

УДК 629.13.03:001.2

К ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

ПУХЛИЙ В. А., ХАРЧЕНКО А. Г.

Обобщение основных уравнений теории трехслойных пологих оболочек на случай, когда наружные слои имеют переменную толщину, а толщина заполнителя постоянна, дано в работе [1]. Показано, что уравнения и граничные условия для оболочки не отличаются от соответствующих уравнений оболочки постоянной жесткости, за исключением того, что в выражении для усилий несущих слоев появляются члены, учитывающие переменность толщины слоев. В [2] обобщен основной подход работы [1] для случаев, когда толщины как несущих слоев, так и заполнителя плавно изменяются, модули упругости несущих слоев постоянны по толщине, но плавно изменяются по его поверхности и толщине. Уравнения для трехслойных пластин с заполнителем переменной толщины получены в [3]. Наружные слои пластины выполнены из ортотропного материала и имеют разную по постоянной толщину. Теория, изложенная в [1, 2], обобщается в [4] на случай, когда метрика срединной поверхности заполнителя и несущих слоев различна. Указанная теория применяется для пластин и оболочек, не являющихся тонкими, и для случая, когда производная $(dh/dx)^2$ сравнима с единицей.

Здесь на основе кинематической гипотезы ломаной линии для всего пакета из вариационного принципа Лагранжа получены уравнения в перемещениях пологих трехслойных оболочек переменной жесткости с изотропными внешними слоями и жестким трансверсально-изотропным заполнителем. К решению полученной системы уравнений применяется аналитический подход, при котором на первом этапе двумерная задача для системы эллиптических уравнений методом интегральных соотношений [5] сводится к одномерной краевой задаче для системы обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами.

На втором этапе проводится интегрирование полученной системы уравнений модифицированным методом последовательных приближений [6, 7]. Указанный алгоритм аналитического решения двумерных краевых задач для систем эллиптических дифференциальных уравнений с обоснованием сходимости изложен достаточно полным образом в [8, 9]. На основе данного подхода в [10, 11] рассмотрен ряд задач по расчету лопаток радиальных нагнетателей.

1. При выводе уравнений равновесия для несущих слоев используют гипотезы Кирхгофа — Лява, для заполнителя — гипотеза о несжимаемости материала в поперечном направлении; рассматривается общий для всех слоев приведенный коэффициент Пуассона; предполагается, что деформация поперечного сдвига по толщине заполнителя распределена по некоторому известному закону; срединная поверхность заполнителя совпадает с плоскостью Ox_1x_2 .

Положительную нормальную координату z будем отсчитывать в сторону внешней нормали к исходной поверхности. Называя несущий слой, расположенный со стороны внешней нормали, первым, со стороны внутренней нормали — вторым, а заполнитель — третьим, введем следующие обозначения (фиг. 1): $h = h(x_1, x_2)$ — толщина оболочки, $h_k = h_k(x_1, x_2)$ — толщина слоев ($k=1, 2, 3$), E_k и ν_k — модуль упругости и коэффициенты Пуассона слоев, G — модуль поперечного сдвига заполнителя, $\alpha_i(df/dz)$ — закон распределения поперечных сдвигов по толщине заполнителя. Остальные обозначения совпадают с [12].

Рассматривая заполнитель как трехмерное тело, на основании формулы для деформации поперечного сдвига

$$\varepsilon_{iz}^3 = \partial u_i^z / \partial z + w_{,i} = \alpha_i df / dz \quad (1.1)$$

получим

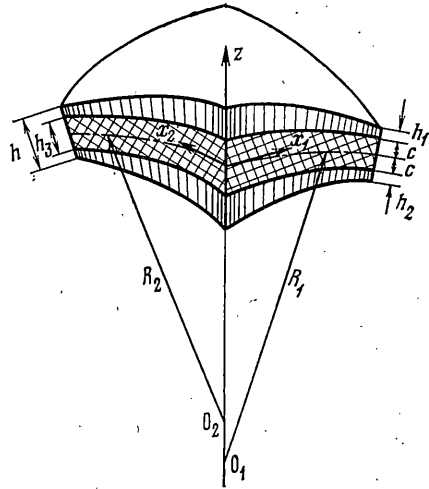
$$u_i^z = u_i + \alpha_i f(z) - zw_{,i} \quad (-c \leq z \leq c) \quad (1.2)$$

В формулах (1.1) и (1.2) нижний индекс i , следующий после запятой, означает частное дифференцирование по координате x_i .

Тангенциальные перемещения поверхностей соприкосновения заполнителя с первым и вторым слоями запишутся так:

$$u_i^1 = u_i + ct_+ \alpha_i - cw_{,i} \quad (z=c) \quad (1.3)$$

$$u_i^2 = u_i - ct_- \alpha_i + cw_{,i} \quad (z=-c)$$



Фиг. 1

а тангенциальные перемещения несущих слоев представим в виде

$$u_i^{1z} = u_i + ct_+ \alpha_i - cw_{,i} - (z-c)w_{,i} \quad (c \leq z \leq c+h_1) \quad (1.4)$$

$$u_i^{2z} = u_i - ct_- \alpha_i + cw_{,i} - (z+c)w_{,i} \quad (-c-h_2 \leq z \leq -c)$$

Определим деформации слоев

$$\varepsilon_{ij}^1 = e_{ij} + ct_+ \alpha_{ij} + c\kappa_{ij} + (z-c)\kappa_{ij} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{ij}^2 = e_{ij} - ct_- \alpha_{ij} - c\kappa_{ij} + (z+c)\kappa_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}^3 = e_{ij} + f(z)\alpha_{ij} + z\kappa_{ij}, \quad \varepsilon_{iz}^3 = \alpha_i df / dz \quad (1.6)$$

$$e_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) + k_{ij} w + 1/2 w_{,i} w_{,j}$$

$$\alpha_{ij} = 1/2 (\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i}), \quad \kappa_{ij} = -w_{,ij}$$

На основе закона Гука запишем напряжения в слоях (δ_{ij} — символ Кронекера):

$$\sigma_{ij}^h = \frac{E_h}{1-\nu_h^2} [(1-\nu)\varepsilon_{ij}^h + \nu\delta_{ij}(\varepsilon_{11}^h + \varepsilon_{22}^h)], \quad \sigma_{iz}^3 = G\alpha_i \frac{df}{dz}$$

Вывод исходных уравнений проведен на основе вариационного принципа Лагранжа, согласно которому $-\delta\Pi + \delta A_1 + \delta A_2 = 0$, где $\delta\Pi$ — вариация работы внутренних сил, δA_1 — вариация работы внешней нагрузки, приложенной к поверхности оболочки, δA_2 — вариация внешних контурных усилий.

Выражения для вариации работы внутренних сил упругости оболочки с учетом сдвига в заполнителе будут иметь вид

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \iint_{\Omega} \left[\int_c^{c+h_1} \sum_{i,j} \sigma_{ij}^1 \delta\varepsilon_{ij}^1 dz + \int_{-c-h_2}^{-c} \sum_{i,j} \sigma_{ij}^2 \delta\varepsilon_{ij}^2 dz + \right. \\ & \left. + \int_{-c}^c \left(\sum_{i,j} \sigma_{ij}^3 \delta\varepsilon_{ij}^3 + \sum_i \sigma_{iz}^3 \delta\varepsilon_{iz}^3 \right) dz \right] dx_1 dx_2 = \\ = & \iint_{\Omega} \left(\sum_{i,j} N_{ij} \delta\varepsilon_{ij} + \sum_{i,j} H_{ij} \delta\alpha_{ij} + \sum_{i,j} M_{ij} \delta\kappa_{ij} + \sum_i Q_i^0 \delta\alpha_i \right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Проинтегрировав выражение (1.7) по частям, получим

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi = & - \int \int \left\{ \sum_i (N_{1i,1} + N_{2i,2}) \delta u_i - \sum_i (H_{1i,1} + H_{2i,2} - Q_i^0) \times \right. \\
 & \times \delta \alpha_i + [M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} - k_{11}N_{11} - 2k_{12}N_{12} - k_{22}N_{22} + \\
 & + (w_{,1}N_{11})_{,1} + (w_{,1}N_{12})_{,2} + (w_{,2}N_{12})_{,1} + (w_{,2}N_{22})_{,2}] \delta w \Big\} dx_1 dx_2 + \\
 & + \int_0^{l_1} \left[\sum_i N_{12} \delta u_i + \sum_i H_{i2} \delta \alpha_i - M_{22} \delta w_{,2} + (M_{22,2} + 2M_{12,1} + w_{,1}N_{12} + \right. \\
 & \left. + w_{,2}N_{22}) \delta w \right] dx_1 \Big|_0^{l_2} + \int_0^{l_2} \left[\sum_i N_{11} \delta u_i + \sum_i H_{i1} \delta \alpha_i - M_{11} \delta w_{,1} + \right. \\
 & \left. + (M_{11,1} + 2M_{12,2} + w_{,2}N_{12} + w_{,1}N_{11}) \delta w \right] dx_2 \Big|_0^{l_1} - 2M_{12} \delta w \Big|_0^{l_1} \Big|_0^{l_2}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где l_i — размеры оболочки в направлении x_i .

Запишем выражение для вариации работы внешней поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности заполнителя

$$\delta A_1 = \int \int (p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + q \delta w) dx_1 dx_2 \tag{1.9}$$

где p_1, p_2, q — компоненты поверхностной нагрузки в направлении осей x_1, x_2, z .

Из вариационного принципа Лагранжа и выражений (1.8), (1.9) получим уравнения равновесия и естественные граничные условия. Выпишем уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
 N_{1i,1} + N_{2i,2} = & -p_i, \quad H_{1i,1} + H_{2i,2} = Q_i^0 \\
 M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} - N_{11}(k_{11} + \kappa_{11}) - 2N_{12}(k_{12} + \kappa_{12}) - \\
 - N_{22}(k_{22} + \kappa_{22}) + q - p_1 w_{,1} - p_2 w_{,2} = & 0
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Положим $u_i = u_i^0 + 1/2 h \xi_i$, где $\xi_i = c_{13} w_{,i} - c_{12} \alpha_i$. Кроме того, введем поверхность приведения, расположенную на расстоянии $1/2 h c_{13}$ от срединной поверхности заполнителя.

Тогда выражения для усилий и моментов примут вид

$$N_{ij} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu) e_{ij}^0 + \delta_{ij} \nu e_{hh}^0] \tag{1.11}$$

$$e_{ij}^0 = 1/2 (u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0) + 1/2 w_{,i} w_{,j} + k_{ij} w, \quad e_{hh}^0 = e_{11}^0 + e_{22}^0$$

$$H_{ij} = D \{ \eta_1 [(1-\nu) \alpha_{ij} + \nu \delta_{ij} \alpha_{hh}] + \eta_2 [(1-\nu) \kappa_{ij} + \nu \delta_{ij} \kappa_{hh}] \} \tag{1.12}$$

$$\alpha_{hh} = \alpha_{11} + \alpha_{22}, \quad \kappa_{hh} = \kappa_{11} + \kappa_{22} \tag{1.13}$$

$$M_{ij} = D \{ \eta_2 [(1-\nu) \alpha_{ij} + \nu \delta_{ij} \alpha_{hh}] + \eta_3 [(1-\nu) \kappa_{ij} + \nu \delta_{ij} \kappa_{hh}] \}$$

Подставляя в уравнения (1.10) выражения для усилий, моментов и перерезывающих сил (1.11)–(1.13), получим разрешающую систему пяти нелинейных уравнений 12-го порядка относительно функций $u_1^0, u_2^0, \alpha_1, \alpha_2, w$, описывающую напряженно-деформированное состояние трехслойной оболочки переменной жесткости с изотропными внешними слоя-

ми и жестким трансверсально-изотропным заполнителем.

$$\begin{aligned}
 & \frac{B}{1-\nu^2} \left[u_{1,11}^0 + k_{11}w_{,1} + w_{,1}w_{,11} + \frac{1+\nu}{2} (u_{2,12}^0 + w_{,12}w_{,2}) + \frac{1-\nu}{2} (u_{1,22}^0 + w_{,1}w_{,22}) \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{1-\nu^2} B_{,1} \left[u_{1,1}^0 + \nu u_{2,2}^0 + k_{11}w + \frac{1}{2} w_{,1}^2 + \frac{\nu}{2} w_{,2}^2 \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{2(1+\nu)} B_{,2} [u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0 + w_{,1}w_{,2}] = -p_1 \\
 & \frac{B}{1-\nu^2} \left[u_{2,22}^0 + \nu k_{11}w_{,2} + w_{,2}w_{,22} + \frac{1+\nu}{2} (u_{1,12}^0 + w_{,1}w_{,12}) + \frac{1-\nu}{2} (u_{2,11}^0 + w_{,11}w_{,2}) \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{2(1+\nu)} B_{,1} (u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0 + w_{,1}w_{,2}) + \\
 & \quad + \frac{1}{1-\nu^2} B_{,2} \left[u_{2,2}^0 + \nu u_{1,1}^0 + \frac{1}{2} w_{,2}^2 + \nu k_{11}w + \frac{\nu}{2} w_{,1}^2 \right] = -p_2 \quad (1.14) \\
 & D \left[\eta_1 \left(\alpha_{1,11} + \frac{1+\nu}{2} \alpha_{2,12} + \frac{1-\nu}{2} \alpha_{1,22} \right) + \eta_{1,1} (\alpha_{1,1} + \nu \alpha_{2,2}) + \frac{1-\nu}{2} \eta_{1,2} (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) - \right. \\
 & \quad \left. - \eta_2 (\nabla^2 w)_{,1} - \eta_{2,1} (w_{,11} + \nu w_{,22}) - \eta_{2,2} w_{,12} \right] + D_{,1} [\eta_1 (\alpha_{1,1} + \nu \alpha_{2,2}) - \eta_2 (w_{,11} + \nu w_{,22})] + \\
 & \quad + (1-\nu) D_{,2} \left[\frac{\eta_1}{2} (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) - \eta_2 w_{,12} \right] = Gh_3 \tau_1 \alpha_1 \\
 & D \left[\eta_1 \left(\alpha_{2,22} + \frac{1+\nu}{2} \alpha_{1,12} + \frac{1-\nu}{2} \alpha_{2,11} \right) + \eta_{1,2} (\alpha_{2,2} + \nu \alpha_{1,1}) + \frac{1-\nu}{2} \eta_{1,1} (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) - \right. \\
 & \quad \left. - (\nabla^2 w)_{,2} - \eta_{2,2} (w_{,22} + \nu w_{,11}) - (1-\nu) \eta_{2,1} w_{,12} + (1-\nu) D_{,1} \left[\frac{1}{2} \eta_1 (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) - \eta_2 w_{,12} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + D_{,2} [\eta_1 (\alpha_{2,2} + \nu \alpha_{1,1}) - \eta_2 (w_{,22} + \nu w_{,11})] = Gh_3 \tau_1 \alpha_2 \right. \\
 & D[\eta_3 \nabla^4 w + 2\eta_{3,1} (\nabla^2 w)_{,1} + 2\eta_{3,2} (\nabla^2 w)_{,2} + \nabla^2 \eta_3 \nabla^2 w - (1-\nu) L(\eta_3, w)] + \\
 & + 2D_{,1} [\eta_3 (\nabla^2 w)_{,1} + \eta_{3,1} (w_{,11} + \nu w_{,22}) - (1-\nu) \eta_{3,2} w_{,12}] + 2D_{,2} [\eta_3 (\nabla^2 w)_{,2} + \eta_{3,2} (w_{,22} + \nu w_{,11}) + \\
 & \quad + (1-\nu) \eta_{3,1} w_{,12}] + \eta_3 \nabla^2 D \nabla^2 w - (1-\nu) \eta_3 L(D, w) - D \{ \eta_2 [(\nabla^2 \alpha_1)_{,1} + (\nabla^2 \alpha_2)_{,2}] + \\
 & \quad + \eta_{2,1} [2\alpha_{1,11} + (1-\nu) \alpha_{1,22} + (1+\nu) \alpha_{2,12}] + \eta_{2,2} [2\alpha_{2,22} + (1-\nu) \alpha_{2,11} + (1+\nu) \alpha_{1,12}] + \\
 & \quad + \alpha_{1,1} (\eta_{2,11} + \nu \eta_{2,22}) + \alpha_{2,2} (\eta_{2,22} + \nu \eta_{2,11}) + (1-\nu) \alpha_{1,22} + 2\eta_{2,1} (\alpha_{1,1} + \nu \alpha_{2,2}) + \\
 & \quad + (1-\nu) \eta_{2,2} (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) - D_{,2} \{ \eta_2 [2\alpha_{2,22} + (1+\nu) \alpha_{1,12} + (1-\nu) \alpha_{2,11}] + 2\eta_{2,2} (\alpha_{2,2} + \nu \alpha_{1,1}) + \\
 & \quad + (1-\nu) \eta_{2,1} (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) \} - D_{,1,1} \eta_2 (\alpha_{1,1} + \nu \alpha_{2,2}) - D_{,2,2} \eta_2 (\alpha_{2,2} + \nu \alpha_{1,1}) - \\
 & \quad - (1-\nu) \eta_2 D_{,12} (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) + \frac{B}{1-\nu^2} \left[u_{1,1}^0 + \nu u_{2,2}^0 + k_{11}w + \frac{1}{2} (w_{,1}^2 + \nu w_{,2}^2) \right] (k_{11} - w_{,11}) - \\
 & \quad - \frac{B}{1+\nu} [u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0 + w_{,1}w_{,2}] w_{,12} - \\
 & \quad - \frac{B}{1-\nu^2} \left[u_{2,2}^0 + \nu u_{1,1}^0 + \nu k_{11}w + \frac{1}{2} (w_{,2}^2 + \nu w_{,1}^2) \right] w_{,22} + p_1 w_{,1} + p_2 w_{,2} = q
 \end{aligned}$$

2. Исследуем напряженно-деформированное состояние трехслойной лопатки радиального нагнетателя, которая представляет собой пологую цилиндрическую трехслойную панель, трапецевидную в плане (фиг. 2, $\eta_2 = \alpha(k_1 m \xi + 1)$, $\eta_1 = k_1 m \xi + 1$). Внешние слои имеют одинаковую толщину, а заполнитель — переменную толщину в направлении координаты x_1 ($h_1 = h_2 = \text{const}$, $h_3 = h_3(x_1)$). По краям, прилегающим к дискам, лопатка жест-

ко заземлена. Граничные условия имеют вид

$$w = w_{,2} = u_1 = u_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (2.1)$$

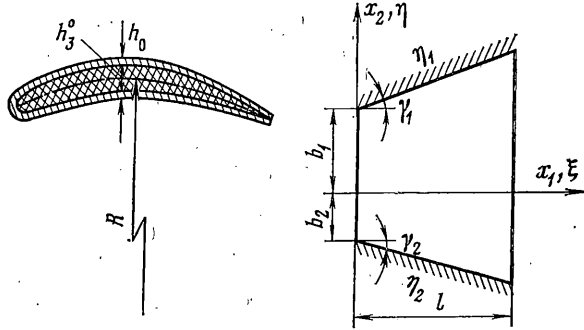
По входной и выходной кромкам лопатки граничные условия соответствуют свободному краю

$$N_{11} = N_{12} = M_{11} = H_{11} = H_{12} = Q_{11} + M_{12,2} = 0 \quad (2.2)$$

Введем систему безразмерных координат $\xi = x_1/l$, $\eta = x_2/b_1$, $m = l/b_1$ и безразмерные функции перемещений $w_1 = w/h_0$, $u_1 = u_1^0/h_0$, $u_2 = u_2^0/h_0$, где h_0 — характерная толщина лопатки.

Функции изменения толщины лопатки h и толщины заполнителя h_3 задаются при помощи кубических сплайнов f_1 и f_2 :

$$\begin{aligned} h &= h_0 \lambda_1 f_1 = h_0 \lambda_1 [a_{1i} + a_{2i}(\xi - \xi_{i-1}) + a_{3i}(\xi - \xi_{i-1})^2 + a_{4i}(\xi - \xi_{i-1})^3] \\ h_3 &= h_3^0 \lambda_2 f_2 = h_3^0 \lambda_2 [b_{1i} + b_{2i}(\xi - \xi_{i-1}) + b_{3i}(\xi - \xi_{i-1})^2 + b_{4i}(\xi - \xi_{i-1})^3] \end{aligned}$$



Фиг. 2

где h_3^0 — характерная толщина заполнителя, $\lambda_1 = l/h_0$ и $\lambda_2 = l/h_3^0$ — безразмерные параметры лопатки.

Для данного случая запишем систему линейных уравнений задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu^2} u_{1,11} + \frac{m^2}{2(1-\nu)} u_{1,22} + \frac{s_1}{(1-\nu^2)} u_{1,1} + \frac{m}{2(1-\nu)} u_{2,12} + \frac{\nu m s_1}{(1-\nu^2)} u_{2,2} + \\ + \frac{l}{(1-\nu^2)R} w_{1,1} + \frac{l s_1}{(1-\nu^2)R} w_1 = - \frac{p_1 l^2}{b h_0} \\ \frac{m}{2(1-\nu)} u_{1,12} + \frac{m s_1}{2(1+\nu)} u_{1,2} + \frac{1}{2(1+\nu)} u_{2,11} + \frac{m^2}{1-\nu^2} u_{2,22} + \\ + \frac{s_1}{2(1+\nu)} u_{2,1} + \frac{\nu m l}{(1-\nu^2)R} w_{1,2} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 \left[\alpha_{1,11} + \frac{(1-\nu) m^2}{2} \alpha_{1,22} + \frac{(1+\nu) m}{2} \alpha_{2,12} \right] + (\eta_{1,1} + \eta_1 s_5) [\alpha_{1,1} + \nu m \alpha_{2,2}] - \\ - s_6 \alpha_1 - \eta_2 \lambda_1^{-1} (\nabla_m^2 w_1)_{,1} - (\eta_{2,1} + \eta_2 s_5) \lambda_1^{-1} (w_{1,11} + \nu m^2 w_{1,22}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2 \left[m^2 \alpha_{2,22} + \frac{1-\nu}{2} \alpha_{2,11} + \frac{(1+\nu) m}{2} \alpha_{1,12} \right] + \frac{1-\nu}{2} (\eta_{1,1} + \eta_1 s_5) (\alpha_{2,1} + m \alpha_{1,2}) - s_6 \alpha_2 - \\ - \lambda_1^{-1} m \eta_2 (\nabla_m^2 w_1)_{,2} - (1-\nu) m \lambda_1^{-1} (\eta_{2,1} + \eta_2 s_5) w_{1,12} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_3 \nabla_m^4 w_1 + 2(\eta_{3,1} + \eta_3 s_5) (\nabla_m^2 w_1)_{,1} + (\eta_{3,11} + 2s_5 \eta_{3,1} + s_3 \eta_3) (w_{1,11} + \nu m^2 w_{1,22}) + \\ + 12 \frac{(1-\nu^2) p_1 l}{b f_1^2} w_{1,1} + 12 \frac{l^2}{R^2 f_1^2} w_1 - \lambda_1 \eta_2 [(\nabla_m^2 \alpha_1)_{,1} + m (\nabla_m^2 \alpha_2)_{,2}] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_1 \eta_2 s_5 [2\alpha_{1,11} + (1-\nu) m^2 \alpha_{1,22} + (1+\nu) m \alpha_{2,12}] - \lambda_1 \eta_{2,1} [2\alpha_{1,11} + (1-\nu) m^2 \alpha_{1,22} + \\
& + (1+\nu) m \alpha_{2,12}] - \lambda_1 [\eta_2 s_3 + 2\eta_{2,1} s_5 + \eta_{2,11}] (\alpha_{1,1} + \nu m \alpha_{2,2}) + 12 \frac{l}{Rf_1^2} u_{1,1} - \\
& - 12 \frac{\nu ml}{Rf_1^2} u_{2,2} - 12 \frac{(1-\nu^2) q \lambda_1 l}{bf_1^2} = 0
\end{aligned}$$

В уравнениях (2.3) b , s_4 , s_3 , s_5 , s_6 — безразмерные параметры оболочки.

Для решения краевой задачи, описываемой системой уравнений (2.3) и граничными условиями (2.1), (2.2), применим метод интегральных соотношений [5]. В соответствии с методом представим исходную систему уравнений (2.3) в дивергентной форме

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \eta} + L = 0, \quad L = BX + b \quad (2.4)$$

$$X = \{X_i\} = \{u_1, u_2, \alpha_1, \alpha_2, w_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7\}$$

$$Y = B_0 X + B_1 \frac{\partial X}{\partial \eta} + B_2 \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} + B_3 \frac{\partial^3 X}{\partial \eta^3}$$

где $Z_1 = u_{1,\xi}$, $Z_2 = u_{2,\xi}$, $Z_3 = \alpha_{1,\xi}$, $Z_4 = \alpha_{2,\xi}$, $Z_5 = w_{1,\xi}$, $Z_6 = Z_{5,\xi}$, $Z_7 = Z_{6,\xi}$; $B_r = \{b_{mn,r}\}$ и $B = \{b_{mn}\}$. ($r=0, 1, 2, 3$; $m, n=1, 2, \dots, 12$) являются матрицами преобразования, b — вектор свободных членов.

Далее ищем решение системы уравнений (2.4) в виде

$$X_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n X_{ij}(\xi, \eta) P_j(\xi, \eta) \quad (i=3 \div 5, 8 \div 12) \quad (2.5)$$

$$X_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1} X_{ij}(\xi) P_{j,\eta}(\xi, \eta) \quad (i=1, 2),$$

$$X_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n X_{ij}(\xi, \eta) P_{j,\eta\eta}(\xi, \eta) \quad (i=6, 7)$$

где в качестве системы аппроксимирующих функций $P_j(\xi, \eta)$ выбираются степенные ортогональные полиномы [8, 9]:

$$P_j(\xi, \eta) = P_1(\xi, \eta) \sum_{r=1}^{j-1} \left[\eta - \frac{(1+\alpha)r}{2} \right]^{j-1}$$

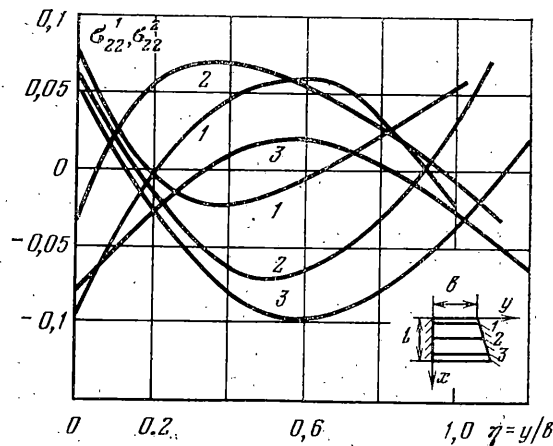
$$P_1(\xi, \eta) = \eta^4 - 2(1+\alpha)r\eta^3 + (1+4\alpha+\alpha^2)r^2\eta^2 - 2\alpha(1+\alpha)r^3\eta + \alpha^2r^4, \quad r=1+k_1m\xi$$

В качестве весовых функций выбираются эти же полиномы и ортогональные на интервале $[r, \alpha r]$ производные от них: $R_j(\xi, \eta) = P_j(\xi, \eta)$ ($i=3 \div 5; 8 \div 12$), $\bar{R}_j(\xi, \eta) = P_{j,\eta}(\xi, \eta)$ ($i=1, 2; 6, 7$).

После применения метода интегральных соотношений к исходной системе уравнений (2.4) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $12n$ с переменными коэффициентами

$$\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^{m^*} A_{v,m} X_v + f_m \quad (m=1, 2, \dots, m^*) \quad (2.6)$$

Здесь v — номер неизвестной функции, при которой стоит коэффициент $A_{v,m}$, m — номер уравнения. Переменные коэффициенты $A_{v,m}$ и сво-



Фиг. 3

бодные члены f_m представим степенными полиномами, непрерывными на интервале изменения независимой переменной

$$A_{v,m} = \sum_{k=0}^q a_{v,m,k} \xi^k, \quad f_m = \sum_{k=0}^q f_{m,k} \frac{\xi^k}{k!}$$

Общее решение системы уравнений (2.6) имеет вид [8, 9]:

$$X_m = \sum_{\mu=1}^{m^*} C_{\mu} \left[\frac{\xi^{\mu-m}}{(\mu-m)!} \delta + \sum_{n=1}^{\infty} X_{m,\mu,n} \right] + \sum_{j=0}^q b_{m,j,0} \frac{\xi^{j+1}}{(j+1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} X_{m,n} \quad (2.7)$$

$$X_{m,\mu,n} = \sum_{j=1}^{\beta} b_{m,\mu,n,j} \frac{\xi^{n+j-1}}{(n+j-1)!},$$

$$X_{m,n} = \sum_{j=1}^{\beta} b_{m,n,j} \frac{\xi^{n+j-1}}{(n+j-1)!}$$

где $b_{m,j,0} = f_{m,k}$ при $j=k$, μ — номер фундаментальной функции, C_{μ} — постоянные интегрирования, $\beta = n(q+3) - 2$. В решении (2.7) $\delta=1$, если $m=\mu$ и $\delta=0$ для остальных μ .

Коэффициенты $b_{m,\mu,n,j}$ и $b_{m,n,j}$ определяются через коэффициенты предыдущего приближения по рекуррентным формулам

$$b_{m,\mu,n,j} = \sum_{v=1}^{m^*} \sum_{k=0}^q a_{v,m,k} b_{v,\mu,n-1,j-k} \frac{1}{n+j-1} \prod_{\gamma=0}^k (n+j-1-\gamma)$$

$$b_{m,n,j} = \sum_{v=1}^{m^*} \sum_{k=0}^q a_{v,m,k} b_{v,n-1,j-k} \frac{1}{n+j} \prod_{\gamma=0}^k (n+j-\gamma).$$

Постоянные C_{μ} , входящие в общее решение системы (2.7), находятся из граничных условий по входной и выходной кромкам лопатки (2.2).

3. В соответствии с изложенным алгоритмом была составлена Фортран-программа. Проводился расчет трехслойной крыловидной лопатки радиального нагнетателя типа Ц4-76 с легким наполнителем (пенополиуретан $\gamma=500$ кг/м³).

Исходные данные: для колеса — $D=0,8$ м, $z=12$ — количество лопаток, $n=30$ об/с; для лопатки — $l=b_1=0,2$ м, $m=1$, $\alpha=0$, $h_1=h_2=0,0012$ м. Материал несущих слоев — Ст. 20.

Закон изменения профиля лопатки приведен ниже

ξ	0	0,25	0,5	0,75	1,0
h/l	0,025	0,066	0,095	0,102	0,03
h_3/l	0,013	0,054	0,083	0,09	0,018

На фиг. 3 приводятся эпюры распределения безразмерных напряжений $\sigma_{zz}^1 = \sigma_{yy}^1 l^2 / E_1 h_0^2$, $\sigma_{zz}^2 = \sigma_{yy}^2 l^2 / E_1 h_0^2$ в основных сечениях лопатки для верхнего и нижнего несущих слоев (кривые 1–3).

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы. Максимальные напряжения располагаются в средней части по ширине лопатки. Увеличение их наблюдается в направлении ко входной кромке для нижнего несущего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Теория трехслойных пологих оболочек с наполнителем со слоями переменной толщины. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 4, с. 71–76.
2. Муштари Х. М. Основные зависимости теории трехслойных оболочек переменной толщины. — Изв. АН СССР. МТТ, 1966, № 2, с. 145–149.
3. Ершов В. В. Уравнения трехслойных пластин переменной толщины. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1964, с. 19–23.
4. Гольденштейн А. М., Муштари Х. М. К теории трехслойных пластин переменной толщины. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1968, № 2, с. 21–27.
5. Дородницын А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. — ПМТФ, 1960, № 3, с. 111–118.
6. Попович В. Е. Применение метода последовательных приближений к задачам устойчивости и колебаний упругих систем. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1962, № 4, с. 103–110.
7. Григолюк Э. И., Попович В. Е., Пухлий В. А. Изгиб сложнагруженных параллелограммных пластин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3, с. 117–124.
8. Пухлий В. А. Метод аналитического решения двумерных краевых задач для систем эллиптических уравнений. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 5, с. 1275–1282.
9. Пухлий В. А. Об одном подходе к решению задач математической физики. — Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 11, с. 2039–2043.
10. Пухлий В. А., Борисов В. К. Исследование напряженно-деформированного состояния пустотелых профилированных лопаток радиальных нагнетателей. — Проблемы прочности, 1979, № 9, с. 93–96.
11. Пухлий В. А. К расчету профилированных лопаток радиальных нагнетателей, подкрепленных ребрами жесткости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 159–166.
12. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.I.1981