

УДК 539.3

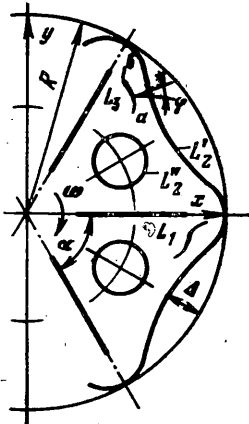
О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ
ОРЕБРЕННОГО ДИСКА СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ
ПРИ НАЛИЧИИ ОТВЕРСТИЙ И ТРЕЩИН

ВОЛКОВ Н. И., ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А.

При расчете элементов некоторых конструкций, в частности вращающихся рабочих колес энергетических установок, возникает необходимость оценки концентрации напряжений в районе отверстий или дефектов типа трещин. В некоторых случаях развитие трещины можно ограничить введением ребер жесткости.

В публикуемой работе рассмотрена модельная задача о напряженном состоянии в диске, ослабленном отверстиями и трещинами и усиленном ребрами жесткости в поле центробежных сил. Предполагается, что диск может иметь некруговую границу, но его геометрия имеет циклически симметричную структуру. Возникающая краевая задача сведена к смешанной системе регулярных и сингулярных интегральных уравнений, реализованных численно на ЭВМ. Проведен параметрический анализ коэффициентов интенсивности напряжений и напряженного состояния в опасных зонах диска. Представлены результаты расчетов.

1. Пусть изотропный диск, ослабленный циклически симметричной системой n отверстий и разрезов, а также усиленный радиальными ребрами жесткости, вращается с постоянной угловой скоростью ω (фиг. 1). Контур диска может быть некруговым, но должен обладать указанной выше группой симметрии. Предполагается, что ребра непрерывно скреплены с диском по линиям L_1 , расположены симметрично относительно его срединной плоскости и работают на растяжение — сжатие. Полная граница диска состоит из простых замкнутых (внешняя граница и отверстия) и разомкнутых (трещины) контуров, обладающих непрерывной кривизной.



Фиг. 1

Для решения задачи напряжения в диске представим в виде

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(1)} \quad (1.1)$$

где $\sigma_{ik}^{(0)}$ — напряжения, обусловленные действием центробежных сил, $\sigma_{ik}^{(1)}$ — дополнительные возмущения, вызванные наличием концентраторов и ребер.

Согласно [1], дополнительные перемещения и напряжения выражаются через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, комплексного переменного z , которые удобно представить в виде

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(z), \quad \Psi(z) = \sum_{m=1}^3 \Psi_m(z) \quad (1.2)$$

В силу групповой симметрии задачи функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ должны удовлетворять условиям периодичности

$$\Phi(z) = \Phi(ze^{i\kappa\alpha}), \quad \Psi(z) = e^{2i\kappa\alpha}\Psi(ze^{i\kappa\alpha}), \quad \alpha = 2\pi/n \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (1.3)$$

где α — угол раствора фундаментального сектора.

Функции $\Phi_m(z)$ и $\Psi_m(z)$ ($m=1, 2$) представим в виде обобщенных интегралов типа Коши с автоморфными ядрами

$$\Phi_1(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\kappa\alpha} \int_{L_1} \frac{p(x) dx}{xe^{i\kappa\alpha} - z} \quad (1.4)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\kappa\alpha} \int_{L_1} \frac{p(x) dx}{xe^{i\kappa\alpha} - z} + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{L_1} \frac{xp(x) dx}{(xe^{i\kappa\alpha} - z)^2}$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\kappa\alpha} \int_{L_2} \frac{q(t) dt}{te^{i\kappa\alpha} - z}$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\kappa\alpha} \int_{L_2} \frac{\overline{q(t)} dt}{te^{i\kappa\alpha} - z} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{L_2} \frac{\overline{t}q(t) dt}{(te^{i\kappa\alpha} - z)^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_0}{(z - z_0 e^{i\kappa\alpha})^2}$$

$$\kappa = \frac{3-\mu}{1+\mu}, \quad b_0 = i \int_{L_2''} [\overline{t}q(t) dt - t\overline{q(t)} dt]$$

$$z = x + iy, \quad L_2 = L_2' \cup L_2'' \quad (x \in L_1, t \in L_2, z_0 \in s_0)$$

Здесь $p(x)$ и $q(t)$ — искомые функции, L_2 — часть границы диска в пределах фундаментального сектора, s_0 — область, занятая отверстием, ограниченным кривой L_2'' , μ — коэффициент Пуассона материала диска.

Интегрирование по L_2 производится так, чтобы при обходе область оставалась слева; $p(x)$ имеет смысл контактного усилия взаимодействия.

Функции $\Phi_3(z)$ и $\Psi_3(z)$, учитывающие наличие трещин, выберем в виде [2] с учетом циклической симметрии

$$\Phi_3(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\kappa\alpha} \int_{L_3} \frac{\Omega(\tau) d\tau}{\tau e^{i\kappa\alpha} - z} \quad (1.5)$$

$$\Psi_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\kappa\alpha} \int_{L_3} \frac{\overline{\Omega(\tau)} d\tau}{\tau e^{i\kappa\alpha} - z} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{L_3} \frac{\overline{\tau} \Omega(\tau) d\tau}{(\tau e^{i\kappa\alpha} - z)^2} \quad (\tau \in L_3)$$

Предполагая, что полная граница диска свободна от усилий, представим краевые условия в виде

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\varphi} [\overline{t}\Phi'(t) + \Psi(t)] + M(t) = 0 \quad (1.6)$$

$$M(t) = -\frac{1}{8} [2(1+\mu) + (1-\mu)e^{2i(\varphi-\theta)}] \rho \omega^2 r^2, \quad t = re^{i\theta} \quad (t \in L = \bigcup_{m=2}^3 L_m)$$

Здесь φ — угол между нормалью к L_m ($m=2, 3$) в точке t и осью x , для трещины φ — угол между внешней нормалью к левому берегу L_3 и осью x (точка a — начало, b — конец трещины), ρ — плотность материала диска.

Помимо краевых условий (1.6) необходимо выполнить условие сопряжения ребра и диска

$$u'(x_0) = \frac{h}{E_1 F} \int_c^{x_0} p(x) dx, \quad u' = \frac{du}{dx} \quad (1.7)$$

Здесь u — перемещение в диске вдоль оси x , h — толщина диска, E, F — жесткость ребра, c — начало ребра.

2. Подставляя предельные значения соответствующих функций из (1.4) и (1.5) в условие сопряжения (1.7) и краевые условия (1.6) и добавляя, где требуется, функционалы [3, 4], обеспечивающие разрешимость уравнений, приходим к смешанной системе сингулярных и регулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \delta_j^2 Q_j(t_0) + \sum_{n=1}^3 \left\{ \int_{L_m} P_m(t) K_{jm}(t, t_0) dt + \int_{L_m} Q_m(t) G_{jm}(t, t_0) \overline{dt} + \right. \\ & \left. + \delta_m^2 \left[\int_{L_m''} P_m(t) K_{jm}^*(t, t_0) dt + \int_{L_m''} Q_m(t) G_{jm}^*(t, t_0) \overline{dt} \right] \right\} + \\ & + \delta_j^4 V \int_c^{t_0} P_j(t) dt + \delta_j^2 F_j + M_j(t_0) = 0, \quad V = \frac{2Gh}{E_1 F} \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$P_1(t) = p(t), \quad P_2(t) = q(t), \quad P_3(t) = \Omega(t), \quad Q_1(t) = 0$$

$$Q_2(t) = \overline{q(t)}, \quad Q_3(t) = \overline{\Omega(t)}, \quad A_k(t, t_0) = \frac{1}{te^{ik\alpha} - t_0} \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

$$K_{11}(t, t_0) = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ -\frac{2\kappa}{t-t_0} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n-1} [t(e^{-2ik\alpha} - 1) \overline{[A_k(t, t_0)]}^2 - \right. \\ \left. - \kappa e^{ik\alpha} [A_k(t, t_0) + \overline{A_k(t, t_0)}] \right\} \quad ((t, t_0) \in L_1)$$

$$K_{12}(t, t_0) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\alpha} [\kappa A_k(t, t_0) + \overline{A_k(t, t_0)}] \right\} \quad (t \in L_1, t_0 \in L_2)$$

$$G_{12}(t, t_0) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ik\alpha} (\overline{t} e^{-ik\alpha} - t e^{ik\alpha}) \overline{[A_k(t, t_0)]}^2 \right\} \quad (t \in L_1, t_0 \in L_2)$$

$$K_{13}(t, t_0) = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\alpha} [\kappa A_k(t, t_0) - \overline{A_k(t, t_0)}] \right\} \quad (t \in L_1, t_0 \in L_3)$$

$$G_{13}(t, t_0) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{k=0 \\ \alpha=y}}^{n-1} e^{-ik\alpha} \left[\overline{A_k(t, t_0)} - \frac{[A_k(t, t_0)]^2}{A_k(t, t_0)} \right] \right\}$$

$$K_{21}(t, t_0) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ e^{-ik\alpha} \overline{A_k(t, t_0)} + e^{ik\alpha} [1 + \kappa e^{2i(\varphi_0 - k\alpha)}] A_k(t, t_0) + \right. \\ \left. + e^{i(2\varphi_0 + k\alpha)} \frac{[A_k(t, t_0)]^2}{A_k(t, t_0)} \right\} \quad (t \in L_1, t_0 \in L_2)$$

$$K_{22}(t, t_0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ A_k(t, t_0) + e^{2i\varphi_0} \frac{[A_k(t, t_0)]^2}{A_k(t, t_0)} \right\} \quad ((t, t_0) \in L_2)$$

$$G_{22}(t, t_0) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ik\alpha} [\overline{A_k(t, t_0)} + e^{2i\varphi_0} A_k(t, t_0)] \quad ((t, t_0) \in L_2)$$

$$K_{23}(t, t_0) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i k \alpha} \left\{ e^{2i \varphi_0} \frac{[A_k(t, t_0)]^2}{A_k(t, t_0)} + A_k(t, t_0) \right\} \quad (t \in L_3, t_0 \in L_2)$$

$$G_{23}(t, t_0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i k \alpha} [\overline{A_k(t, t_0)} - e^{2i \varphi_0} A_k(t, t_0)] \quad (t \in L_3, t_0 \in L_2)$$

$$K_{31}(t, t_0) = K_{21}(t, t_0) \quad (t \in L_1, t_0 \in L_3)$$

$$K_{32}(t, t_0) = -K_{23}(t, t_0), \quad G_{32}(t, t_0) = G_{22}(t, t_0) \quad (t \in L_2, t_0 \in L_3)$$

$$K_{33}(t, t_0) = K_{23}(t, t_0), \quad G_{33}(t, t_0) = G_{23}(t, t_0) \quad ((t, t_0) \in L_3)$$

$$B_k(t_0, z_0) = \frac{1}{(t_0 - z_0 e^{i k \alpha})^2} \quad (z_0 \in S_0) \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

$$K_{12}^*(t, t_0) = -\operatorname{Re} \left\{ i \sum_{k=0}^{n-1} \overline{t B_k(t_0, z_0)} \right\} \quad (t \in L_2'', t_0 \in L_1)$$

$$G_{12}^*(t, t_0) = \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{k=0}^{n-1} t B_k(t_0, z_0) \right\} \quad (t \in L_2'', t_0 \in L_1)$$

$$K_{22}^*(t, t_0) = -i e^{2i \varphi_0} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{t B_k(t_0, z_0)} \quad (t \in L_2'', t_0 \in L_2)$$

$$G_{22}^*(t, t_0) = i e^{2i \varphi_0} \sum_{k=0}^{n-1} t B_k(t_0, z_0) \quad (t \in L_2'', t_0 \in L_2)$$

$$K_{32}^*(t, t_0) = K_{22}^*(t, t_0), \quad G_{32}^*(t, t_0) = G_{22}^*(t, t_0) \quad (t \in L_2'', t_0 \in L_3)$$

$$F_j = \frac{n}{2\pi i} \int_{L_j} [t^{-1} P_j(t) dt + \bar{t}^{-1} Q_j(t) \bar{d}\bar{t}] \quad (t \in L_2)$$

$$M_j(t_0) = -\frac{3}{8} (1-\mu) \rho \omega^2 t_0^2 \quad (t_0 \in L_1) \quad (j=1) \quad M_j(t_0) = M(t_0)$$

$$\delta_j^1 = 1 \quad (j=1), \quad \delta_j^1 = 0 \quad (j \neq 1), \quad \delta_j^2 = 1 \quad (j=2), \quad \delta_j^2 = 0 \quad (j \neq 2),$$

$$\delta_m^2 = 1 \quad (m=2), \quad \delta_m^2 = 0 \quad (m \neq 2)$$

Здесь $t=x$ при $t \in L_1$, $t=\tau$ при $t \in L_3$, G — модуль сдвига материала диска. К полученной системе интегральных уравнений (2.1) необходимо присовокупить дополнительные условия однозначности перемещений [2] и статическое условие равновесия ребра

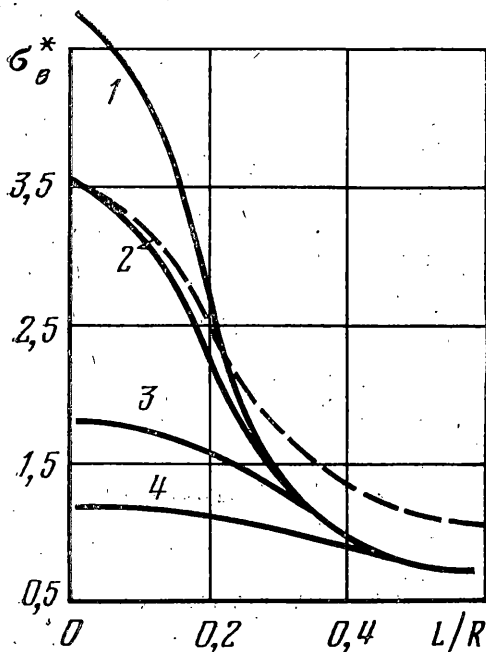
$$\int_{L_3} P_3(t) dt = 0, \quad \int_{L_1} P_1(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

3. Система уравнений (2.1), (2.2) решалась численно. Уравнения Фредгольма сводились к системам линейных алгебраических уравнений с использованием квадратурных формул типа Гаусса, сингулярные уравнения — при помощи прямого метода решения типа Мультоппа [5].

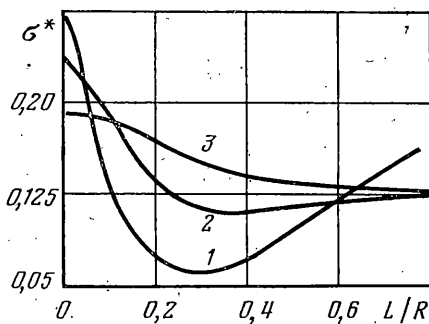
Граница L_2 фундаментального сектора задавалась в виде (R_0 — радиус отверстия, R и Δ — варьируемые параметры, z_0 — аффикс центра отверстия):

$$t = R(1 - \Delta \sin \vartheta) e^{2i\vartheta/n}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \quad (t \in L_2')$$

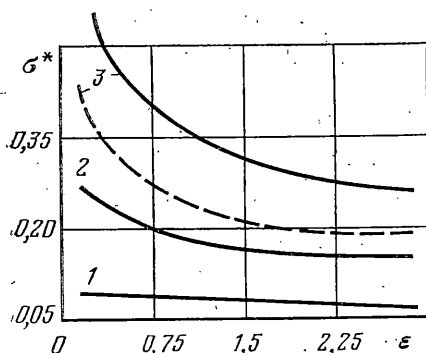
$$t = z_0 - R_0 e^{i(\alpha/2 - \psi)}, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (t \in L_2'')$$



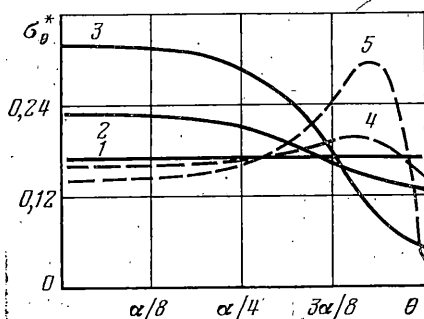
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Контуры L_2' и L_2'' были разбиты на равные части, L_1 и L_3 — по чебышевским узлам, причем число точек разбиения доходило до 25, 72, 11, 27 соответственно. Дальнейшее дробление контуров не приводило к существенным уточнениям результатов. Расчеты выполнены на ЭВМ ЕС-1022.

В качестве примера представлены некоторые результаты расчетов вращающегося стального диска при $R=250$ мм; $n=6$; $\omega=10^3$ с $^{-1}$; $\Delta=0,05$; $\mu=0,3$; $E^*=E/(\rho\omega^2R^2)=0,157 \cdot 10^4$.

Далее предполагается, что центр отверстия и середина трещины расположены на оси симметрии фундаментального сектора.

На фиг. 2 представлен случай, когда трещины отсутствуют, а в пределах фундаментального сектора имеется круговое отверстие, центр которого расположен на расстоянии $R_1/R=0,6$ от центра диска. На границах фундаментального сектора имеются ребра, длина и жесткость которых варьируются. Показано распределение максимального безразмерного окружного напряжения $\sigma_0^*=\sigma_0/(\rho\omega^2R^2)$ на контуре L_2'' отверстия в зависимости от относительной длины L/R ребер жесткости при различных значениях параметра $\epsilon=\delta/s$ (s и δ — соответственно длина дуги между

центрами соседних отверстий и дуговая перемычка между ними). Кривые 1-4 соответствуют значениям $\varepsilon=0,083; 0,108; 0,235; 0,49$. Сплошные кривые соответствуют абсолютно жестким ребрам, пунктирная — значению $[E_1 F]^* = E_1 F / (\rho \omega^2 R^4) = 35,8$.

На фиг. 3 приведены результаты расчетов для случая, когда отверстия отсутствуют, а в пределах фундаментального сектора имеется одна трещина, расположенная вдоль дуги окружности $R_1/R=0,6$. На границах фундаментального сектора расположены ребра, длина и жесткость которых варьируются. Представлены графики величины $\sigma^* = K_\sigma / (\rho \omega^2 R^2)$ (K_σ — коэффициент интенсивности нормальных напряжений [6]) в зависимости от относительной длины L/R ребер жесткости при различных значениях $\varepsilon = \delta/s$ (s и δ — соответственно длина дуги между центрами соседних трещин и дуговая перемычка между их ближайшими вершинами). Кривые 1-3 соответствуют значениям $\varepsilon=0,083; 0,142; 0,40$ при абсолютно жестких ребрах.

Графики фиг. 4 иллюстрируют взаимное влияние радиальной трещины и кругового отверстия, расположенных в пределах фундаментального сектора.

Показано изменение величины $\sigma^* = K_\sigma / (\rho \omega^2 R^2)$ в вершине a в зависимости от параметра $\varepsilon = \delta/s$ (s — расстояние между центром отверстия и серединой трещины, δ — перемычка между контуром отверстия и вершиной трещины) при различных значениях относительной длины l/R трещины. Кривые 1-3 соответствуют значениям $l/R=0,008; 0,04; 0,16$. Сплошные линии даны для диска без ребер жесткости, пунктирная — для диска с ребрами при $L/R=0,72$.

Значения безразмерного окружного напряжения $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta / (\rho \omega^2 R^2)$ на внешнем контуре в функции центрального угла θ для кругового ($\Delta=0$) диска без отверстий и ребер жесткости при наличии радиальных трещин приведены на фиг. 5.

Кривая 1 соответствует однородному диску без трещин, кривые 2, 3 — значениям $\delta/l=0,7; 0,5$ (l и δ — безразмерные длина трещины и кратчайшее расстояние от границы диска до ближайшей вершины трещины) при расположении середины трещины на расстоянии $R_1/R=0,6$ от центра диска. Кривые 4, 5 соответствуют значениям $\delta/l=1,0; 0,25$ при $R_1/R=0,88$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
2. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5, с. 91-97.
3. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. — Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1, с. 25-28.
4. Паргон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
5. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
6. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Сумы

Поступила в редакцию
19.XI.1980