МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1982

УДК 539.3:534.1

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

ЛИЗАРЕВ А. Д.

При решении многих задач теории колебаний кольцевых пластин и мембран необходимо учитывать начальную неоднородность поля напряжений в срединной плоскости. Такая неоднородность возникает, если интенсивности распределенных радиальных сил, приложенных по наружному и внутреннему краям пластины или мембраны, различны по величине [1–3], при действии центробежных сил во вращающихся конструкциях [4–6], при неравномерном нагреве [7].

Радиальные растягивающие силы при некоторых граничных условиях вызывают появление кольцевых сжимающих сил, приводящих к потере устойчивости пластины. Это до сих пор мало изученное явление возможно только при неоднородном поле напряжений и только при неосесимметричных формах изгиба. В случае изотропной кольцевой пластины оно исследовалось точным методом в [8]. Отметим, что в большей степени изучена устойчивость ослабленных круговыми отверстиями растянутых прямоугольных пластин, когда выпучивание происходит вследствие возникновения области сжимающих напряжений вблизи отверстий. Обзор работ, в которых рассматривалась эта задача, приведен в [9].

Точное решение задачи о влиянии радиальных растягивающих и сжимающих сил на собственные частоты и критические нагрузки кольцевых пластин получено ниже при помощи специальных функций, предложенных в [10].

1. Основные уравнения. Уравнение движения кольцевой пластины постоянной толщины имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2 W+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(N_r r\theta_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(N_\varphi\theta_\varphi)+\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0 \qquad (1.1)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

где W — нормальное перемещение, $N_r=h\sigma_r$, $N_\varphi=h\sigma_\varphi$, $\theta_r=-\partial W/\partial r$, $\theta_\varphi=-1/r\ \partial W/\partial\varphi$, θ_r, θ_φ — углы поворота нормали в направлениях r и φ, σ_r, σ_φ — радиальные и кольцевые напряжения в пластине, связанные с радиальными перемещениями u известными дифференциальными зависимостями, h — толщина пластины, D — цилиндрическая жесткость, ρ — плотность материала, ν — коэффициент Пуассона.

Если пластина сжата или растянута радиальными силами p_a и $p_b (p_a\neq p_b)$, распределенными по краям $r=a$ и $r=b$, то, введя безразмерные параметры α, β, найдем

$$\sigma_r=\frac{D}{b^2}\left(\alpha+\frac{\beta}{y^2}\right),\qquad \sigma_\varphi=\frac{D}{b^2}\left(\alpha-\frac{\beta}{y^2}\right),\qquad y=\frac{r}{b} \qquad (1.2)$$

$$\alpha=\frac{b^2}{D}\frac{p_b-p_a\eta^2}{1-\eta^2},\qquad \beta=\frac{b^2}{D}\frac{(p_a-p_b)\eta^2}{1-\eta^2},\qquad \eta=\frac{a}{b}$$

Будем полагать радиальные силы положительными, если они вызывают сжатие пластины в радиальном направлении, т. е. силы $p_a>0$, если они направлены от центра пластины, и силы $p_b>0$, если они направлены к центру. Кольцевые силы N_φ положительны, если они вызывают сжатие в кольцевом направлении.

Подставляя выражения σ_r и σ_φ, определяемые формулами (1.2), в уравнение (1.1) и полагая $W=w(r)\cos n\varphi \cos \omega t$ (ω — собственная частота, n — число узловых диаметров формы колебаний), получим обыкновенное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами

$$y^4w'^{\mathrm{V}}+2y^3w'''-(1+2n^2-\beta-\alpha y^2)y^2w''+(1+2n^2-\beta+\alpha y^2)yw'-$$
$$-[n^2(4-n^2-\beta+\alpha y^2)+\lambda^2y^4]w=0 \qquad (1.3)$$
$$\lambda^2=\rho h b^4\omega^2/D$$

Дифференциальное уравнение колебаний неравномерно нагруженной кольцевой мембраны можно получить как частный случай уравнения (1.1), полагая $D=0$. Если, например, к наружному краю мембраны приложена распределенная растягивающая нагрузка p_b, а внутренний край свободен от внешнего воздействия ($p_a=0$), то, подставив соответствующие значения N_r и N_φ в (1.1), получим уравнение, рассмотренное в [1].

2. Интегрирование уравнения колебаний. Решения задач теории колебаний кольцевых пластин и мембран с начальным неоднородным полем напряжений достаточно сложны. За исключением немногих особых случаев, точные решения этих задач не могут быть найдены в элементарных или известных специальных функциях. Приближенные решения получают, например, вариационными методами [2, 3] или с помощью аппроксимации неоднородного поля напряжений однородным [4]. Часто используются и точные аналитические решения в обобщенных степенных рядах частного вида [1, 5—7], однако эти решения не всегда удобны, так как не удовлетворяют требованию единообразия вычислительного алгоритма, важному при использовании ЭВМ. При построении таких степенных рядов приходится каждый раз заново находить рекуррентные зависимости между членами ряда, формулы дифференцирования и т. д. Кроме того, при суммировании обобщенных степенных рядов иногда возникают значительные вычислительные трудности. Так, в [1] сообщается, что уже десятый член ряда содержал 512 слагаемых, каждое из которых представляло собой произведение 10 трехчленов.

Уравнение (1.3) принадлежит классу уравнений

$$\sum_{i=0}^{q+1} z^i(a_i-b_iz^\delta-c_iz^{m\delta})\frac{d^iw}{dz^i}=0 \qquad (2.1)$$

исследованному в [10]. Здесь a_i, b_i, c_i — действительные числа, $a_{q+1}\neq 0$, $\delta>0$ — любое целое или дробное число, $m\geqslant 2$ — целое число.

Многие задачи теории колебаний и устойчивости механических систем, у которых размеры, упругие характеристики материала и начальные напряжения являются непрерывными функциями координат, приводятся к уравнениям класса (2.1). У различных объектов (стержень, пластина, оболочка) и различном характере неоднородности (физическая, геометрическая или начальное неоднородное поле напряжений) уравнения этого класса отличаются только порядками уравнений, коэффициентами a_i, b_i, c_i, показателями δ и числами m.

Уравнения (2.1) могут быть решены единообразно и достаточно просто. Стандартная процедура построения аналитических решений включает вычисление параметров

$$\alpha_{ij}=(x_i-u_j)\delta^{-1} \quad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,\ldots,\,p)}, \qquad \beta_{in}=(x_i-v_n)\delta^{-1} \quad {\scriptstyle (n=1,\,2,\,\ldots,\,s)}$$
$$\gamma_{il}=(x_i-x_l)\delta^{-1}+1 \quad {\scriptstyle (i\neq l,\; l=1,\,2,\,\ldots,\,q+1)}$$

где p и s — порядки старших производных, при которых коэффициенты b_i и c_i в уравнении (2.1) отличны от нуля, а x, u, v — корни определяющих уравнений

$$f_0(x)=a_0+\sum_{i=1}^{q+1} a_i \prod_{j=1}^{i} (x-j+1)=0 \tag{2.2}$$

$$f_1(u)=b_0+\sum_{i=1}^{p} b_i \prod_{j=1}^{i} (u-j+1)=0 \tag{2.3}$$

$$f_m(v)=c_0+\sum_{i=1}^{s} c_i \prod_{j=1}^{i} (v-j+1)=0 \tag{2.4}$$

Если среди корней x_i уравнения (2.2) отсутствуют кратные корни, а также корни, разность которых равна числу, кратному δ, то частные решения уравнения (2.1) представляют собой произведения степенных функций и ${}_{p,\,s}H_q$-функций:

$$w_i = z^{x_i}{}_{p,\,s}H_q \left\| \begin{matrix} \alpha_{i1}, & \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ip}; & \\ \beta_{i1}; & \beta_{i2}, \ldots, \beta_{is}; & \psi \\ \gamma_{i1}, & \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{iq}; & \end{matrix} \right\| \tag{2.5}$$

$${}_{p,s}H_q(\psi)=1+\sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{\psi^k}{k!}, \qquad \psi=\frac{1}{a_{q+1}}\frac{z^\delta}{\delta^{q+1}} \tag{2.6}$$

Условия сходимости ряда (2.6) рассмотрены в [10]. Коэффициенты D_k в этом ряде при $k\geqslant 3$ можно представить в виде трехдиагональных определителей k-го порядка, которые вычисляются при помощи рекуррентных зависимостей

$$D_k=D_{k-1}g_k+D_{k-m}h_k \quad (D_0=1, \quad D_1=g_1) \tag{2.7}$$

Здесь введены обозначения

$$g_k=b_p\delta^p R_{ijk} / R_{ilk}, \qquad h_k=c_s\delta^s R_{ink} / R_{ilk} \quad (i\neq l)$$

$$R_{ijk}=\prod_{j=1}^{p}(\alpha_{ij}+k-1), \qquad R_{ink}=\prod_{n=1}^{s}(\beta_{in}+k-m)$$

$$R_{ilk}=\prod_{l=1}^{q+1}(\gamma_{il}+k-1)$$

Обобщенный гипергеометрический ряд ${}_pF_q$ является частным случаем ряда (2.6). Это следует из того, что если в уравнении (2.1) все коэффициенты $c_i=0$, то в рекуррентных зависимостях (2.7) все $h_k=0$. Определитель D_k равен тогда произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Например, если $\lambda=0$, то уравнение (1.3), из которого можно определить критические нагрузки, интегрируется, как показано в [11], в обобщенных гипергеометрических функциях ${}_2F_3$ и ${}_1F_2$.

При одном или нескольких кратных корнях или же одном или нескольких значениях параметра $\gamma_{il}=0, -1, -2, \ldots$ уравнение (2.1) имеет соответствующее число частных решений, содержащих $\ln z$ в первой и в более высоких степенях. По аналогии с логарифмическими решениями гипергеометрического уравнения высшего порядка [12] эти решения можно назвать ${}_{p,s}H_q$-функциями второго рода и ввести для них обозначение ${}_{p,s}\Psi_q(\psi)$.

Пусть $x_1=x_2-r\delta$ или $\gamma_{1,2}=1-r$ ($r=0, 1, \ldots$). В частном случае $r=0$ логарифмическое решение, соответствующее корню x_1, имеет вид

$$w_1=\frac{dw}{dx}\bigg|_{x=x_1}=z^{x_1}{}_{p,s}\Psi_q(\psi)=z^{x_1}[{}_{p,s}H_q(\psi,x_1)\ln z+H_1'(\psi,x_1)] \tag{2.8}$$

$$H_1(\psi,x_1)=\sum_{k=1}^{\infty}D_k'(x_1)\frac{\psi^k}{k!}$$

$$D_k'(x_1)=D_{k-1}g_k'+D_{k-1}'g_k+D_{k-m}h_k'+D_{k-m}'h_k$$

где штрих означает дифференцирование по x.

Таким образом, фундаментальная система решений уравнений класса (2.1), включая логарифмические решения, полностью определяется параметрами α_{ij}, β_{in}, γ_{il} и аргументом ψ.

В приложениях при удовлетворении частных решений граничным условиям необходимо определять их производные до n-го порядка включительно. Производные произведения $w_i=z^{x_i}{}_{p,s}H_q(\psi)$ имеют вид

$$\frac{d^n w_i}{dz^n}=z^{x_i-n}\sum_{k=0}^{\infty}(x_i+k\delta-n+1)_n D_k\frac{\psi^k}{k!}$$

где $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)$ — символ Похгаммера.

Производные произведения $w_i\ln z$ можно определить по формуле

$$(w_i\ln z)^{(n)}=w_i^{(n)}\ln z+\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(m-1)!C_n^m z^{-m}w_i^{(n-m)}$$

где C_n^m — биномиальные коэффициенты.

Частными решениями уравнения (1.3) являются произведения степенных функций и ${}_{2,0}H_3$-функций первого и второго рода. Так как $\delta=2$ и $m=2$, то $\psi=y^2/16$.

Определяющее уравнение (2.2) при помощи подстановки $x=1+t$ приводится к биквадратному

$$t^4+[\beta-2(1+n^2)]t^2+(n^2-1)(n^2-1+\beta)=0$$

его корни

$$t_{1,2}^2=n^2+1-\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+2n^2(2-\beta)}$$

Определяющее уравнение (2.3) имеет корни $u_{1,2}=\pm n$.

В случае осесимметричных форм колебаний и потери устойчивости $n=0$, тогда $x_1=0$, $x_2=2$, $x_{3,4}=1\pm(1-\beta)^{1/2}$. Здесь разность корней x_1-x_2 есть целое число, кратное $\delta=2$, $\gamma_{1,2}=0$ и тогда, вообще говоря, частное решение, соответствующее $x_1=0$, должно быть записано в виде функции $z^{x_1}{}_{2,0}\Psi_3$. Однако в этом случае логарифмическое решение отсутствует и все частные решения имеют вид (2.5) вследствие того, что $\alpha_{1,1}=0$. Аналогичный случай рассмотрен при построении обобщенных степенных рядов в [13].

Кососимметричным формам колебаний и потери устойчивости соответствует $n=1$. Уравнение (2.2) имеет тогда кратные корни $x_1=x_2=1$, два других корня $x_{3,4}=1\pm(4-\beta)^{1/2}$. Одно из частных решений имеет в этом случае вид (2.8).

3. Решение частотного уравнения. В качестве примера исследуем свободные колебания и устойчивость кольцевой пластины, к внутреннему свободному от закреплений краю которой $y=\eta$ приложена растягивающая или сжимающая распределенная нагрузка p_a, а поперечные, угловые и радиальные перемещения наружного края отсутствуют, т. е. $w(1)=\theta_r(1)=u(1)=0$.

Используя зависимость $\sigma=\sigma(u)$ и формулы (1.2), получим при $\sigma_r(\eta)=p_a$ и $u(1)=0$:

$$\alpha, \beta=\frac{(1\pm\nu)p}{1+\nu+(1-\nu)/\eta^2}, \quad p=\frac{p_a b^2}{D} \tag{3.1}$$

Из формул (3.1) и (1.5) следует, что

$$\max_{0<\eta<1} |N_r(\eta)| > \max_{0<\eta<1} |N_\varphi(\eta)|$$

однако с уменьшением η разность между этими максимальными значениями уменьшается, т. е. относительно больших величин кольцевые силы достигают при малых значениях η, что существенно влияет на закономерности изменения собственных частот и критических нагрузок.

При найденном значении β корни определяющего уравнения (2.2) являются действительными, если $p<a\gamma$, где $\gamma=(1+\nu)/(1-\nu)+1/\eta^2$ и $a=1$ при $n=0$; $a=4$ при $n=1$. Если же $p=a\gamma$, то $x_3=x_4=1$ при $n=0$ и $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ при $n=1$. В области $p<0$ при $n=1$ уравнение (1.6) имеет еще одно частное решение, содержащее $\ln y$, если $x_3-x_4=\delta k$ или $x_3-x_1=\delta k$, где k — целое положительное число. Эти случаи соответствуют зависимостям $p+(k^2-4)\gamma=0$, $k>2$; $p+4(k^2-1)\gamma=0, k>1$.

Граничные условия для наружного края имеют вид $w(1)=w'(1)=0$. Для внутреннего края одно из условий — $M(\eta)=0$, а второе условие, которое при отсутствии нагрузки обычно записывают в форме $V(\eta)=Q(\eta)-(1/\eta)(\partial H(\eta)/\partial\varphi)=0$, где Q — радиальная поперечная сила, H — крутящий момент, заменяется условием $V(\eta)-N_r(\eta)\partial w(\eta)/\partial r=0$.

Учитывая известные выражения для M, H и Q, перепишем граничные условия при $y=\eta$ так:

$$w''+\nu w'-n^2w=0$$

$$w'''+\frac{1}{\eta}w''-\frac{1}{\eta^2}[1+(2-\nu)n^2-p]w'+\frac{n^2}{\eta^3}(3-\nu)w=0$$

Используя решения (2.5), (2.8) и учитывая указанные граничные условия, получим системы однородных уравнений относительно постоянных C_i. Условием необращения в нуль этих постоянных является равенство нулю определителей, составленных из коэффициентов при C_i. Числовые результаты получены с использованием языка Фортран IV и ЭВМ М-4030.

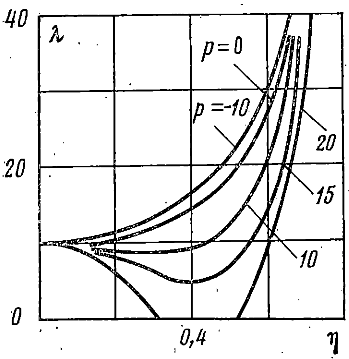
В ненагруженной пластине, т. е. при $p=0$, собственные частоты осесимметричных форм колебаний без узловых окружностей, как уже было показано в [14], монотонно повышаются с увеличением относительного отверстия η. Соответствующие значения частотного параметра λ на фиг. 1 совпадают с указанными в [14]. Такое же монотонное повышение частоты наблюдается и при действии радиальных растягивающих сил $p<0$. Однако при фиксированном значении сжимающих сил $p>0$ зависимость λ от η в интервале $0<\eta<1$ становится немонотонной: вначале частоты снижаются, достигают в некоторой точке $\eta=\eta_0$ минимального значения, а затем возрастают.

Зависимость собственной частоты от величин p и η при неосесимметричных формах колебаний существенно иная по сравнению со случаем $n=0$: функция $\lambda=\lambda(p)$ имеет при заданных не очень больших значениях η точку максимума и две нулевые точки в областях $p>0$ и $p<0$, соответствующие двум значениям критических нагрузок $p=p_k$. Если $\eta<0{,}12$, то $p_{1k}>p_{2k}$, если же $\eta>0{,}12$, то $p_{1k}<p_{2k}$, где p_{1k} и p_{2k} — критические значения p соответственно при $p>0$ и $p<0$. Потеря устойчивости при действии радиальных растягивающих сил $p<0$ возможна при значениях η, не превышающих некоторой определенной величины. Действительно, как следует из формул (1.2) и (3.1), кольцевые сжимающие силы существуют только в интервале

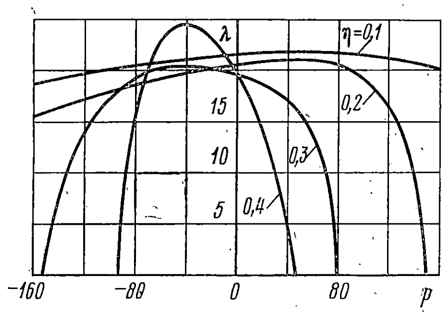
$$\eta \leqslant y < y_1, \qquad y_1 = \sqrt{(1-\nu)/(1+\nu)} \tag{3.2}$$

Если $\eta \geqslant y_1$, то радиальные растягивающие силы при рассматриваемых граничных условиях уже не вызывают появления кольцевых сжимающих сил. С уменьшением коэффициента Пуассона ν интервал (3.2) расширяется. Так, если $\nu=0$, то $y_1=1$, т. е. кольцевые силы только сжимающие, а если $\nu=0{,}5$, то $y_1=0{,}5774$.

Зависимость $\lambda=\lambda(p)$ при некоторых значениях η и кососимметричных формах колебаний $(n=1)$ показана на фиг. 2. Если $\eta<0{,}25$, то начальное



Фиг. 1



Фиг. 2

увеличение радиальных сжимающих сил $p>0$ вызывает некоторое повышение собственной частоты вследствие развития значительных по величине кольцевых растягивающих сил. При дальнейшем увеличении p функция $\lambda=\lambda(p)$ достигает слабого максимума, а затем собственные частоты медленно снижаются. На приближение критического значения p указывает значительное уменьшение частоты при малом приращении p. Если $\eta<0{,}25$, то максимум функции $\lambda=\lambda(p)$ смещается в область $p<0$. Такой же характер имеет зависимость собственных частот от p и η и при других формах неосесимметричных колебаний, характеризуемых $n>1$.

Автор благодарит Л. А. Журбило, оказавшего помощь при разработке программы расчета на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ерошин С. С., Марковский А. И.* О собственных частотах кольцевой мембраны.— Математическая физика: Сб. статей. Киев: Наукова думка, 1978, вып. 23, с. 53–56.
2. *Rosen A., Libai A.* Transverse vibrations of compressed annular plates.— J. Sound and Vibration, 1975, v. 40, No. 1, p. 149–159.
3. *Ramaiah G. K.* Flexural vibrations of annular plates under uniform in — plane compressive forces.— J. Sound and Vibration, 1980, v. 70, No. 1, p. 117–131.
4. *Хронин Д. В.* Колебания в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 296 с.
5. *Eversman W.* Transverse vibrations of a clamped spinning membrane.— AIAA Journal, 1968, v. 6, No. 7, p. 1395–1397.
6. *Loh H. C., Carney J. F.* Vibration and stability of beam reinforced spinning annular plates.— In: Developments in theoretical and applied mechanics. V. 8. Oxford: Pergamon Press, 1976, p. 365–377.
7. *Кузнецов Е. Б., Шалашилин В. И.* Собственные колебания и устойчивость круглых пластин при осесимметричном нагреве.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4, с. 147–151.

8. *Бареева Г. Н., Лизарев А. Д.* Об устойчивости кольцевой пластины при действии радиальных растягивающих сил.– Инж. ж. МТТ, 1966, № 2, с. 126–129.
9. *Преображенский И. Н.* Об исследованиях устойчивости тонкостенных пластинок с вырезами (обзор).— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 7, с. 3—25.
10. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* Аналитические решения одного класса уравнений с полиномиальными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 12, с. 2158—2163.
11. *Лизарев А. Д.* Об устойчивости кольцевых пластин при неоднородном поле напряжений.– Прикл. механика, 1980, т. 16, № 6, с. 92–97.
12. *Коваленко А. Д.* Развитие теории гипергеометрических функций в связи с задачами об упругом равновесии пластин и оболочек.— ПММ, 1967, вып. 31, № 4, с. 690—700.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.
14. *Сахаров И. Е.* Частоты собственных колебаний кольцевых пластинок.— Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 5, с. 107–110.

Гомель

Поступила в редакцию
25.XII.1980