

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА
 С ГИБКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

ДОКУЧАЕВ Л. В., КЛИШЕВ О. П.

Исследуется устойчивость свободного вращения несущего тела с учетом диссипации энергии в колеблющихся упругих элементах.

В [1] исследована асимптотическая устойчивость вращения летательного аппарата с упругими штангами, расположенными по главным осям инерции недеформированной системы, и строятся области устойчивого вращения. На основании теоремы В. В. Румянцева об экстремуме измененной потенциальной энергии упругого тела с жидкостью [2] в работе [3] получены достаточные условия устойчивости вращения тела с двумя упругими стержнями. Однако из-за оценок используемых функционалов области устойчивости оказались уже, чем в [1]. Таким же недостатком обладают результаты, полученные несколько иным способом в [4]. Заменяя путем дискретизации общие уравнения сплошной среды усеченной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в работах [5-7] получают условия устойчивости методом Ляпунова, используя связь интегралов энергии и интегралов площадей. В [8] делается попытка оценки влияния усечения модельных координат на точность построения областей устойчивости.

Во всех предыдущих работах области устойчивости строились для стержней, расположенных по главным осям. Ниже выводятся уравнения движения и в плоскости конструктивных параметров строятся точные области асимптотической устойчивости вращения аппаратов с двумя наклонными упругими штангами. Анализируется влияние угла установки штанг на изменение области устойчивости. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости «нетривиального» равновесного положения стержней, наклоненных под произвольным углом к оси вращения тела.

1. Рассмотрим движение объекта, состоящего из твердого тела массы m и прикрепленных к нему упругих элементов (фиг. 1). Предположим, что внешние силы и моменты на объект не действуют, он движется поступательно и вращается, при этом гибкие элементы совершают малые упругие колебания. Введем связанную с центром масс твердого тела систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями инерции объекта при отсутствии деформаций. Радиус-вектор точки тела в недеформированном состоянии относительно связанной системы координат обозначим ρ . Относительное положение точки тела в деформированном состоянии будем определять вектором $r = \rho + u$. Здесь u — вектор относительного перемещения точки при деформации гибких элементов. Для частиц абсолютно жесткого твердого тела $u = 0$. Движение связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно инерциальной будем определять при помощи вектора скорости v точки O и вектора угловой скорости вращения ω относительно этой точки.

Уравнения движения объекта с учетом деформации гибких элементов имеют вид

$$m\dot{w} + \frac{d^2L}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} \times L + 2\omega \times \frac{dL}{dt} + \omega \times (\omega \times L) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt}(J\omega) + \omega \times (J\omega) + \frac{dG}{dt} + \omega \times G + L \times w = 0$$

$$-\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) \mu_0^{-1} - \mathbf{w} - \mathbf{N}(\mathbf{u}^*)$$

где векторы ускорения, статического и кинетического моментов, а также тензор инерции определяются следующими формулами:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{L} = \int (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{u}) d\mathbf{m}, \quad \mathbf{G} = \int \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\mathbf{m} \quad (1.2)$$

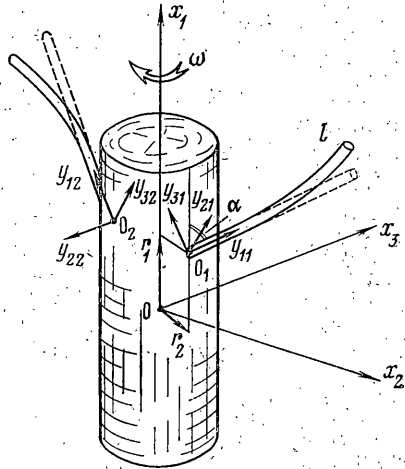
$$\mathbf{J} = \int [E(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{u}) \cdot (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{u}) (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{u})] d\mathbf{m}$$

Здесь приняты обозначения: G_i — компоненты вектора кинетического момента, J — тензор инерции объекта при наличии деформаций с компонентами J_{ik} , μ_0 — плотность гибкого элемента, $N(\mathbf{u}^*)$ — вектор внутренних диссипативных сил, $R(\mathbf{u})$ — линейный оператор упругости, E — единичный тензор. Скалярное произведение векторов обозначается точкой, а диадное произведение — без точки. Предполагается, что связь между напряжением и деформациями соответствует закону Гука.

Используя первое из уравнений (1.1), исключим из рассмотрения вектор ускорения \mathbf{w} . Проведем дискретизацию системы уравнений (1.1). Для этого представим проекции упругих смещений на оси связанной системы координат в виде разложения в ряд по полной системе функций и учтем конечное число членов разложения $u_i = \varphi_i^T \beta_i$ ($i=1, 2, 3$), где φ_i — матрица-столбец, элементы которой координатные функции, β_i — матрица-столбец соответствующих обобщенных координат. Индекс T означает транспонирование. Объединим последние три уравнения в одно

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\beta} \quad (1.3)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$



Фиг. 1

Будем считать, что в невозмущенном движении объект вращается вокруг оси Ox_1 с постоянной угловой скоростью ω , а в возмущенном движении компоненты вектора угловой скорости будут $\omega + \omega_1, \omega_2, \omega_3$, где ω_1, ω_2 и ω_3 — малые возмущения.

Для получения точных линеаризованных уравнений движения нужно составить линейное уравнение относительно $\boldsymbol{\beta}$ для $G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, L_1, L_2$ и L_3 , а также квадратичное разложение в ряд для величин G_1 и J_{11} . Подставив разложение (1.3) в формулы (1.2), представим элементы тензора инерции J_{ik} , кинетического G_i и статического L_i моментов в виде

$$\begin{aligned} J_{11} &= I_1 + \beta^T \Lambda_{11} + \beta^T \Pi \beta, & J_{22} &= I_2, & J_{33} &= I_3, & J_{12} &= \beta^T \Lambda_{12} \\ J_{13} &= \beta^T \Lambda_{13}, & G_1 &= g_1^T \beta + \beta^T \Phi \beta, & G_2 &= g_2^T \beta \\ G_3 &= g_3^T \beta, & L_1 &= s_1^T \beta, & L_2 &= s_2^T \beta, & L_3 &= s_3^T \beta, & M_a &= \int \varphi^T \varphi d\mathbf{m} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где I_1, I_2, I_3 — моменты инерции объекта при отсутствии деформаций. $\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \Pi, \Phi, g_1, g_2, g_3, s_1, s_2, s_3$ — матрицы с постоянными элементами, которые определяются формулами (1.2) при условии (1.3).

Кинетическую энергию относительного движения и потенциальную энергию упругих деформаций представим как $T_r = \frac{1}{2} \int \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathbf{m} = \frac{1}{2} \beta^T M_d \dot{\boldsymbol{\beta}}$, $U = \frac{1}{2} \beta^T K_a \boldsymbol{\beta}$.

Тогда линеаризованные уравнения движения (1.4) примут вид

$$\begin{aligned}
 & I_1 \dot{\omega}_1 + \omega \Lambda_{11} \beta + g_1^T \beta = 0 \\
 & I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega \omega_3 + \omega (\Lambda_{12}^T - g_3^T) \beta - \omega^2 \Lambda_{13}^T \beta + g_2^T \beta = 0 \\
 & I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega \omega_2 + \omega (\Lambda_{13}^T + g_2^T) \beta + \omega^2 \Lambda_{12}^T \beta + g_3^T \beta = 0 \\
 & (M_d - m^{-1} s s^T) \beta + \omega (\Gamma - 2m^{-1} s s^T) \beta + \omega^2 (\Pi_d - m^{-1} s s^T) \beta - \\
 & - \omega \Lambda_{12} \omega_2 + \omega \Lambda_{13} \omega_3 + \omega \Pi (\omega - \omega_1) + g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2 + g_3 \omega_3 = N(\beta) \\
 & \Gamma = \Phi^T - \Phi, \quad \Pi_d = K_d \omega^{-2} - \Pi, \quad s = \text{diag}(s_1, s_2, s_3)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Уравнения стационарного движения получим из (1.5), приравняв нулю члены, стоящими перед производными координат по времени. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
 & (I_1 - I_3) \omega \omega_0 - \omega^2 \Lambda_{13}^T \beta_0 = 0 \\
 & - (I_1 - I_2) \omega \omega_0 + \omega^2 \Lambda_{12}^T \beta_0 = 0 \\
 & \omega^2 (\Pi_d - m^{-1} s s^T) \beta_0 - \omega \Lambda_{12} \omega_0 + \omega \Lambda_{13} \omega_0 + \omega^2 \Pi = 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Равновесие описывается обобщенными координатами β_0 , ω_0 , ω_0 , которые являются решением системы уравнений (1.6), при этом гибкие элементы деформированы, а объект вращается вокруг осей Ox_2 и Ox_3 с малыми постоянными скоростями ω_0 и ω_0 . Принимая решение уравнений (1.6) за невозмущенное движение, исследуем его устойчивость. Введем новые переменные

$$\beta^* = \beta - \beta_0, \quad \omega_2^* = \omega_2 - \omega_0, \quad \omega_3^* = \omega_3 - \omega_0 \tag{1.7}$$

Если описать ориентацию связанной системы координат при помощи последовательных поворотов на углы θ_1 , θ_2 , θ_3 , то матрица угловых скоростей в линейном приближении будет иметь вид [7]:

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 + \omega, \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2 - \omega \theta_3, \quad \omega_3 = \dot{\theta}_3 + \omega \theta_2 \tag{1.8}$$

Используя выражения (1.7) и (1.8), можно записать уравнения возмущенного движения (1.5) в матричной форме

$$\begin{aligned}
 & Az + Bz + Cz = N(\beta^*) \\
 & z^T = \|\theta^{*T}, \beta^{*T}\|, \quad \theta^{*T} = \|\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*\|, \quad N(\beta^*) = \|0, N(\beta^*)\| \\
 & A = \begin{vmatrix} J_1^* & 0 & 0 & g_1^T \\ 0 & I_2 & 0 & g_2^T \\ 0 & 0 & I_3 & g_3^T \\ g_1 & g_2 & g_3 & M_d - m^{-1} s s^T \end{vmatrix}, \quad B = \omega \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \Lambda_{11}^T \\ 0 & 0 & J_1^* - I_2 - I_3 & \Lambda_{12}^T - g_3^T \\ 0 & I_2 + I_3 - J_1^* & 0 & \Lambda_{13}^T + g_2^T \\ -\Lambda_{11} & -\Lambda_{12} + g_3 & -\Lambda_{13} - g_2 & \Gamma - 2m^{-1} s s^T \end{vmatrix} \\
 & C = \omega^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1^* - I_3 & 0 & -\Lambda_{13}^T \\ 0 & 0 & J_1^* - I_2 & \Lambda_{12}^T \\ 0 & -\Lambda_{13} & \Lambda_{12} & K_d \omega^{-2} - \Pi - m^{-1} s s^T \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Следует отметить, что матрицы A и C являются симметричными, а матрица B — кососимметричной. Кроме того, матрица A — положительно-определенная. В уравнениях (1.9) координата θ_1 циклическая. Исключая ее из рассмотрения, при помощи метода Рауса получим, что необходимые и достаточные условия устойчивости невозмущенного движения совпадают с условиями положительной определенности наибольшего, отличного от нуля, диагонального минора матрицы C .

Эти условия в матричной записи имеют вид

$$\begin{aligned}
 & (J_1^* - I_3) (J_1^* - I_2) (K_d \omega^{-2} - \Pi - m^{-1} s s^T) - \Lambda_{12} \Lambda_{12}^T (J_1^* - I_3) - \\
 & - \Lambda_{13} \Lambda_{13}^T (J_1^* - I_2) > 0
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где J_1^* — момент инерции объекта относительно оси вращения при стационарном движении.

При исследовании устойчивости решения (1.6) прямым методом Ляпунова можно взять измененную потенциальную энергию объекта [3], в которой упругие смещения гибких элементов представлены в виде разложений в ряд по формулам (1.3). В этом случае условия минимума измененной потенциальной энергии, определяющие по теореме В. В. Румянцева достаточные условия устойчивости, совпадают с условиями положительной определенности матрицы Гесса для этой функции Ляпунова, которые имеют вид (1.14).

2. Рассмотрим гибкие элементы в виде двух одинаковых, однородных, нерастяжимых стержней длины l , заземленных в твердом теле, лежащих в плоскости Ox_1x_2 симметрично относительно оси Ox_1 и образующих с осью Ox_2 углы α . Радиус-вектор точек крепления стержней обозначим r_k ($k=1, 2$). В точках крепления стержней системы координат $O_k y_{1k} y_{2k} y_{3k}$ введем так, что ось $O_k y_{1k}$ направлена по оси недеформированного стержня. Упругие отклонения k -го стержня от недеформированного положения определяются вектором

$$u_k = \gamma_{1k} u_{1k} + \gamma_{2k} u_{2k} + \gamma_{3k} u_{3k} \quad (2.1)$$

где γ_{ik} — орты системы координат $O_k y_{1k} y_{2k} y_{3k}$ ($i=1, 2, 3, k=1, 2$). Условия нерастяжимости стержней приводят к соотношениям

$$u_{1k}' = 1/2 (u_{2k}'^2 + u_{3k}'^2), \quad u_k' = \frac{\partial u_k}{\partial y_{1k}} \quad (2.2)$$

Упругие смещения представляются в виде разложения в конечный ряд по собственным формам колебаний вращающихся стержней в виде

$$u_{2k} = \sum_{j=1}^N \varphi_{jk}(u_{1k}) q_{jk}(t), \quad u_{3k} = \sum_{j=1}^N \varphi_{jk}(y_{1k}) p_{jk}(t) \quad (2.3)$$

В дальнейшем предполагается, что $\varphi_{jk}(y_{1k}) = \psi_{jk}(y_{1k})$. При сделанных допущениях компоненты матрицы C будут иметь вид:

если j — нечетное

$$\Lambda_{13}^j = r_1 n_j + d_j \sin \alpha, \quad \Lambda_{11}^j = \Lambda_{12}^j = 0, \quad s_j = n_j \cos \alpha, \quad \Pi_{jj} = H_{jj} - U_{jj}$$

если j — четное

$$\Lambda_{13}^j = 0; \quad \Lambda_{11}^j = -(r_2 n_j + d_j \cos \alpha) \sin \alpha, \quad s_j = n_j \sin \alpha \quad (2.4)$$

$$\Lambda_{12}^j = -[d_j (\cos \alpha - \sin \alpha) + r_2 n_j \cos \alpha - r_1 n_j \sin \alpha], \quad \Pi_{jj} = H_{jj} \sin \alpha - U_{jj}$$

Значения коэффициентов n_j, d_j, H_{jj}, U_{jj} приведены в [1].

Для рассматриваемого объекта система уравнений (1.6) имеет следующее решение:

$$q_{jk} = 0, \quad p_{jk} = p_{0jk}, \quad \theta_3 = 0, \quad \theta_2 = \theta_{02} \quad (2.5)$$

Принимая это движение за невозмущенное, исследуем его устойчивость. Методом математической индукции можно доказать, что необходимые и достаточные условия устойчивости имеют вид

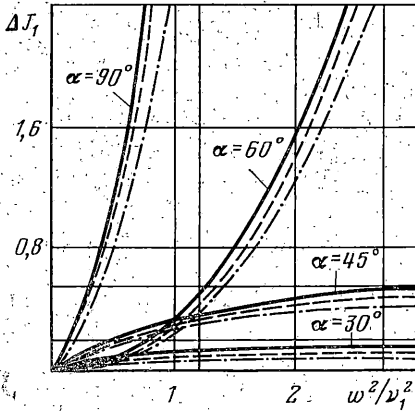
$$\Delta J_1 > \sum_{j=1}^N \frac{(r_1 n_j + d_j \sin \alpha)^2}{v_j^2 \omega^{-2} - H_{jj} \sin \alpha + U_{jj} - s_j^2 (m \mu_0 l)^{-1}} \quad (2.6)$$

$$\Delta J_2 > \sum_{j=1}^N \frac{[d_j (\cos \alpha - \sin \alpha) + r_2 n_j \cos \alpha - r_1 n_j \sin \alpha]^2}{v_j^2 \omega^{-2} - H_{jj} + U_{jj} - s_j^2 (m \mu_0 l)^{-1}}$$

$$\Delta J_1 = (J_1^* - I_3) / (\mu_0 l^3), \quad \Delta J_2 = (J_1^* - I_2) / (\mu_0 l^3)$$

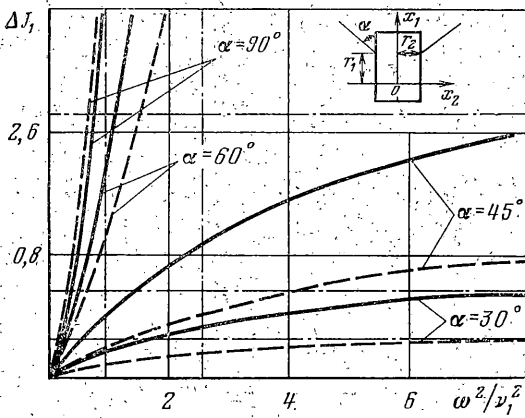
v_j — собственная частота колебаний стержней.

Можно показать, что ряды, входящие в (2.6), сходятся и оценить влияние отбрасываемых членов разложения на изменение границы области устойчивости. На фиг. 2 показана область устойчивости для $N=30$ (сплошные), $N=10$ (штриховые), $N=1$ (штрихпунктирные) учитываемых членов разложения и для различных углов наклона стержней. Результаты расчетов показывают, что при увеличении N от 5 и выше границы области устойчивости практически не изменяются, а увеличение угла установки стержней от 0 до 90° значительно уменьшает область устойчивости. При этом для $\alpha > 50^\circ$ скорость вращения не должна быть больше первой собственной частоты колебаний стержней. При увеличении жесткости стержней возрастает собственная частота колебаний гибких элементов и допустимая скорость вращения. На

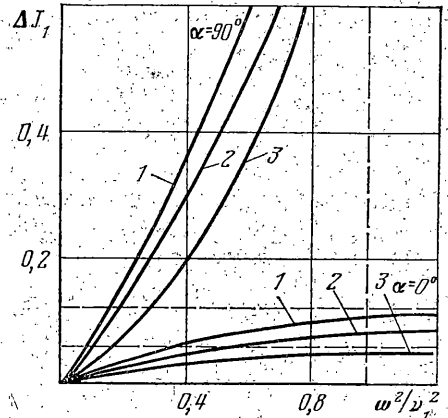


Фиг. 2

При этом для $\alpha > 50^\circ$ скорость вращения не должна быть больше первой собственной частоты колебаний стержней. При увеличении жесткости стержней возрастает собственная частота колебаний гибких элементов и допустимая скорость вращения. На



Фиг. 3



Фиг. 4

фиг. 3 приведено изменение области устойчивости при увеличении расстояния от центра масс объекта до точки крепления стержней ($r_1/l=0,4$ — сплошные линии, $r_1/l=0,1$ — штриховые). Расчеты показывают, что при возрастании r_2 область устойчивости увеличивается, а при увеличении r_1 — уменьшается. Штрихпунктирными линиями показаны асимптоты. На фиг. 4 сравниваются результаты расчетов границ областей устойчивости для объекта с двумя гибкими элементами, расположенными по оси вращения ($\alpha=90^\circ$), а также перпендикулярно к ней ($\alpha=0^\circ$). Кривая 1 определяет границу области устойчивости, полученной по методике, предложенной в [1]. Результаты аналитических исследований, проведенных в [3, 4], представляются кривыми 2 и 3 соответственно. Сравнение показывает, что из-за оценок используемых функционалов области устойчивости, полученные в [3], оказались уже, чем в [1]. Таким же недостатком обладают результаты, полученные несколько иным путем в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Докучаев Л. В. Построение областей устойчивого вращения космического аппарата с упругими штангами.— Космические исследования, 1969, т. 7, вып. 4, с. 534—564.
2. Румянцев В. В. О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 6, с. 946—957.
3. Рубановский В. Н. Устойчивость стационарных вращений тяжелого твердого тела с двумя упругими стержнями.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 55—64.
4. Meirovitch L. Liapunov stability analysis of hybrid dynamical systems in the neighborhood of nontrivial equilibrium.— AIAA Journal, 1974, v. 12, № 7, p. 889—898.
5. Teixeira-Filho O. R., Kane T. R. Spin stability of torque-free systems. Pt I, II.— AIAA Journal, 1973, v. 11, № 6, p. 862—870.
6. Barbera F. J., Likins P. Liapunov stability analysis of spinning flexible spacecraft.— AIAA Journal, 1973, v. 11, № 4, p. 457—466.
7. Samin J. C., Willems P. Y. On the attitude dynamics of spinning deformable systems.— AIAA Journal, 1975, v. 13, № 6, p. 812—817.
8. Brown D. P., Schlack A. L. Stability of a spinning body containing an elastic membrane via Liapunov's direct method.— AIAA Journal, 1972, v. 10, No. 10, p. 1286—1290.

Москва

Поступила в редакцию
8.XII.1980