

УДК 533.6.013.42

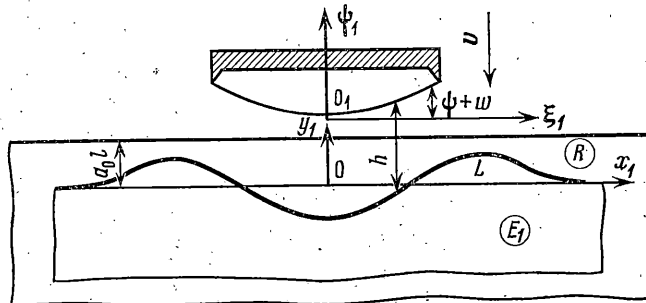
ЗАДАЧА ГИДРОАЭРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ,  
ПАДАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ

ШАЦ В. Н.

Существенное влияние на характеристики погружения тела, падающего на воду, оказывает упругость его конструкции и воздушная прослойка между ним и поверхностью жидкости. В экспериментальных и теоретических работах [1-3] показана необходимость учета этих факторов, если форма днища тела близка к плоской, и предложены модели взаимодействия тела с жидкостью.

1. Рассматривается плоская задача о свободном падении с начальной скоростью упругой пластины, связанной с абсолютно твердым телом, на невозмущенную поверхность жидкости в условиях атмосферы (фиг. 1). Изучается начальный этап движения падающей конструкции до момента времени непосредственного ее контакта с поверхностью жидкости.

Пластина симметрична и имеет малую начальную погибь; влияние осевых напряжений и тангенциальных составляющих сил инерции не



Фиг. 1

учитывается. Движение газа полагается адиабатическим и одномерным с постоянным по толщине газового слоя  $h(x_1, t)$  давлением  $p(x_1, t)$ . Жидкость считается идеальной и несжимаемой; движение — безвихревым, поскольку начинается из состояния покоя.

В этих предположениях получим согласно [1, 2] систему уравнений, связывающую скорость  $u(x_1, t)$  и плотность  $\rho(x_1, t)$  газа, упругое перемещение пластины  $w(\xi_1, t)$ , потенциал скорости жидкости  $\phi_1(x_1, y_1, t)$  и перемещение твердого тела  $Y_1(t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad |x_1| \leq l$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u h) = 0$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_1^4} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2}(w + Y_1) = p - p_a - mg$$

$$\partial^2 \varphi_1 / \partial x_1^2 + \partial^2 \varphi_1 / \partial y_1^2 = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\frac{p-p_a}{\rho_0} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \right)^2 - g \eta_1 \quad (y_1 = \eta_1)$$

$$\partial \eta_1 / \partial t = \partial \varphi_1 / \partial y_1 - (\partial \eta_1 / \partial x_1) (\partial \varphi_1 / \partial x_1) \quad (y_1 = \eta_1)$$

$$(M+ml) \frac{d^2 Y_1}{dt^2} = -Mg + Q_1 - ml \left( g + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$$

$$Q_1 = 2 \int_0^l (p-p_a) dx_1$$

Здесь  $Y_1$  — координата начала подвижной системы координат  $O_1 \xi_1 \psi_1$ , связанной с твердым телом, относительно неподвижной системы  $Ox_1 y_1$ ,  $h(x_1, t) = \psi_1 + w + Y_1 - \eta_1$  — толщина газового слоя;  $\eta_1(x_1, t)$  — возвышение свободной поверхности  $L$  жидкости;  $\psi_1(\xi_1)$  — начальная догиб пластины,  $D$ ,  $m$ ,  $l$  — цилиндрическая жесткость, масса единицы площади и полуширина пластины,  $M$  — масса твердого тела,  $p_a$  — атмосферное давление,  $\rho_0$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Давление в газовом слое равно  $p = p_a (\rho/\rho_a)^{\kappa}$ , при  $|x_1| \geq l$  давление газа  $p = p_a$ ; для скорости истечения по кромке принимается условие  $u(\pm l, t) = c$  ( $\kappa$  — показатель адиабаты,  $c = (\kappa p_a / \rho_a)^{1/2}$  — скорость звука,  $\rho_a$  — начальная плотность).

Начальная скорость  $dY_1(0)/dt = -v$  и толщина газового слоя  $h(0, 0) = h_a$  полагаются достаточно малыми:  $v/c \ll 1$ ,  $h_a/l \ll 1$ . Остальные начальные условия являются нулевыми:

$$\begin{aligned} u(x_1, 0) = w(x_1, 0) &= \frac{\partial w(x_1, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x_1, y_1, 0) = \\ &= \text{grad } \varphi_1(x_1, y_1, 0) = \eta_1(x_1, 0) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Задача решается на промежутке  $0 \leq t \leq T$ , где  $h(\pm l, T) = 0$ .

2. Введем безразмерные переменные:  $x = x_1/l$ ,  $y = y_1/l$ ,  $\xi = \xi_1/l$ ,  $\psi = \psi_1/l$ ,  $Y = Y_1/l$ ,  $\tau = vt/h_a$ ,  $H = h/h_a$ ,  $W = w/\delta$ ,  $P = p/p_a$ ,  $Q = Q_1/(2p_a l)$ ,  $R = \rho/\rho_a$ ,  $U = u/c$ ,  $\varphi = \varphi_1/(vl)$ ,  $\eta = \eta_1/l$ .

В этих переменных система (1.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{v_2}{v_1} U \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{v_2}{\kappa v_1} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (RH) + \frac{v_2}{v_1} \frac{\partial}{\partial x} (RUH) &= 0 \quad (|x| \leq 1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + v_2^2 v_3^2 v_7 (1+v_5) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} &= \frac{v_2 v_4 (1+v_5)}{\kappa v_1^2 v_3^2} (P-1) - \frac{v_2^2 v_4 v_5}{\kappa v_1^2} Q \\ \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{v_2 v_4}{\kappa v_1^2} (P-1) - \frac{v_2}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{v_2}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - v_6 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (y = \eta) \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} = \frac{v_2^2 v_4 v_5}{\kappa v_1^2 v_3 (1+v_5)} Q - v_2 v_6 - \frac{v_3 v_5}{1+v_5} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \quad (2.5)$$

$$v_1 = \frac{v}{c}, \quad v_2 = \frac{h_a}{l}, \quad v_3 = \frac{\delta}{l}, \quad v_4 = \frac{\rho_a}{\rho_m}, \quad v_5 = \frac{\rho_m \delta l}{M}, \quad v_6 = \frac{g h_a}{v^2}$$

$$v_7 = E/[42(1-\mu^2)\rho_m v^2]$$

где  $\delta$ ,  $\rho_m$ ,  $\mu$  и  $E$  — толщина пластины, плотность, коэффициент Пуассона и модуль Юнга ее материала.

Решение строится для моментов времени  $\tau_s = \varepsilon s$  ( $s=0, 1, \dots$ ) с шагом  $\varepsilon$ . На каждом временном слое задача распадается на четыре части. В первую очередь рассчитывается течение газа и вычисляются функции  $U^{s+1}$ ,  $R^{s+1}$  и  $P^{s+1}$ . Зная их, можно определить перемещение пластины  $W^{s+1}$ , затем найти потенциал безразмерной скорости жидкости  $\varphi^{s+1}$  и возвышение свободной поверхности  $\eta^{s+1}$ . Расчет заканчивается вычислением положения тела  $Y^{s+1}$  и толщины слоя  $H^{s+1}$ .

Задача о течении газа решается при помощи метода предиктор — корректор [4]. На отрезке  $0 \leq x \leq 1$  отметим  $N+1$  точку  $x_n = n/N$  ( $n=0, 1, \dots; N$  — четное число). Используя явную схему, из (2.1) получим зависимости для вычисления вспомогательных сеточных функций ( $n=0, 1, \dots, N-1$ ):

$$U_{n+1/2}^{s+1/2} = U_{n+1/2}^s - \frac{\varepsilon v_2 N}{2v_1} \left\{ (U_{n+1}^s - U_n^s) U_{n+1/2}^s + \kappa \frac{R_{n+1}^s - R_n^s}{(R_{n+1/2}^s)^{2-\kappa}} \right\}$$

$$R_{n+1/2}^{s+1/2} = R_{n+1/2}^s \left( 2 - \frac{H_{n+1/2}^{s+1/2}}{H_{n+1/2}^s} \right) - \frac{\varepsilon v_2 N}{2v_1 H_{n+1/2}^s} (R_{n+1}^s H_{n+1}^s U_{n+1}^s - R_n^s H_n^s U_n^s)$$

Значения функций в точках  $x_{n+1/2}$  вычисляются как средние значения соответствующих функций для  $x_n$  и  $x_{n+1}$ . После вычисления  $U_{n+1/2}^{s+1/2}$  и  $R_{n+1/2}^{s+1/2}$  находим ( $n=1, 2, \dots, N-1$ ):

$$U_n^{s+1} = U_n^s - \frac{\varepsilon v_2 N}{v_1} \left\{ U_n^{s+1/2} (U_{n+1/2}^{s+1/2} - U_{n-1/2}^{s+1/2}) + \kappa \frac{R_{n+1/2}^{s+1/2} - R_{n-1/2}^{s+1/2}}{(R_n^{s+1/2})^{2-\kappa}} \right\}$$

$$R_n^{s+1} = R_n^s - \frac{\varepsilon v_2 N}{v_1 H_{n+1/2}^{s+1/2}} (R_{n+1/2}^{s+1/2} H_{n+1/2}^{s+1/2} U_{n+1/2}^{s+1/2} - R_{n-1/2}^{s+1/2} H_{n-1/2}^{s+1/2} U_{n-1/2}^{s+1/2})$$

Для граничных условий из (1.2) и (2.1) получим ( $s=0, 1, \dots$ ):

$$U_N^{s+1} = U_{N-1/2}^{s+1/2} R_{N-1/2}^{s+1/2} \frac{H_{N-1/2}^{s+1/2}}{H_N^{s+1/2}} - \frac{\varepsilon v_2 N}{v_1} \left( 1 - \frac{H_N^s}{H_N^{s+1/2}} \right)$$

$$R_0^{s+1} = R_0^s \left( \frac{2H_0^s}{H_0^{s+1/2}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon v_2 N}{v_1} R_{1/2}^{s+1/2} U_{1/2}^{s+1/2} \left( 1 + \frac{H_1^{s+1/2}}{H_0^{s+1/2}} \right)$$

$$R_N^{s+1} = R_N^s = 1, \quad U_0^{s+1} = U_0^s = 0$$

Входящие в эти зависимости функции  $H^s$  и  $H^{s+1/2}$  вычисляются по формулам

$$H_n^{s+1/2} = H_n^s + (Y^{s+1} + Y^s)/2, \quad H_n^s = \psi_n + v_3 W_n^s + Y^s - \eta_n^s$$

Согласно (2.6), имеем ( $s=1, 2, \dots$ ):

$$Y^{s+1} = 2Y^s - Y^{s-1} - \varepsilon^2 \left\{ v_2 v_6 - \frac{v_2^2 v_4 v_5}{\kappa v_1^2 v_3 (1+v_5)} Q^s + \frac{v_3 v_5}{1+v_5} \frac{\partial^2 W^s}{\partial \tau^2} \right\}$$

При вычислениях по этим формулам используются начальные значения:  $R_n^0 = 1$ ,  $Y^0 = Q^0 = U_n^0 = \eta_n^0 = W_n^0 = W_n^1 = 0$ ,  $H_n^0 = 1 + \psi_n$ ,  $Y^1 = H_n^0 - \varepsilon v_2$  ( $n=0, 1, \dots, N$ ).

Решение уравнения (2.2) разыскивается в виде ряда по формам собственных колебаний пластины. Далее ограничимся случаем ее свободного опирания по кромкам. Учитывая симметрию конструкции, начальные условия и используя формулу Симпсона для интегрирования нагрузки,

получим ( $f_r^0 = f_r^1 = 0$ )

$$W_n^s = \sum_{r=1}^{\infty} f_r^s \cos \frac{(2r-1)n\pi}{2N} \quad (s=2,3,\dots; n=0,1,\dots,N) \quad (2.6)$$

Функции  $f_r^s$  удовлетворяют уравнению  $d^2 f_r^s / d\tau^2 + \lambda_r^2 f_r^s = \gamma_r^s$ ,  $\lambda_r = \frac{1}{4}(2r-1)^2 \pi^2 \nu_2 \nu_3 \sqrt{\nu_7(1+\nu_5)}$ , правую часть которого находим при помощи формулы Симпсона для интегрирования нагрузки

$$\gamma_r^s = \frac{2\nu_2^2 \nu_4}{\kappa \nu_1^2} \sum_{n=0}^N e_n \left\{ \frac{1+\nu_5}{\nu_3^2} (p^s-1) - \nu_5 Q^s \right\} \cos \frac{(2r-1)n\pi}{2N}$$

$$e_0 = e_N = 1/(3N), \quad e_{2j} = 2e_0, \quad e_{2j-1} = 4e_0 \quad (j=1, 2, \dots, N/2)$$

Интегрируя это уравнение в предположении линейного изменения  $\gamma_r^s$  на отрезке  $\tau_{s-1} < \tau < \tau_s$ , получим ( $\alpha_1 = \cos \varepsilon \lambda_r$ ,  $\alpha_2 = \sin \varepsilon \lambda_r$ ):

$$f_r^s = \alpha_1 f_r^{s-1} + \alpha_2 \frac{df_r^{s-1}}{d\tau} + \frac{\gamma_r^{s-1}}{\lambda_r^2} \left( \frac{\alpha_2}{\tau \lambda_r} - \alpha_1 \right) + \frac{\gamma_r^s}{\lambda_r^2} \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\tau \lambda_r} \right)$$

$$\frac{df_r^s}{d\tau} = \alpha_1 \frac{df_r^{s-1}}{d\tau} - \alpha_2 \lambda_r f_r^{s-1} + \frac{\gamma_r^{s-1}}{\lambda_r} \left( \alpha_2 - \frac{1-\alpha_1}{\tau \lambda_r} \right) + \frac{\gamma_r^s}{\lambda_r} \frac{1-\alpha_1}{\tau \lambda_r}$$

Для перехода к  $(s+1)$  временному слою при расчете течения жидкости из (2.3), (2.4) находим приближенные зависимости

$$\varphi^{s+1} = \varphi^s + \varepsilon (A_1^s + A_2^s \partial \varphi^s / \partial y), \quad \eta^{s+1} = \eta^s + \varepsilon A_2^s \quad (2.7)$$

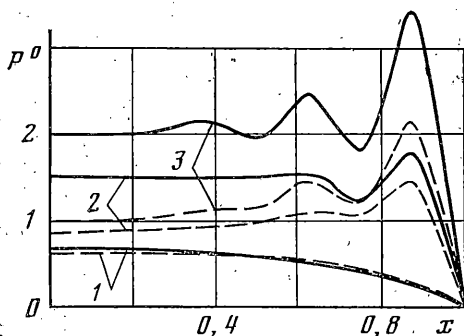
в которых через  $A_1$  и  $A_2$  обозначены правые части соответственно второго уравнения (2.3) и уравнения (2.4). Из (2.7) следует, что для каждого  $\tau_s$  необходимо вычислить значения  $\partial \varphi^s / \partial x$  и  $\partial \varphi^s / \partial y$  на границе  $L$  по известному краюемому значению  $\varphi^s$ .

Поскольку уравнение свободной поверхности  $\eta_1(x_1, t)$  и давление  $p(x_1, t)$  являются гладкими функциями, то принцип аналитического продолжения [5] позволяет аналитически продолжить комплексный потенциал скорости  $\Phi_1^s$  через границу  $L$  в область  $E_1$  ( $\text{Re } \Phi_1^s = \varphi_1^s$ ). Последняя представляет собой нижнюю полуплоскость с границей  $y_1 = a_0 l$  и включает в себя область  $G_1$ , занятую жидкостью.

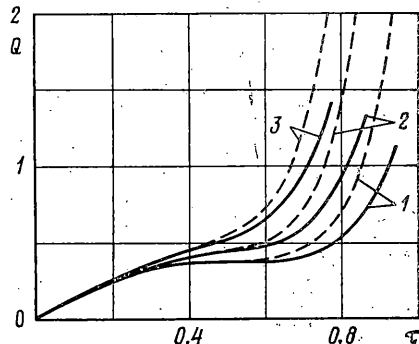
Переходя к безразмерным переменным, будем разыскивать в области  $E_2$  некоторую аналитическую функцию  $\Phi_2^s$ , которая равна  $\Phi^s$  в замкнутой области  $G$ . Здесь  $\Phi^s$ ,  $G$  и  $E_2$  соответствуют  $\Phi_1^s$ ,  $G_1$  и  $E_1$  ( $\text{Re } \Phi^s = \varphi^s$ ). Пусть на прямой  $y = a_0$  значение  $\text{Re } \Phi_2^s = \chi^s + q^s$ , где  $q^s(x)$  — неизвестная функция, а  $\chi^s$  — функция, интерполирующая  $\varphi^s$  при  $K$  узлах интерполяции  $x_k$ , расположенных с шагом  $1/N$  ( $k=0, 1, \dots, N, \dots, K$ ):  $\chi_k^s = \varphi_k^s + N(\varphi_{k+1}^s - \varphi_k^s)(x - x_k)$  ( $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ).

Используя интеграл Шварца для полуплоскости и учитывая симметрию течения, получим

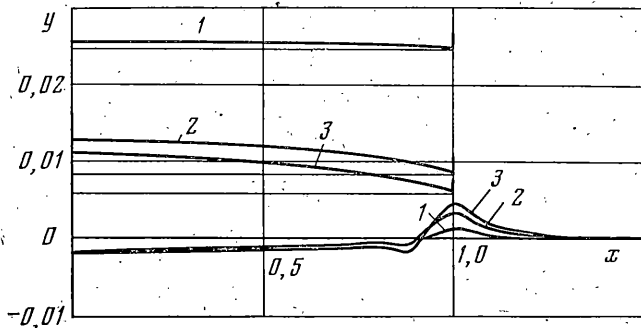
$$\Phi_2^s = -\frac{2}{\pi i} \zeta \int_0^{\infty} \frac{q^s(t) dt}{t^2 - \zeta^2} - \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \beta_{1k} \zeta \ln \frac{x_{k+1}^2 - \zeta^2}{x_k^2 - \zeta^2} + \beta_{2k} \ln \left[ \frac{(x_{k+1} + \zeta)(x_k - \zeta)}{(x_{k+1} - \zeta)(x_k + \zeta)} \right] \right\}, \quad \beta_{1k} = N(\varphi_{k+1} - \varphi_k), \quad \beta_{2k} = \varphi_k - x_k \beta_{1k} \quad (2.8)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\frac{d\Phi_2^s}{d\xi} = -\frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{(t^2 + \xi^2) q^s(t) dt}{(t^2 - \xi^2)^2} - \frac{2}{\pi i} \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \frac{\beta_{2k} x_{k+1} + \beta_{1k} \xi^2}{\xi^2 - x_{k+1}^2} - \frac{\beta_{2k} x_k + \beta_{1k} \xi^2}{\xi^2 - x_k^2} + \frac{\beta_{1k}}{2} \ln \frac{\xi^2 - x_{k+1}^2}{\xi^2 - x_k^2} \right\} \quad (2.9)$$

Поскольку краевое значение  $\Phi^s$  известно, то для определения  $q^s$  из (2.9) при  $\xi = \xi_1 = x + i(\eta^s - a_0)$  получим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\text{Im} \left\{ \xi_1 \int_0^{\infty} \frac{q^s(t) dt}{t^2 - \xi_1^2} \right\} = \frac{\pi}{2} \Phi^s - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \beta_{1k} \xi_1 \ln \frac{x_{k+1}^2 - \xi_1^2}{x_k^2 - \xi_1^2} + \beta_{2k} \arg \left[ \frac{(x_{k+1} + \xi_1)(x_k - \xi_1)}{(x_{k+1} - \xi_1)(x_k + \xi_1)} \right] \right\} \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) решается методом конечных сумм [6], при этом интеграл вычисляется по формуле Симпсона при узлах интегрирования  $\{x_k\}$  ( $K$  — четное). После определения  $q_k^s$  из (2.10) при  $\xi = \xi_1$  находится краевое значение  $d\Phi^s/d\xi$ .

Отметим, что задача определения этого значения по формуле (2.9) при условии (2.10) не является некорректно поставленной [7], в отличие от вспомогательной задачи отыскания  $q^s(x)$  из (2.10). Введение функции  $\chi^s$  позволяет снизить погрешность вычислений, поскольку уменьшается норма правой части (2.10).

3. Численные расчеты выполнялись для случая падения стальной конструкции в воду при значениях параметров:  $v_1 = 0,0147$ ,  $v_2 = 0,05$ ,  $v_4 = 1,57 \cdot 10^{-4}$ ,  $v_5 = 0$ ,  $v_6 = 0,0392$ ,

$v_7=10^{-5}$ ,  $\kappa=1,4$ ,  $\psi=\theta \sin^2(\pi x/4)$ . Относительная толщина пластины  $v_3$  и параметр  $\theta$  варьировались при расчетах в пределах:  $0,005 \leq v_3 \leq 0,040$ ;  $-0,01 \leq \theta \leq 0,01$ .

Отметим, что при  $v_2 > 0,05$  начальный участок рассматриваемых процессов расчитывается согласно [2] при дополнительном предположении о том, что  $W=0$ .

Изменение  $a_0$  приводит, очевидно, к изменению вспомогательной функции  $q^s(x)$ . Однако оказалось, что соответствующие колебания любой нормы  $d\Phi^s/d\xi$  при  $\xi=\xi_1$  будут на несколько порядков меньше. При возрастании  $a_0$  целесообразно увеличить  $N$  и  $K$  для сохранения точности вычислений. Вместе с тем повышение  $N$  и  $K$ , как и снижение  $a_0$ , ведет к росту погрешности округления. При численном эксперименте была установлена устойчивость результатов при  $\varepsilon=2,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $N=8$ ,  $K=14$ ,  $a_0=0,1$  и сохранении в (2.6) трех членов ряда.

Для случая  $\theta=0$  на фиг. 2 представлены кривые 1-3 изменения безразмерного избыточного давления  $P^0=P-1$  по ширине пластины для моментов времени  $\tau=0,500$ ;  $0,805$ ;  $0,855$ . Кривые 1-3 на фиг. 3 дают зависимость  $Q(\tau)$  при  $\theta=0,01$ ;  $0$  и  $-0,01$  соответственно. Сплошные линии на фиг. 2, 3 относятся к случаю  $v_3=0,04$ , пунктирные — к  $v_3=0,008$ .

С развитием погружения относительная скорость газа достигает величины  $U=1$  при  $x=1$ , что ведет к значительному повышению давления в районе кромок пластины и изменению формы эпюры  $P^0$ . При этом резко возрастает кривизна кривой  $Q(\tau)$  и развивается волна давления, движущаяся к середине пластины.

В рассматриваемом диапазоне значений  $\theta$  и  $v_3$  колебания  $P^0(0, T^0)$  и  $\eta(0, T^0)$  не превышают  $\pm 25\%$  относительно средних значений  $P^0(0, T^0) \approx 2,5$  и  $\eta(0, T^0) \approx -0,002$  ( $T^0=vT/h\alpha$ ).

Три взаимных положения тела и водной поверхности, соответствующие моментам времени  $\tau=0,500$ ;  $0,805$ ;  $0,855$  ( $v_3=0,02$ ,  $\theta=0$ ), показаны на фиг. 4. При  $\theta=0$  максимальный упругий прогиб  $W(0, T^0) \approx 2 \cdot 10^{-4}/v_2$ , при  $\theta=0,01$  он возрастает на 10-20%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. (Удар и погружение). Л.: Судостроение, 1976. 199 с.
2. Verhagen I. H. G. The impact of a flat plate on a water surface.— J. Ship Research. 1967, v. 11, No. 4, p. 211-223.
3. Koehler B. R., Jr., Kettleborough C. F. Hydrodynamic impact of a falling body upon a viscous incompressible fluid.— J. Ship Research, 1977, v. 24, No. 3, p. 165-181.
4. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. (Введение в теорию). М.: Наука, 1977. 439 с.
5. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: Наука, Т. 1. 1967. 486 с.; Т. 2. 1968. 624 с.
6. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. (Приближенные функции, дифференциальные и интегральные уравнения). М.: Наука, 1967. 368 с.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
25.V.1981