $T=3$ и (3.2) в условие (1.3) и интегрирование его по методу Бубнова — Галеркина на интервале $(-L_1/2, L_1/2)$ дает

$$\begin{aligned} \pi a_s &= 4U_\infty l (A_{1s} + 9A_{3s}) W_1 + (8\lambda L / \pi s) G_{2s} W_2 \\ \pi b_n &= 8U_\infty l G_{2n} W_2 - (4\lambda L / \pi n) (A_{1n} + 9A_{3n}) W_1 \\ A_{kj} &= (-1)^{1/2(k-1)} \cos\left(\frac{j\pi l}{2}\right) \frac{1}{k^2 - j^2 l^2} \\ G_{2j} &= -\sin\left(\frac{j\pi l}{2}\right) \frac{1}{4 - j^2 l^2}, \quad l = \frac{L}{L_1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

В результате интегрирования (1.4) по методу Бубнова — Галеркина на интервале $(-L/2, L/2)$ с учетом (1.7) при $T=3$, (3.2) и (3.3) получаем систему двух однородных уравнений относительно амплитуд перемещения. Характеристическое уравнение этой системы по форме совпадает с (2.6) при $k=1$ и отличается от него лишь коэффициентами S_1, \dots, S_5 . Обозначим их через S_m' , причем

$$\begin{aligned} S_1' &= \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (A_{1n} + 9A_{3n})^2, \quad S_4' = \frac{64l^2}{\pi^2} \sum_{n=2,4}^{\infty} n G_{2n}^2 \\ S_2' &= \frac{16l^2}{\pi^2} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} s (A_{1s} + 9A_{3s})^2, \quad S_3' = \frac{64}{\pi^3} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{s} G_{2s}^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$S_5' = \frac{1024l^2}{\pi^5} \left[\sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} G_{2s} (A_{1s} + 9A_{3s}) + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} G_{2n} (A_{1n} + 9A_{3n}) \right]^2$$

Справедливо следующее утверждение. Пусть функция φ (3.2) имеет на каждом конечном интервале конечное число точек разрыва и абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. Тогда при удалении фиктивных границ от пластины ($L_1 \rightarrow \infty, l \rightarrow 0$) приближенное характеристическое уравнение задачи совпадает с точным (2.6), в котором должно быть принято $k=1$.

Действительно, если в S_m' ($m=1, 2, \dots, 5$) положить $v=j\pi l/2, \Delta v=\pi l$ (шаг по j равен двум) и, устремляя l к нулю, заменить суммы на интегралы с пределами от нуля до ∞ , то S_m' совпадут с S_m , что и доказывает утверждение. Справедливость такого перехода от суммирования к интегрированию следует из теоремы [18], согласно которой при тех же условиях, наложенных на функцию φ , заменой $\mu=j\pi/L_1, \Delta\mu=2\pi/L_1$ при $L_1 \rightarrow \infty$ (ясно, что это эквивалентно замене $v=j\pi l/2, \Delta v=\pi l$ при $l \rightarrow 0$, так как $v=\mu L/2$) соотношение (3.2) можно перевести в (2.4) и, следовательно, получить характеристическое уравнение (2.6).

4. Анализ сходимости решения. Из изложенного следует, что величины $\varepsilon_m = |S_m' - S_m|$ могут служить критерием для оценки точности приближенного способа.

В табл. 1 приведены численные значения коэффициентов S_m' из (3.4) в зависимости от $l=L/L_1$. В нижней строке приведены соответствующие значения S_m исходной задачи по (2.7). При суммировании рядов, входящих в S_m' , последовательно вычислялись частичные суммы; счет прекращался при условии, когда последующая и предыдущая частичные суммы совпадали до семи значащих цифр. Следует отметить, что сходимость рядов ухудшается с уменьшением l . Как следует из табл. 1, уже при $l=1$

Таблица 1

l	S_1'	S_2'	S_3'	S_4'	S_5'
1	1,376	28,000	0,258	2,000	8,256
0,5	1,346	26,976	0,229	1,811	8,223
0,25	1,323	26,972	0,224	1,806	8,221
0	1,323	26,972	0,222	1,806	8,221

Таблица 2

l	α^{2*}	α^{2**}	α^{2**}	ω^{**}
1	26,07	8,00	29,89	2,50
0,5	27,06	8,84	32,86	2,79
0,25	27,06	8,86	32,89	2,84
0	27,06	8,86	32,93	2,85

(фиктивные границы проходят по краям пластины) значения коэффициентов S_m' близки к значениям S_m в исходной задаче. При $l=0,25$ значения этих коэффициентов практически совпадают.

В табл. 2 приведены значения величин α_{1*}^2 , α_{2*}^2 , α_{**}^2 , ω_{**} по формулам (2.8), (2.9) в зависимости от l . При этом вместо S_m подставлены S_m' , а $k=1$. Нижняя строка, как и в табл. 1, соответствует результатам исходной задачи.

В расчетах принималось $\rho_\infty/\rho_0=1/7,8$, $h/L=0,01$. Как видно, при $l=0,25$ результаты приближенного решения практически совпадают с результатами исходной задачи. Даже при $l=1$ отклонение невелико; для значения критической скорости потока оно будет еще меньше, так как $U_\infty \sim \alpha$. Таким образом, при удалении фиктивных границ от краев пластины на расстояние ее полутора длин ($l=0,25$) результаты приближенного и точного решений практически совпадают. Как отмечалось, с уменьшением l сходимость рядов, входящих в S_m' , ухудшается, что снижает качество приближенного подхода. Если ограничиться в первом приближении случаем $l=1$, то расчет является весьма простым: в рядах, входящих в коэффициенты S_2' , S_4' , S_5' , остаются лишь по одному члену, а ряды, входящие в S_1' и S_3' , сходятся весьма быстро. Значения S_m' для этого случая равны

$$S_1' = \frac{1024}{\pi^3} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{n^3}{(1-n^2)^2(9-n^2)^2}, \quad S_2' = 28$$

$$S_3' = \frac{64}{\pi^3} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{s(4-s^2)^2}, \quad S_4' = 2, \quad S_5' = \frac{256}{\pi^3}$$

Если в рядах для S_1' и S_3' ограничиться, например, первыми тремя членами, то получим $\alpha_{**}^2=29,90$, $\omega_{**}=2,51$. Эти результаты очень близки к соответствующим значениям, приведенным в табл. 2 для $l=1$.

5. Зависимость решения от условия (1.5). Как следует из (2.9), наименьшее значение гидроупругого параметра $\alpha^2 = \rho_\infty U_\infty^2 L^3 / (\pi^3 D)$, при достижении которого изогнутое по двум полуволнам положение пластин является состоянием равновесия, равно $\alpha_{2*}^2 = 8,86$. Однако в формулировке задачи (1.1) – (1.5) статический случай $\lambda=0$ требует дополнительного рассмотрения.

В силу закрепления пластины по краям ($w=0$ при $x=\pm L/2$) условие

(1.5) в статической задаче выполняется автоматически

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial w}{\partial x} dx = w|_{-L/2}^{L/2} = 0$$

Поэтому функция статического прогиба должна иметь вид (1.6), а не (1.7). Тогда выкладки, аналогичные приведенным в п. 2, дают вместо (2.6) ($\lambda=0$):

$$[k^4 - 2k^2 J_{hh} \alpha^2] [(k+1)^4 - S_4 \alpha^2] = 0 \quad (5.1)$$

Минимальные значения α^2 реализуются по-прежнему при $k=1$. При этом из (5.1) следует $\alpha_{1*}^2 = 1,29$, $\alpha_{2*}^2 = 8,86$. Первому значению соответствует форма прогиба пластины с одной полуволной, а второму — по двум полуволнам. Следовательно, критическая скорость дивергенции равна

$$U_{\infty} = 1,14 \sqrt{\pi^3 D / (\rho_{\infty} L^3)} \quad (5.2)$$

Это согласуется с результатами [8, 11, 12, 14, 15].

Соответствующее решение задачи с введением фиктивных границ (1.1), (1.3), (1.4), (3.1) дает

$$\left[k^4 - \left(\frac{4l}{\pi} \right)^2 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} s A_{1s}^2 \alpha^2 \right] [(k+1)^4 - S_4' \alpha^2] = 0 \quad (5.3)$$

Выражения для A_{1s} , S_4' берутся согласно (3.3) и (3.4). Отсюда для значений $l=1; 0,5; 0,25$ получаются соответственно $\alpha_{1*}^2 = 1,00; 1,23; 1,28$. При этом значения α_{2*}^2 те же, что и в табл. 2. Таким образом, и в этом решении с удалением фиктивных границ от пластины имеет место приближение к значению 1,29 снизу.

Если в динамической задаче не принимать во внимание условие (1.5) и функцию w представить в виде (1.6), то, так же как в п. 2, получаются две системы однородных уравнений относительно амплитуд различных гармоник. Они отличаются от (2.5) тем, что в них отсутствуют члены, имеющие в (2.5) множителем величину T в явном виде. В первой из полученных систем содержатся члены, обращающиеся в бесконечность ввиду того, что они имеют множителями величины $M_{hq} = \infty$ (если ограничиться рассмотрением двух первых гармоник, необходимо положить $k=q=1$). Однако в [11, 12] множитель, соответствующий M_{11} , имеет конечное значение.

В указанных работах для решения задачи используется метод источников, при этом условие (1.5) не ставится. Потенциал возмущения скорости в [12] имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left(U_{\infty} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{x=\xi} \ln \left[\frac{(x-\xi)^2 + z^2}{(L/2)^2} \right] d\xi \quad (5.4)$$

Если в системе (3.4) указанной работы перейти к нашим обозначениям, то вместо $M_{11} = \infty$ получается величина $5,62/\pi^3$. В (5.4) обезразмеривание координат под знаком логарифма проведено делением на половину длины пластины $L/2$. Если это обезразмеривание проводить делением на полную длину пластины (как в [11]), то выкладки, аналогичные приведенным в [12], приводят к значению $9,05/\pi^3$ (решение этой задачи приближенным методом, предложенным в [11], дает значение $8,97/\pi^3$).

Другое обезразмеривание, например деление на двойную длину пластины, приводит к новому, еще большему значению указанного коэффициента и т. д. Что касается всех остальных членов системы (3.4) из [12], то они не зависят от того, как проводится обезразмеривание под знаком ло-

гарифма, и совпадают с коэффициентами уравнений, полученными в данной работе с использованием метода интегральных преобразований.

Таким образом, имеет место однозначность решения. Решение, полученное методом интегральных преобразований, соответствует случаю, когда в качестве обезразмеривающей величины используется величина $R \rightarrow \infty$ (тогда $\varphi \rightarrow 0$ при $\sqrt{x^2+z^2} \rightarrow R \rightarrow \infty$). Ввиду того что $M_{11} = \infty$, решение полученной системы уравнений обладает неопределенностью.

Введение условия (1.5) обеспечивает получение определенного единственного решения как при использовании метода интегральных преобразований (коэффициент, соответствующий M_{11} , при этом равен 0,842), так и метода источников. Действительно, функция φ в (5.4) будет при этом одной и той же при любых значениях обезразмеривающей константы под знаком логарифма, так как

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left(U_{\infty} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{x=\xi} \ln b^2 d\xi = 0$$

в силу условия (1.5). Вследствие этого будут однозначными и коэффициенты системы (3.4) [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961, 339 с.
2. *Григорьев Э. И., Лампер Р. Е., Шандаров Л. Г.* Флаттер панелей и оболочек.— В кн.: Итоги науки. Механика. 1963. М.: ВИНТИ, 1965, с. 34—90.
3. *Dowell E. H.* Panel flutter: A review of the aeroelastic stability of plates and shells.— AIAA Journal, 1970, v. 8, No. 3, p. 385—399.— Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 3, с. 3—23.
4. *Dowell E. H.* Aeroelasticity of plates and shells. Leyden: Noordhoff Internat. Publ. 1975. 439 p.
5. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
6. *Новицкий Ю. Н.* Флаттер пластин и оболочек.— В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978, с. 67—122.
7. *Dugundji J., Dowell E., Perkin B.* Subsonic flutter of panels on continuous elastic foundations.— AIAA Journal, 1963, v. 1, No. 5, p. 1146—1154.
8. *Weaver D. S., Unny T. E.* The hydroelastic stability of a flat plate.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, v. 37, No. 3, p. 823—827.— Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механика, 1970, т. 37, № 3, с. 251—256.
9. *Ellen C. H.* The stability of simply supported rectangular surfaces in uniform subsonic flow.— Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1973, v. 40, No 1, p. 68—72.— Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механика, 1973, т. 40, № 1, с. 74—79.
10. *Kornecki A.* Static and dynamic instability of panels and cylindrical shells in subsonic potential flow.— J. Sound and Vibr., 1974, v. 32, No. 2, p. 251—253.
11. *Kornecki A., Dowell E. H., O'Brien J.* On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow.— J. Sound and Vibr., 1976, v. 47, No. 2, p. 163—178.
12. *Покровский Л. Н.* Метод исследования аэроупругой устойчивости пологих оболочек, обтекаемых потоком несжимаемой жидкости.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 7, с. 70—77.
13. *Ellen C. H.* The stability of an insulated rectangular surface embedded in uniform subsonic flow.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, v. 44, No. 2, p. 201—206.
14. *Ильгамов М. А.* Один приближенный метод в задаче взаимодействия упругой пластины с потоком жидкости.— Тр. семинара по теории оболочек. Казанск. физ.-техн. ин-та АН СССР, 1974, вып. 4, с. 196—205.
15. *Kornecki A.* Influence of subsonic potential flow on thin buckling of thin panels under edge compression.— AIAA Journal, 1975, v. 13, No. 1, p. 106—107.— Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 1, с. 140—141.
16. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.: Гостехиздат, 1951. 804 с.
17. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1400 с.
18. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М.: Физматгиз, 1964, 303 с.

Казань

Поступила в редакцию
10.XI.1980