

УДК 534.1:539.375

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ТРЕЩИНЕ В РЕШЕТКЕ

СЛЕПЯН Л. И.

Рассматривается динамическое и квазистатическое распространение разрыва связей в дискретной модели упругой среды. Показано наличие оттока энергии от края «трещины» и определена его зависимость от скорости трещины. Тем самым критерий распространения трещины на макроуровне (критическая интенсивность напряжений или критический поток энергии) выведен через характеристику микроструктуры. Показана также возможность распространения трещины в решетке со скоростью, превышающей скорость волн сдвига — предельную скорость для трещины в сплошной среде.

Для решения задачи используются непрерывное и дискретное преобразования Фурье и метод Винера — Хопфа. Применительно к дискретной системе приводятся аналоги известных формул, используемых при факторизации, в частности периодический аналог интеграла типа Коши, и обосновывается правило отбора стационарных решений.

Эффективность обращения к дискретным моделям в механике трещин продемонстрирована в [1, 2]. Дискретность в направлении нормали к трещине учитывалась в [3]. Того же типа дискретность, но только на линии, где расположена трещина, вводилась в [4]. Однако сохранение непрерывности среды вдоль направления распространения трещины не позволяет обнаружить отток энергии и другие эффекты, проявляющиеся в решетке. Поглощение энергии вне трещины обусловлено в [4] неупругостью материала. На дискретной модели численно определялась предельная скорость трещины [5] в условиях, когда она оказывается ограниченной скоростью волн Релея. Теория упругих сред со структурой рассматривалась в [6–8]. Краткое изложение выведенных ниже основных результатов содержится в [9, 10, 11].

Известно, что при распространении трещины с докритической скоростью в сплошной упругой среде в ее край стекает энергия, которая там исчезает. Говорят, что эта энергия расходуется на разрушение. Зависимость стекающей энергии от скорости трещины и коэффициентов интенсивности напряжений приведена в [12]. Однозначная зависимость потока энергии от указанных величин обусловлена некорректностью модели сплошной среды [14]. Применительно к реальным упругим телам, имеющим внутреннюю структуру, модель сплошной среды (без структуры) может рассматриваться лишь как длинноволновое приближение (описывающее картину на макроуровне). Разрушение же происходит на уровне структуры (на микроуровне). В результате некоторые существенные черты процесса разрушения теорией сплошной среды не улавливаются. Так, в решетке — простейшей модели среды со структурой — обнаруживаются волны, уносящие часть энергии, поступающей к краю трещины (возможность оттока энергии обсуждалась в [3, 13]). Далее, так как скорость распространения возмущений в решетке не ограничена максимальной групповой скоростью волн сдвига (см. волну в цепочке [14]), такое ограничение отпадает и для скорости трещины. Отмечается [15], что сверхзвуковое распространение трещины, на возможность которого указывает приводимое ниже решение, наблюдалось в экспериментах.

Будем рассматривать антиплоскую задачу о распространении трещины в прямоугольной решетке с безынерционными линейно-упругими связями между массами, сосредоточенными в ее узлах. Экстраполируя длинноволновое приближение (в котором решетка эквивалентна сплошной среде) на весь спектр, будем говорить об описании состояния на макроуровне. В отличие от классического подхода, когда это состояние определяется непосредственно — решением задачи в рамках модели сплошной среды, здесь оно будет найдено как асимптотика решения задачи о трещине в решетке. В результате будет установлена связь между коэффициентом интенсивности напряжений (определяемым по длинноволновому приближению) и энергией разрушения — энергией деформации связи в момент ее разрыва (за единицу длины принимается шаг решетки). Таким образом, критерий распространения трещины на макроуровне (критическая интенсивность напряжений или критический поток энергии) будет выведен через характеристику микроструктуры.

В той же постановке рассматривается задача, не имеющая эффективного аналога на макроуровне: распространение трещины в поле высокочастотных колебаний решетки (или под действием высокочастотных пульсирующих сил, действующих на берега трещины). Показано, что, как и при распространении трещины в поле статических напряжений, ее скорость может превышать скорость волн сдвига.

Будем считать, что с точки зрения микроуровня параметры движения трещины (направление распространения, скорость) меняются достаточно медленно. Это позволяет рассматривать установившиеся (стационарные) режимы для полубесконечной трещины, развивающейся с постоянной скоростью, хотя на макроуровне трещина может быть конечной, а параметры ее движения — переменными.

Решения стационарных задач, однако, не единственны. В связи с этим устанавливается правило «отбора решений» (см. по этому поводу [16–19]), основанное на принципе причинности [17] (принципе предельной амплитуды [18]) и пригодное как для непрерывных, так и для дискретных задач, стационарных в движущейся системе координат.

1. Постановка динамической задачи и вывод основного соотношения.

Пусть в точках с целочисленными значениями прямоугольных координат x, y сосредоточены единичные массы, каждая из которых взаимодействует с четырьмя соседними с помощью безынерционных линейно-упругих связей единичной жесткости. В длинноволновом приближении решетка эквивалентна сплошной среде с единичными модулем сдвига и скоростью волн сдвига. Уравнения движения масс имеют вид

$$u(t, x-1, y) + u(t, x+1, y) + u(t, x, y-1) + u(t, x, y+1) - 4u(t, x, y) - \partial^2 u(t, x, y) / \partial t^2 = -\sigma(t, x, y) \quad (x, y=0, \pm 1, \dots) \quad (1.1)$$

Здесь u — перемещение по нормали к плоскости x, y , σ — внешняя сила того же направления, t — время.

Пусть задача стационарна в координатах τ, y ($\tau = x - vt$, $v = \text{const} > 0$), а именно

$$u(t+1/v, x+1, y) = u(t, x, y) \quad (1.2)$$

Тогда перемещение можно представить так: $u = u(\tau, y)$, где $\tau = x - vt$ — непрерывная переменная для любого целочисленного значения x . Уравнения (1.1) принимают вид

$$u(\tau-1, y) + u(\tau+1, y) + u(\tau, y-1) + u(\tau, y+1) - 4u(\tau, y) - v^2 \partial^2 u(\tau, y) / \partial \tau^2 = -\sigma(\tau, y) \quad (1.3)$$

Пусть трещина расположена между слоями $y=0$ и $y=1$ при $\tau < 0$, так что разрыв связи между массами происходит в момент $t = x/v$ ($\tau = 0$), после чего, т. е. при $t > x/v$ ($\tau < 0$), массы, расположенные в слое $y=0$, не взаимодействуют с массами слоя $y=1$. Уравнения (1.3) будут описывать динамику решетки с трещиной, если компенсировать взаимодействие между массами внешними силами, положив для $y=0, 1$

$$\sigma = \sigma_0 \mp 2u_-(\tau), \quad u(\tau) = u(\tau, 1) = u_+(\tau) + u_-(\tau) \quad (1.4)$$

где σ_0 — внешние силы в задаче о трещине. Здесь и ниже плюс и минус в индексах приписывается функциям с носителями при $\tau \leq 0$ ($\tau \geq 0$) или их изображениям, например

$$u_{\mp}^F(q, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\mp}(\tau, y) e^{i q \tau} d\tau$$

Положим

$$\sigma_0(\tau, y) = (-1)^{y+1} \sigma_0(\tau) \quad (y=0, 1), \quad \sigma_0 = 0 \quad (y < 0, y > 1) \quad (1.5)$$

Проведем над уравнениями (1.3) преобразования Фурье — непрерывное по τ и дискретное по y . Получим

$$u^{FF}(q, s) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau, y) \exp[i(q\tau + sy)] d\tau =$$

$$= \frac{[\exp(is) - 1] \sigma^F(q)}{2(1 - \cos s) + h^2} \quad (h^2 = 2(1 - \cos q) - v^2 q^2) \quad (1.6)$$

Само по себе выражение (1.6) не имеет смысла, поскольку знаменатель его правой части обращается в нуль и она не интегрируема в конечной области полосы $-\pi < s < \pi$, $-\infty < q < \infty$ (в формуле обращения). Будем, однако, рассматривать выражение (1.6) как изображение предела, к которому со временем стремится решение той же, но нестационарной задачи с нулевыми начальными условиями. Тогда оно приобретает определенный смысл (конкретное правило отбора, следующее из этого принципа, приводится ниже). Пока же будем действовать формально, полагая $h^2 > 0$. При этом

$$u^F(q, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^{FF}(q, s) e^{-isy} ds = S^F(q) f(q, y) \sigma^F(q), \quad S^F = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{r} \right) \quad (1.7)$$

$$r^2 = h^2 + 4, \quad f = [1 - 1/2 h(r-h)]^{y-1} \quad (y \geq 1)$$

$$f(q, 1-y) = -f(q, y)$$

В частности, для $y=1$

$$u^F(q) = S^F(q) \sigma^F(q) \quad (1.8)$$

Отсюда и из (1.4), (1.5) получаем соотношение

$$u_+^F(q) + (h/r) u_-^F(q) = 1/2 (1 - h/r) \sigma_0^F(q). \quad (1.9)$$

из которого методом Винера — Хопфа можно определить перемещения u_{\pm} . Предварительно, однако, следует доопределить функции $h(q)$, $r(q)$.

2. Правило отбора стационарных решений. Пусть нестационарная задача с нулевыми начальными условиями приводится к соотношению

$$u^{LF}(s, q) = S^{LF}(s, q) \sigma^{LF}(s, q) \quad (2.1)$$

где S^{LF} — аналитическая функция s и q , не имеющая особых точек и нулей при $\text{Re } s > \varepsilon_1 > 0$, $|\text{Im } q| < \varepsilon_2(\varepsilon_1)$, а u^{LF} , σ^{LF} — изображения искомых функций (медленного роста), например, в случае, если x — непрерывная переменная

$$u^{LF}(s, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u(t, x) \exp(iqx - st) dt dx$$

а если дискретная ($x=0, \pm 1, \dots$), то

$$u^{LF}(s, q) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u(t, x) \exp(iqx - st) dt$$

Одна из функций u , σ может быть задана во всей области x, t , другая — подлежит определению. В смешанной задаче на части области может быть задана одна из указанных функций, а на остальной — другая.

Предположим, что существуют пределы ($t \rightarrow \infty$, $\tau = x - vt = \text{const}$)

$$\lim u(t, x) e^{-i\omega t} = u(\tau), \quad \lim \sigma(t, x) e^{-i\omega t} = \sigma(\tau) \quad (2.2)$$

также функции медленного роста, связанные соотношением

$$u^{F*}(q) = S^{F*}(q) \sigma^{F*}(q) \quad (2.3)$$

где $u^{F*}(q)$, \dots — преобразования Фурье по τ , такие же, как и в п. 1. Найдем связь между функциями $S^{LF}(s, q)$ и $S^{F*}(q)$. Для случая дискретной

координаты x и $v > 0$ представим формулу обращения в виде ($\alpha > 0$)

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} u^{LF}(s, q) \exp(st - iqx) ds dq =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\alpha_n}^{\alpha_n + i\infty} u^{LF}(s, q) \exp(st - iqx) ds dq$$

$$\alpha_{n\mp} = \alpha \mp i\pi v + 2i\pi n v + iqv + i\omega$$

Положим $s = iqv + 2i\pi n v + i\omega + vs'$. Учитывая, что $\exp(2i\pi n x) = 1$, $u^{LF}(s, q + 2i\pi n) = u^{LF}(s, q)$, получаем

$$\frac{4\pi^2 i}{v} u(t, x) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha/v - i\pi}^{\alpha/v + i\pi} u^{LF}(iqv + i\omega + s'v, q) \exp(s'vt - iq\tau) ds' dq \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) представляет собой формулу обращения для двойного преобразования: непрерывного преобразования Фурье по τ и дискретного преобразования Лапласа по vt (при таких преобразованиях $vt = 0, 1, \dots$ и τ рассматриваются как независимые переменные):

$$vu^{LF}(iqv + i\omega + s'v, q) = vu^{L^*F}(s', q) =$$

$$= \sum_{(vt)=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(vt/v, \tau) \exp(-i\omega + iq\tau - s'(vt)) d\tau$$

На основании (2.1) можно записать

$$s' u^{L^*F}(s', q) = S^{LF}(iqv + i\omega + vs', q) s' \sigma^{L^*F}(s', q) \quad (2.5)$$

Поскольку, по предположению, существуют пределы (2.2), преобразование Фурье от них можно найти положив в (2.5) $s' \rightarrow +0$. Сравнивая с (2.3), получаем

$$S^{F^*}(q) = S^{LF}(iqv + i\omega + 0, q) \quad (2.6)$$

Тот же результат получается при $\omega = 0$, $v = 0$, а также, если x — непрерывная переменная (для последнего случая переход к интегральным преобразованиям в движущейся системе координат проводился в [14]).

Предположим теперь, что соотношение (2.3) получено при формальном решении стационарной задачи относительно функции $u(t, \tau) = u(\tau) \exp(i\omega t)$. Если при этом функция $S^{F^*}(q)$ имеет особые точки и (или) нули на вещественной оси q , то равенство (2.6) может служить для ее доопределения, основанного на указанном выше принципе. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Функция $S^{F^*}(q)$ представима в виде

$$S^{F^*}(q) = P(iqv + i\omega + 0, q) \quad (2.7)$$

В дальнейшем, как и в п. 1, преобразование Фурье по τ будем обозначать символом F без звездочки. Пусть

$$P = P_0(f_1, \dots, f_h, \dots, f_n), \quad f_h = f_h(iqv + i\omega + 0, q) \quad (2.8)$$

где f_h — целые функции по обоим переменным, а особые точки и нули функции P могут находиться лишь там, где какая-либо из функций f_h обращается в нуль. Введем вспомогательную однородную задачу

$$f(iqv + i\omega, q) u^F(q) = 0 \quad (2.9)$$

Ненулевые решения которой представляют собой обобщенные функции с носителями в точках $q=q_0$, где $f(iq_0v+i\omega, q_0)=0$.

При некоторой зависимости $v(q)$ (рассматриваемое фиксированное значение $v=v_0=v(q_0)$) функция $\Omega(q)=qv(q)+\omega$ в некоторой окрестности $q=q_0$ будет удовлетворять равенству (дисперсионному уравнению) $f(i\Omega(q), q)=0$. При этом Ω — частота, $v_f=\Omega/q$ — фазовая скорость, $v_g=d\Omega/dq$ — групповая скорость. Последовательно дифференцируя данное равенство, получаем

$$(\partial f/\partial\Omega)v_g+\partial f/\partial q=0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2}v_g^2+\frac{\partial f}{\partial\Omega}\frac{dv_g}{dq}+2\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega\partial q}v_g+\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}=0$$

С другой стороны, до перехода к пределу $f=f(i\Omega+\varepsilon, q)$, $\varepsilon\rightarrow+0$. При $\text{Re } \varepsilon>0$ корень уравнения $f=0$ будет отличаться от q_0 . Обозначим его $q_0+\gamma$. Полагая $v=\text{const}$ ($v=v_0$), имеем

$$\begin{aligned} f(i\Omega_0+i\gamma v+\varepsilon, q_0+\gamma) &= \frac{\partial f}{\partial\Omega}(\gamma v-i\varepsilon)+\frac{\partial f}{\partial q}\gamma+ \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2}(\gamma v-i\varepsilon)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\gamma^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega\partial q}\gamma(\gamma v-i\varepsilon)\right]+\dots=0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$(f=f(i\Omega, q), \quad q=q_0, \quad \Omega_0=\Omega(q_0))$

Рассмотрим некоторые частные случаи, которые встретятся в дальнейшем. Пусть $\partial f/\partial\Omega\neq 0$, $v\neq v_g$. Тогда при $\varepsilon\rightarrow+0$ в ряде (2.11) асимптотически существенны лишь первые два члена ($\gamma\rightarrow 0$ при $\varepsilon\rightarrow 0$). Сохраняя только эти члены и используя первое из равенств (2.10), находим

$$\gamma\sim i\varepsilon/(v-v_g) \quad (\varepsilon\rightarrow+0) \quad (2.12)$$

Таким образом, при указанном условии точка $q=q_0$ представляет собой предел сверху (из верхней полуплоскости q), если $v>v_g$, и предел снизу в противном случае.

Пусть $v=v_g\neq 0$, $\partial f/\partial\Omega\neq 0$, $dv_g/dq\neq 0$. Обращаясь к (2.10), (2.11), находим

$$\gamma\sim\pm\sqrt{2i\varepsilon/(dv_g/dq)} \quad (\varepsilon\rightarrow+0) \quad (2.13)$$

Видно, что при этом $q=q_0$ — двойной корень: один «приходит» из верхней полуплоскости, другой — из нижней.

Пусть теперь $\partial f/\partial\Omega=\partial^2 f/\partial\Omega\partial q=0$, $v\neq v_g$, $\partial^2 f/\partial\Omega^2\neq 0$. Тогда, как следует из тех же соотношений, корень снова двойной

$$\gamma=\gamma_{1,2}, \quad \gamma_1\sim\frac{i\varepsilon}{v-v_g}, \quad \gamma_2\sim\frac{i\varepsilon}{v+v_g} \quad (\varepsilon\rightarrow+0) \quad (2.14)$$

В отличие от (2.13) здесь корни приходят из разных полуплоскостей только в том случае, когда $v<v_g$.

Определим расположение корней в случае четырехкратного нуля функции $h^2(q)=2(1-\cos q)-\Omega^2$, $\Omega=qv$, $v=1$, $q_0=\omega=0$. При помощи соотношений (2.10), (2.11) или непосредственно из условий (2.7), (2.8) находим

$$\begin{aligned} &^{1/2}\gamma^4-2i\varepsilon\gamma-\varepsilon^2=0 \\ \gamma_k &\sim(24\varepsilon)^{1/2}\exp\left[^{1/3}i\pi\left(^{1/2}+2(k-1)\right)\right] \quad (k=1, 2, 3) \\ &\gamma_4\sim i\varepsilon/2 \quad (\text{Re } \varepsilon>0; \varepsilon\rightarrow+0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Таким образом, здесь три корня приходят из верхней полуплоскости и лишь один — из нижней.

Видно, что в случае однократного корня (2.12) формулы (2.7), (2.8) приводят к принципу Мандельштама [16] для вспомогательной задачи (2.9), стационарной в движущейся системе координат. При кратных корнях (2.13) — (2.15) непосредственное применение принципа Мандельштама было бы затруднено, кроме, пожалуй, случая (2.14) при $v > v_g$.

Если сказанное относительно целой функции f справедливо для любой из f_h (2.8), т. е. свойства нулей f_h исчерпываются рассмотренными случаями, то сохраняются и выводы о происхождении особых точек и нулей функции P , попадающих в пределе ($t \rightarrow \infty$) на вещественную ось q .

Заметим, что сформулированная выше теорема, вообще говоря, не гарантирует, что представление (2.7) достаточно для доопределения стационарной задачи. В особых случаях (связанных с возможностью резонансных волновых явлений [14, 20]), когда на некотором множестве значений q изображение $\sigma^F(q, t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), а $u^F(q, t) \rightarrow u_0^F(q) \neq 0$, необходимо привлекать дополнительные условия, например такое: на указанном множестве $\sigma^F(q, t) \equiv 0$. В рассматриваемой ниже задаче дополнительные условия, однако, не потребуются.

3. Факторизация. Уравнение (1.9) можно решить, если представить функции h , r в виде произведений (факторизовать): $h = h_+ h_-$, $r = r_+ r_-$. Это можно сделать основываясь на предельном соотношении (2.7) и его следствиях (2.12) — (2.15). Функции h^2 , r^2 имеют конечное число вещественных нулей и счетное множество — комплексных (вычисления см. в [21]). Выпишем соответствующие представления в виде бесконечных произведений (используется теорема Вейерштрасса о разложении целой функции в произведение [22]), а также в виде интегралов типа Коши [22].

Представление в виде произведений доопределяется учетом экспоненциального роста и симметрии функций. При использовании интеграла типа Коши логарифмируемые выражения конструируются так, чтобы они стремились к единице при $q \rightarrow \pm\infty$, а логарифм оставался вещественным на всем пути интегрирования.

Итак, полагаем

$$\begin{aligned} h^2 &= 2(1 - \cos q) - v^2 q^2 = h_+^2 h_-^2, & h_{\pm} &= Q_{\pm} H_{\pm} \\ Q_+ Q_- &= Q(q), & H_+ H_- &= H_0(q), & r^2 &= 4 + h^2 = r_+^2 r_-^2 \\ r_{\pm} &= P_{\pm} R_{\pm}, & P_+ P_- &= P(q), & R_+ R_- &= R(q). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для любого значения $v > 0$

$$\begin{aligned} P_+^{-2} &= \prod_{h=1}^n \left[1 + \left(\frac{0 - iq}{\beta_h^+} \right)^2 \right], \\ P_-^{-2} &= \prod_{h=1}^{n+1} \left[1 + \left(\frac{0 + iq}{\beta_h^-} \right)^2 \right], \\ R_{\pm}^{-2} &= 2 \left(1 \pm \frac{q}{ig} \right) \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2 \pm 2id_h q}{c_h^2 + d_h^2} \right) = \\ &= \frac{vB}{\Phi_{\pm}(q)} \exp \left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{R^2(p) \Phi_2(p)}{v^2 B^2} \right) \frac{dp}{p - q \mp i0} \right] \sim \\ &\sim \begin{cases} 2 & (q \rightarrow 0) \\ vB(\mp iq)^{-2n} & (q \rightarrow \pm i\infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$B = B^+ B^-, \quad \Phi_2 = \Phi_2^+ \Phi_2^-, \quad B^+ = \prod_{k=1}^n \beta_k^+, \quad B^- = \prod_{k=1}^{n+1} \beta_k^-, \quad \Phi_2^\pm = (\mp i q + 0)^{2n}$$

Здесь $\pm \beta_k^\pm$ — вещественные нули функции $r^2(q)$, $\pm(c_k \pm i d_k)$ — четверки комплексных нулей, $\beta_k^\pm, g, c_k, d_k > 0$.

Для достаточно большой скорости $n=0$ ($v > v_0$, $v_0 = (\sin q_0 / q_0)^{1/2} \approx 0,30275$, q_0 — минимальный положительный корень уравнения $q_0 = [4 + 2(1 - \cos q_0)] / \sin q_0 \approx 6,977$). С уменьшением скорости n возрастает, $n \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow +0$. Так, при $v = v_0$ появляется двойной корень ($n=1$ при $v_1 < v \leq v_0$), затем он разделяется на два ($v_1 < v < v_0$); при $v = v_1$ снова появляется двойной корень ($n=2$ при $v_2 < v \leq v_1$), разделяющийся на два ($v_2 < v < v_1$), и т. д. Вещественные нули соответствуют распространяющимся волнам, причем помеченные индексом (+) или (-) волнам, фазовая скорость которых v ($\omega=0$) не больше или не меньше групповой: $\sin \beta_k^+ \geq v^2 \beta_k^+$ или $\sin \beta_k^- \leq v^2 \beta_k^-$ (см. (2.12)); в случае двукратного нуля один из них соответствует индексу (+), другой — индексу (-) (2.13), поэтому функции P_+^2, P_-^2 пополняются множителями одновременно — как только n получает приращение.

Для диапазона $0 < v < 1$:

$$Q_+^2 = (0 - iq) \prod_{k=1}^m \left[1 + \left(\frac{0 - iq}{\alpha_k^+} \right)^2 \right]$$

$$Q_-^2 = (0 + iq) \prod_{k=1}^{m+1} \left[1 + \left(\frac{0 + iq}{\alpha_k^-} \right)^2 \right]$$

(3.3)

$$H_\pm^2 = \sqrt{1 - v^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2 \pm 2i b_k q}{a_k^2 + b_k^2} \right) =$$

$$= \frac{vA}{\Phi_1^\pm(q)} \exp \left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{H_0^2(p) \Phi_1(p)}{v^2 A^2} \right) \frac{dp}{p - q \mp i0} \right] \sim$$

$$\sim \begin{cases} \sqrt{1 - v^2} & (q \rightarrow 0) \\ vA (\mp iq)^{-2m-1} & (q \rightarrow \pm i\infty) \end{cases}$$

$$A = A^+ A^-, \quad \Phi_1 = \Phi_1^+ \Phi_1^-, \quad A^+ = \prod_{k=1}^m \alpha_k^+, \quad A^- = \prod_{k=1}^{m+1} \alpha_k^-, \quad \Phi_1^\pm = (\mp i q + 0)^{2m+1}$$

Здесь $\pm \alpha_k^+$ ($\sin \alpha_k^+ \geq v^2 \alpha_k^+$), $\pm \alpha_k^-$ ($\sin \alpha_k^- \leq v^2 \alpha_k^-$) — вещественные нули функции $h^2(q)$, $\pm(a_k \pm i b_k)$ — четверки комплексных нулей, $\alpha_k^\pm, a_k, b_k > 0$.

Число вещественных нулей $4m+2$ неограниченно возрастает с уменьшением скорости, подобно тому, как возрастает число нулей функции r^2 . При $v > v_{00} = 2 |\sin^{1/2} \alpha_0| / \alpha_0 \approx 0,2106$ (α_0 — минимальный положительный корень уравнения $\alpha_0 = 2 \operatorname{tg}^{1/2} \alpha_0 \approx 8,987$) $m=0$.

На «звуковой» скорости ($v=1$):

$$Q_+^2 = 0 - iq, \quad Q_-^2 = (0 + iq)^3$$

$$H_\pm^2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2 \pm 2i b_k q}{a_k^2 + b_k^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{0 \mp iq} \exp \left\{ \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[(p^2+0)H_0^2(p)] \frac{dp}{p-q \mp i0} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 1/\sqrt{12} & (q \rightarrow 0) \\ (\mp iq)^{-1} & (q \rightarrow \pm i\infty) \end{cases} \quad (3.4)$$

И, наконец, для $v > 1$:

$$Q_+ = 1, \quad Q_- = (0+iq)^2$$

$$H_{\pm}^2 = \sqrt{v^2-1} \left(1 \pm \frac{q}{ig} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2 \pm 2ib_k q}{a_k^2 + b_k^2} \right) =$$

$$= v \exp \left\{ \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[v^{-2}H_0^2(p)] \frac{dp}{p-q \mp i0} \right\} \sim \begin{cases} \sqrt{v^2-1} & (q \rightarrow 0) \\ v & (q \rightarrow \pm i\infty) \end{cases} \quad (3.5)$$

При определении функций h_{\pm} , r_{\pm} следует иметь в виду, что ветви радикалов фиксируются символом ± 0 :

$$\begin{aligned} \sqrt{\pm iq + 0} &= \sqrt{|q|} e^{\pm i\pi/4} & (q > 0) \\ \sqrt{\pm iq + 0} &= \sqrt{|q|} e^{\mp i\pi/4} & (q < 0) \\ \sqrt{\pm iq + 0} &= \sqrt{|q|} & (q = \mp i|q|) \end{aligned}$$

4. Отток энергии и связь между критериями разрушения на микро- и макроуровнях. Пусть $0 < v < 1$. Умножим обе части уравнения (1.9) на r_+/h_+ , положим $\sigma_0 = a^{1/2} \exp(a\tau)H(-\tau)$, $\sigma_0^F = a^{1/2}/(a+iq)$, $a > 0$ и устремим a к нулю. Тогда $\sigma_0 \rightarrow 0$, а правая часть рассматриваемого уравнения примет вид

$$\frac{(r-h)\sqrt{a}}{2h_+r_-(a+iq)} \rightarrow D\delta(q) = \frac{D}{2\pi} \left(\frac{1}{-iq+0} + \frac{1}{iq+0} \right) \quad (4.1)$$

где $D = \text{const} > 0$, δ — функция Дирака. Действительно, интеграл от левой части (4.1) по любому отрезку, не содержащему точку $q=0$, стремится к нулю, в других случаях он ограничен, а, как следует из представлений (3.2) — (3.4), интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{(r-h)\sqrt{a}dq}{2h_+r_-(a+iq)} &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+ix)\sqrt{-ix+0}} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1+x}{(1+x^2)\sqrt{x}} dx \quad (\varepsilon > 0, a \rightarrow 0) \end{aligned}$$

стремится к положительной постоянной. Справа в (4.1) — представление Коши для δ -функции [23]. Таким образом приходим к однородной стационарной задаче ($\sigma_0 = 0$):

$$\frac{r_+}{h_+} u_+^F(q) + \frac{h_-}{r_-} u_-^F(q) = \frac{D}{2\pi} \left(\frac{1}{-iq+0} + \frac{1}{iq+0} \right) \quad (4.2)$$

Учитывая свойства функций, входящих в это равенство, находим (однородные решения уравнения (4.2), т. е. решения при $D=0$, рассмат-

риваются ниже)

$$u_+^F = \frac{D h_+}{2\pi r_+} \frac{1}{-iq+0}, \quad u_-^F = \frac{D r_-}{2\pi h_-} \frac{1}{iq+0} \quad (4.3)$$

Рассмотрим длинноволновое (низкочастотное) приближение ($\Omega \rightarrow 0$ и, следовательно, $q \rightarrow 0$). Для него, как это следует из формул п. 3 и (4.3)

$$u_{\pm}^F \sim \frac{D}{2\pi} \left(\frac{1-v^2}{4} \right)^{\pm 1/4} \frac{(\pm iq+0)^{\pm 1/2}}{\mp iq+0} \quad (4.4)$$

Отсюда

$$u_+(\tau) \sim \frac{D}{2\pi} \frac{(1-v^2)^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \tau_+^{-1/2}, \quad u_-(\tau) \sim \frac{2D}{\pi} \frac{(1-v^2)^{-1/4}}{\sqrt{2\pi}} \tau_-^{-1/2} \\ (\tau_+^h = \tau^h H(x+0), \quad \tau_-^h = (-\tau)^h H(-x+0)) \quad (4.5)$$

Учитывая, что напряжение на продолжении трещины (в длинноволновом приближении можно говорить о напряжениях) $\sigma_{23} = \sigma_+ = 2u_+$, и формулы [11]: $\sigma_+ \sim (2\pi)^{-1/2} K \tau_+^{-1/2}$, $u_- \sim 2^{1/2} \pi^{-1/2} K \tau_-^{1/2} (1-v^2)^{-1/2}$, где K — коэффициент интенсивности напряжений, видим, что асимптотики (4.5) действительно отвечают состоянию у края трещины в сплошной среде, причем

$$D = \pi K (1-v^2)^{-1/4} \quad (4.6)$$

Энергия, теряемая при разрыве связи

$$T_0 = 2u^2(0) = 2 \left(\lim_{q \rightarrow +i\infty} (-iq) u_+^F(q) \right)^2 = \\ = 2 \left(\lim_{q \rightarrow -i\infty} (iq) u_-^F(q) \right)^2 = 2 \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 u_+^F(ip) u_-^F(-ip) \quad (4.7)$$

Обращаясь к формулам п. 3 и (4.3), видим, что равенства (4.7) не противоречивы. Учитывая (4.6), получаем искомую зависимость

$$T_0 = \kappa T, \quad \kappa = A^- B^+ / (A^+ B^-), \quad T = \frac{1}{2} K^2 (1-v^2)^{-1/2} \quad (4.8)$$

где T — энергия, стекающая к краю трещины в сплошной среде [11—13].

Итак, на макроуровне можно увидеть поток энергии в край трещины T (поток на единицу ее длины). Однако только κT идет на разрушение — на разрыв связи ($\kappa < 1$). Избыток энергии $(1-\kappa)T$ уносится от края трещины высокочастотными волнами (α_n^{\pm} , β_n^{\pm} — отвечающие им волновые числа), которые обнаруживаются лишь на микроуровне. Рассмотрим предельные случаи.

Пусть $v \rightarrow 1-0$. Тогда $m=n=0$ и $\kappa = \alpha_1^- / \beta_1^-$. Из уравнений $2(1-\cos \alpha_1^-) = (v\alpha_1^-)^2$, $4+2(1-\cos \beta_1^-) = (v\beta_1^-)^2$ находим

$$\alpha_1^- \sim 2\sqrt{3(1-v^2)}, \quad \beta_1^- \approx 2,809, \quad \kappa(1-v^2)^{-1/2} \approx 1,2332, \quad T_0 \approx 0,6166 K^2 \quad (4.9)$$

Таким образом, в отличие от сплошной среды, где при фиксированном коэффициенте интенсивности напряжений поток энергии в край трещины неограниченно возрастает ($v \rightarrow 1-0$), в решетке энергия, теряемая при разрыве связи, стремится к конечному пределу (4.9) (при фиксированной энергии разрушения коэффициент интенсивности напряжений стремится к положительной постоянной). Вместе с тем стекающая энергия, определяемая длинноволновой частью спектра, та же, что и в сплошной среде. Следовательно, при $v \rightarrow 1-0$ почти вся стекающая к краю трещины энергия уносится высокочастотными волнами.

Пусть теперь $v \rightarrow +0$. Тогда, как уже отмечалось, $m, n \rightarrow \infty$. Представим

$$\alpha_n^{\pm} = 2\pi k \pm 2(\arcsin(\pi k v) + \varepsilon_n^{\pm}) \\ (0 \leq \arcsin(\pi k v) + \varepsilon_n^{\pm} \leq \pi/2) \quad (4.10)$$

$$\beta_n^{\pm} = 2\pi(N+k) \pm 2(\arcsin \sqrt{(\pi v(N+k))^2 - 1} + \gamma_n^{\pm}) \\ N = [1/(\pi v)] \quad (0 \leq \arcsin \sqrt{(\pi v(N+k))^2 - 1} + \gamma_n^{\pm} \leq \pi/2)$$

где $[x]$ — целая часть x . В представлении для α_k^\pm возможны два варианта: либо $m=N-1$, либо $m=N$ (это следует непосредственно из анализа уравнения $h^2=0$).

В первом случае все параметры α_k^\pm определяются указанными равенствами. Во втором случае уменьшим на единицу значение m , что не изменит предела для коэффициента κ , так как отношение $\alpha_m^+/\alpha_{m+1}^- \rightarrow 1$. То же справедливо и для второго из равенств (4.10), где можно принять $n=N_1-N-1$, $N_1=[\sqrt{2}/(\pi v)]$.

Подстановка выражений (4.10) в уравнения $h^2=0$, $r^2=0$ приводит к оценкам $\varepsilon_k^\pm = o(\arcsin(\pi kv))$, $\gamma_k^\pm = o(\arcsin \sqrt{(\pi v(N+k))^2 - 1})$.

Таким образом

$$\kappa = \frac{\alpha_{m+1}^-}{\beta_{n+1}^-} \prod_{h=1}^m \frac{\alpha_h^-}{\alpha_h^+} \prod_{h=1}^n \frac{\beta_h^+}{\beta_h^-} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{h=1}^{N-1} A_h \prod_N^{N_1-1} B_h$$

$$A_h = \frac{1 - \pi^{-1} k^{-1} \arcsin(\pi kv) (1+o(1))}{1 + \pi^{-1} k^{-1} \arcsin(\pi kv) (1+o(1))}$$

$$B_h = \frac{1 + \pi^{-1} k^{-1} \arcsin \sqrt{(\pi kv)^2 - 1} (1+o(1))}{1 - \pi^{-1} k^{-1} \arcsin \sqrt{(\pi kv)^2 - 1} (1+o(1))}$$

Отсюда следует

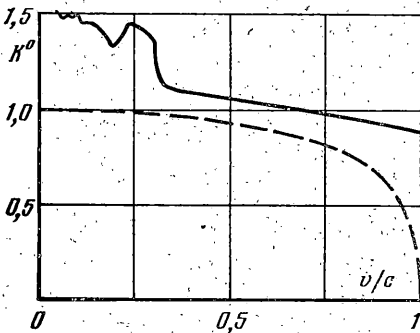
$$\ln \kappa = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\arcsin(\pi kv)}{k} + \frac{2}{\pi} \sum_{h=N}^{N_1} \frac{\arcsin \sqrt{(\pi kv)^2 - 1}}{k} + o(1) \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx + \frac{2}{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{x^2 - 1} \frac{dx}{x} =$$

$$= -\ln(1 + \sqrt{2})$$

Итак, $\lim \kappa = 2^{1/2} - 1$ при $v \rightarrow +0$.

Зависимость отношения $K^0 = K/(2T_0)^{1/2}$ (в размерных переменных $K/(2\mu T_0)^{1/2}$, где μ — модуль сдвига) от скорости трещины v (от отношения скорости трещины к скорости v_* длинных волн сдвига) показана на фиг. 1.



Фиг. 1

Пунктиром нанесен график $K/(2T)^{1/2} (K/(2\mu T)^{1/2})$. Квадрат отношения первой из указанных величин ко второй равен T/T_0 . Видно, что отток энергии значителен при $v < 0,3$ и при $v > 0,7 \div 0,8$.

Формула (4.8) позволяет выразить критерий разрушения на макроуровне $K = K_c(v)$ или $T = T_c(v)$ через характеристику структуры T_0

$$K_c(v) = (2\mu T_0 \sqrt{1 - v^2/v_*^2})^{1/2} \kappa^{-1/2},$$

$$T_c(v) = T_0 / \kappa \quad (4.11)$$

После этого задачи динамики трещин можно рассматривать без учета структуры, т. е. в рамках модели сплошной среды.

Вернемся к уравнению (1.3). Проинтегрируем все его члены по τ от нуля до произвольного значения ($-\infty < \tau < \infty$). Поскольку для найденного выше решения внешние силы $\sigma_0 = 0$, они будут отсутствовать и после интегрирования, сохранится и соотношение (1.4). Таким образом, получаем

новое однородное решение. Повторяя эту операцию, приходим к решениям, отвечающим вместо (4.1) следующим пределам правой части (1.9) (после ее умножения на r_+/h_+ и при $a \rightarrow +0$):

$$D\delta^{(k)}(q) = \frac{Dk!}{2\pi} \left[\frac{i^k}{(-iq+0)^{k+1}} + \frac{(-i)^k}{(iq+0)^{k+1}} \right] \quad (4.12)$$

где $k=0, 1, \dots$. Случай $k=0$ рассмотрен выше. При $k>0$ получаем решения (см. (4.1)–(4.3)), в длинноволновом приближении совпадающие с однородными решениями для сплошной среды [11]:

$$\sigma_+ = \text{const } \tau_+^{k-1/2}, \quad u_- = \text{const } \tau_-^{k+1/2} \quad (4.13)$$

Для всякого такого решения коэффициент интенсивности напряжений равен нулю и распространение трещины не сопровождается стоком энергии. Как следует из полученных выше зависимостей, в этом случае $u(0)=0$ и энергия на разрыв связи в решетке не затрачивается. Если же решетка обладает прочностью, т. е. разрыв связи происходит лишь при некотором ее удлинении, то, как и в сплошной среде, распространение трещины в решетке в условиях, описываемых решением при $k>0$, невозможно.

Другого типа однородные решения можно получить положив в (4.2) $D=0$. Учитывая, что по предположению перемещения (и их изображения) — функции медленного роста, из (4.2) находим

$$u_+^F = \frac{P(q)h_+}{r_+}, \quad u_-^F = -\frac{P(q)r_-}{h_-}, \quad (4.14)$$

$$P(q) = \sum_{k=0}^n a_n q^n, \quad a_n = \text{const}, \quad n < \infty$$

Эти решения также имеют аналог в модели сплошной среды. В длинноволновом приближении они совпадают с однородными решениями (4.13), но при $k=-1, -2, \dots$. Такие решения не удовлетворяют требованию непрерывности перемещения берега трещины или ограниченности потока энергии [11]. Формулы (4.14) определяют неограниченные перемещения, не реализуемые вследствие ограниченной прочности решетки.

Рассмотрим звуковой ($v=1$) и сверхзвуковой режимы. Тем же путем, что и выше, находим отношение T_0/K^2 (4.8) при $v=1$. Как функция v оно оказывается непрерывным слева. При $v>1$ в (4.1) $D=0$ и, следовательно, однородные решения рассматриваемого типа (с ненулевыми коэффициентами интенсивности напряжений) не существуют. Положим

$$\sigma_0 = AH(-\tau), \quad \sigma_0^F = A/(iq+0), \quad A = \text{const} \quad (4.15)$$

Из (1.9) находим

$$\begin{aligned} u_+^F(q) &= \frac{A}{2(iq+0)} \left(1 - \frac{h_+(q)r_+(+i0)}{r_+(q)h_+(+i0)} \right) \\ u_-^F(q) &= \frac{A}{2(iq+0)} \left(\frac{r_-(q)r_+(+i0)}{h_-(q)h_+(+i0)} - 1 \right) \\ u(\tau) \rightarrow 0 \quad (\tau \rightarrow +\infty), \quad u(0) &= \lim_{q \rightarrow +i\infty} (-iq) u_+^F(q) = \\ &= \frac{A}{2} \left[\left(\frac{2}{\beta_1 - \sqrt{v^2 - 1}} \right)^{1/2} - 1 \right] > 0, \quad u(\tau) \sim -\frac{A\tau}{\sqrt{v^2 - 1}} \\ & \quad (\tau \rightarrow -\infty) \end{aligned} \quad (4.16)$$

В отвечающей этому решению ситуации в сплошной среде («расклинивание» со сверхзвуковой скоростью), когда асимптотическое равенство в последнем соотношении заменяется равенством ($\tau < 0$), поток энергии в край трещины отсутствует [11]. В решетке же, как видно из (4.16), $T_0 = 2u^2(0) > 0$.

Суперпозиция данного состояния и равномерного сдвига решетки $u(\tau, y) = A(y^{-1/2})$ соответствует однородной задаче о сверхзвуковом распространении трещины в поле равномерно распределенных сдвиговых напряжений:

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_+ \rightarrow A, \quad u_+ \rightarrow A/2 \quad (\tau \rightarrow +\infty) \quad (4.17)$$

$$u(0) = A(2\beta_1^- \sqrt{v^2 - 1})^{-1/2} > A/2$$

Таким образом, в напряженной решетке скорость трещины может превзойти скорость волн сдвига (скорость распространения возмущений в решетке не ограничена максимальной групповой скоростью), однако при малых напряжениях — не намного. Пусть $\alpha = \sigma_+(\infty)/\sigma(0) \ll 1$ ($\sigma(0) = \sigma_c$). Тогда

$$v = 1 + 2(\beta_1^-)^{-2} \alpha^2, \quad \beta_1^- \approx 2,8 \quad (4.18)$$

5. Распространение трещины при высокочастотных колебаниях решетки. В отличие от сплошной среды однородные решения для решетки не исчерпываются указанными выше. Дополнительные решения порождаются нулями $h_+ r_-$ на вещественной оси q вне $q=0$. Положим

$$\sigma_0 = \sqrt{a} e^{-(\alpha + i\beta)\tau} H_-(\tau), \quad (5.1)$$

$$\sigma_0^F = \frac{\sqrt{a}}{-iq + a + i\beta}, \quad \beta = \beta_1^-, \quad a > 0$$

и примем $v > v_0$ (см. пояснения к формулам (3.2)). Тем же путем, что и выше, из (1.9) находим

$$(5.2)$$

$$u_{\pm}^F = \frac{A}{2\pi} \frac{1}{[-i(q - \beta) + 0]} \left(\frac{h_{\pm}(q)}{r_{\pm}(q)} \right)^{\pm 1}$$

Для определения асимптотик перемещений вдали от края трещины достаточно рассмотреть асимптотики изображений (5.2) у вещественных особых точек. При $v > v_0$ существуют две пары таких точек: $q = \pm\beta - i0$ и $q = \pm\alpha - i0$ ($\alpha = \alpha_1^-$). Основываясь на (5.2), (3.1), (3.5), получаем

$$u_+^F \approx \frac{A}{2\pi} \frac{h_+(\beta)}{r_+(\beta)} \frac{1}{[-i(q - \beta) + 0]} \quad (q \rightarrow \beta - i0) \quad (5.3)$$

Другие особые точки менее «сильные», они определяют колебания, исчезающие при удалении от края трещины. Из (5.3) следует

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} u_+ e^{i\beta\tau} = 1/2 A h_+(\beta) / (\pi r_+(\beta)) = u_0(\tau, y) e^{i\beta\tau} (-1)^{y+1} \quad (5.4)$$

Функция u_0 удовлетворяет однородным уравнениям (1.3), поскольку $r^2(\beta) = 0$. Она описывает колебания решетки, при которых массы, расположенные в соседних слоях (y и $y+1$), движутся в противоположных направлениях.

Перемещение в момент разрыва определяется по любой из формул (4.7). Находим

$$u(0) = \frac{A}{2\pi} \begin{cases} \sqrt{\alpha/\beta} & (v_0 < v < 1) \\ 1/\sqrt{\beta} & (v \geq 1) \end{cases} \quad (5.5)$$

Полагая $A > 0$, определим отношение $u(0)/u(+\infty)$, которое, очевидно, должно быть больше единицы, если $u(0)$ действительно является критическим перемещением, приводящим к разрыву ранее неповрежденной связи. Учитывая, что при вещественных значениях q справедливы равенства $|H_+| = |H_-|$, $|R_+| = |R_-|$, из формул (5.3), (5.5), (3.1)–(3.5) находим искомое отношение ($\alpha = 0$ при $v \geq 1$):

$$\lambda = u(0)/|u(+\infty)| = [1/4(6 - 2 \cos \beta - \beta \sin \beta)(1 - \alpha^2/\beta^2)]^{1/4}$$

График $\lambda(v)$ показан на фиг. 2. Заметим, что сумма $u = u_+(\tau) + u_-(\tau) - u_0(\tau, 1)$ определяет решение задачи о распространении трещины под действием пульсирующих сил, приложенных к ее берегам.

6. Статическая задача. Уравнения (1.3) и условия их дополняющие, будут отвечать статической задаче, если положить $\tau = x$ и $\dot{v} = 0$. Принципиальное отличие полученных таким образом соотношений от исходных состоит в том, что x — дискретная переменная, в то время как τ (при $x = \text{const}$) — непрерывная. Итак, с учетом (2.7)

$$h^2 = 2(1 - \cos q) + 0, \quad r^2 = 4 + h^2 \quad (6.1)$$

Примем, что трещина расположена при $x = -1, -2, \dots$ и будем приписывать индекс (+) или (-) функциям медленного роста с носителями при $x = 0, 1, \dots$ или $x = -1, -2, \dots$ и изображениям таких функций, не имеющих особых точек (они не будут иметь и нулей) в верхней или нижней полуплоскости q ; причем изображения, или изображения, умноженные на $\exp(iq)$, также будут медленного роста.

Периодический аналог интеграла типа Коши, с помощью которого можно провести факторизацию, отвечающую указанным условиям, имеет вид (см. [24]):

$$f_{\pm}(q) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \delta_{\pm}(\xi - q) d\xi \quad (\text{Im } q \geq 0) \quad (6.2)$$

$$\delta_{\pm}(q) = \pm \frac{1}{4\pi} \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{q}{2} \right) \rightarrow \pm \frac{1}{4\pi} \left(1 - i V. p. \operatorname{ctg} \frac{q}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(q + 2k\pi) \quad (\text{Im } q \rightarrow \pm 0)$$

Здесь $f(q)$ — периодическая функция: $f(q + 2\pi) = f(q)$; символ *V. p.* означает, что соответствующий интеграл берется в смысле главного значения. При этом $\lim (f_+(q) + f_-(\bar{q})) = f(\operatorname{Re} q)$ при $\operatorname{Im} q \rightarrow +0$.

С помощью интеграла типа Коши (6.2) проводим факторизацию (обозначения прежние)

$$h_{\pm} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln [2(1 - \cos \xi)] \delta_{\pm}(\xi - q) d\xi \sim \sqrt{\mp iq + 0} \quad (q \rightarrow 0) \right. \quad (6.3)$$

$$h_+ \rightarrow 1 \quad (q \rightarrow +i\infty), \quad h_- \sim \exp(-1/2 - iq) \quad (q \rightarrow -i\infty)$$

$$r_{\pm} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln [4 + 2(1 - \cos \xi)] \delta_{\pm}(\xi - q) d\xi \sim \sqrt{2(\sqrt{2} \pm 1)} \quad (q \rightarrow 0) \right.$$

$$r_+ \rightarrow \sqrt{2} + 1 \quad (q \rightarrow +i\infty), \quad r_- \sim \exp(\sqrt{2} - 3/2 - iq) \quad (q \rightarrow -i\infty)$$

В формулах (6.3) $\operatorname{Im} q > 0$ для h_+ , r_+ и $\operatorname{Im} q < 0$ для h_- , r_- ; логарифмы вещественны. Возьмем внешнюю нагрузку в виде $\sigma_0 = a^{1/2} \exp(ax) H(-x - 0)$, $a > 0$. Тогда $\sigma_0^F = a^{1/2} \exp(-a - iq) / [1 - \exp(-a - iq)]$ и правая часть урав-

нения (4.9) после умножения на r_+/h_+ будет равна

$$\frac{1}{2} \frac{r-h}{h_+ r_-} \frac{\sqrt{a} e^{-a-iq}}{1-e^{-a-iq}} \xrightarrow{a \rightarrow +0} A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(q+2\pi k) =$$

$$= \frac{A}{4\pi} \left[\left(1+i \operatorname{ctg} \frac{q+i0}{2} \right)_+ - \left(1+i \operatorname{ctg} \frac{q-i0}{2} \right)_- \right]$$

Итак, изображение решения однородной задачи ($\sigma_0=0$) следующее:

$$u_{\pm}^F = \pm^{1/4} (A/\pi) (h_{\pm}/r_{\pm})^{\pm 1} [1+i \operatorname{ctg}^{1/2}(q \pm i0)]_{\pm} \quad (6.4)$$

В длинноволновом приближении ($q \rightarrow 0$), как это следует из формул (6.3), (6.4)

$$\sigma_+ = 2u_+ \sim \frac{Ax_+^{-1/2}}{\pi \sqrt{2\pi} (\sqrt{2}+1)}, \quad u_- \sim \frac{2Ax_-^{1/2}}{\pi \sqrt{2\pi} (\sqrt{2}+1)}$$

Отсюда $A = \pi K (1+2^{1/2})^{1/2}$. Перемещение у края трещины

$$u(0) = \lim_{q \rightarrow +i\infty} u_+^F(q) = \frac{A}{2\pi} \lim_{q \rightarrow +i\infty} \frac{h_+}{r_+} = \frac{K(\sqrt{2}-1)^{1/2}}{2}$$

Энергия связи $T_0 = 2u^2(0) = 1/2 (2^{1/2}-1) K^2 = \kappa T$, $\kappa = 2^{1/2}-1 = \kappa(0)$. Таким образом, как и следовало ожидать, $\kappa(0) = \lim_{v \rightarrow +0} \kappa(v)$

Определим еще перемещение в точке $x=-1$, ближайшей к краю трещины. Положим $q \rightarrow -i\infty$. Тогда

$$\lim_{q \rightarrow -i\infty} e^{iq} u_-^F(q) = u(-1) = (\sqrt{2}+1)^{1/2} \exp(\sqrt{2}-1) K/2$$

$$u(-1)/u(0) = (1+\sqrt{2}) \exp(\sqrt{2}-1) \approx 3,653$$

Аналогично п. 4 можно построить однородные решения, отвечающие нулевому коэффициенту интенсивности напряжений. Как и в динамике, эти решения указывают на отсутствие перемещений у края трещины в решетке. Что же касается однородных решений вида (4.14), то для статики решетки они не существуют (полином не удовлетворяет условиям роста, которым подчинена функция u_-), хотя и существуют в статике сплошной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 2, с. 212–222.
2. Новожилов В. В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 797–812.
3. Слепян Л. И. Трещина в слоистой среде. — В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНТИ, 1974, с. 657–664.
4. Енгов В. М., Салганик Р. Л. Трещина Прандтля в вязкоупругом теле. Стационарное распространение трещины. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 6, с. 41–60.
5. Маслов Л. А. Движение трещины в дискретной среде. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 136–140.
6. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 457 с.
7. Марадудин А., Монролл Э., Вейсс Дж. Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. М.: Мир, 1965. 445 с.
8. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 383 с.
9. Слепян Л. И. Динамика трещины в решетке. — Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 3, с. 561–564.
10. Слепян Л. И. Распространение трещины при высокочастотных колебаниях решетки. — Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 3, с. 566–569.
11. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
12. Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М. Механика хрупкого разрушения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3, с. 112–125.

13. *Костров Б. В.* Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176 с.
14. *Слепня Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
15. *Борзых А. А., Черепанов Г. П.* К теории разрушения твердых тел под воздействием мощных импульсных пучков электронов.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 1120–1128.
16. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 437 с.
17. *Бологовский Б. М., Столяров С. Н.* О принципах излучения в среде с дисперсией.— В кн.: Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972, с. 267–280.
18. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
19. *Батенькова Е. Ю., Зильбергейт А. С., Нуллер Б. М.* Контактные задачи о вынужденных стационарных колебаниях балок на упругой полосе, полуполосе и прямоугольнике.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 902–910.
20. *Гольдштейн Р. В.* Волны Релея и резонансные явления в упругих телах.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 516–525.
21. *Злагин А. Н.* О корнях некоторых трансцендентных уравнений, встречающихся в теории упругости.— Прикл. механика, 1980, т. 16; № 12, с. 69–74.
22. *Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
23. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968. 276 с.
24. *Слепня Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
4.V.1981