МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1982

УДК 539.3

К ТЕОРИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗНОСА

АЛЕКСАНДРОВ В. М., КОВАЛЕНКО Е. В.

Рассматриваются плоские контактные задачи для линейно-деформируемого основания общего типа [1] при наличии изнашивания его поверхности, имеющего место при движении бесконечного цилиндрического штампа ширины $2a$ вдоль своей образующей.

В отличие от задач, рассмотренных ранее в [2–5], предполагается, что зависимость скорости изнашивания поверхности линейно-деформируемого основания от удельного давления штампа и осредненного по времени модуля скорости его движения носит нелинейный (степенной) характер. Считается, что в процессе изнашивания область контакта остается неизменной, а поверхность штампа не изнашивается. Силы трения (τ_{yz}), развивающиеся в области контакта, не влияют на закон распределения контактного давления и при определении осадки поверхности линейно-деформируемого основания (как и инерционные силы, возникающие от движения штампа) не учитываются.

В публикуемой работе предлагается эффективный метод решения контактных задач при наличии нелинейного износа, который дает возможность построить асимптотические разложения для основных характеристик явления при достаточно большом времени.

1. В соответствии с усталостной теорией износа для различных его видов [6] скорость изнашивания является функцией удельного давления $p(x,t)$ и осредненного по времени модуля скорости скольжения штампа V. Обычно таким зависимостям придают степенной вид

$$v_*^{\cdot}=k_*V^{\varkappa}p^{\nu}(x,t),\qquad v_*=k_*V^{\varkappa}\int\limits_0^t p^{\nu}(x,\tau)\,d\tau \tag{1.1}$$

где k_* — коэффициент, характеризующий износостойкость материалов и условия работы данной пары, а показатели $\varkappa$ и ν зависят от комбинации трущихся поверхностей, причем, как правило, $\varkappa=1$, $1\leqslant\nu<3$.

Перемещение штампа в направлении, перпендикулярном поверхности линейно-деформируемого основания вследствие его деформирования складывается из двух перемещений: упругого, дающегося формулами теории упругости [7]; дополнительного, обусловленного деформациями микронеровностей поверхностей контактирующих тел, и пропорционального $p^{\mu}(x,t)$ $(0<\mu\leqslant1)$ [8], т. е.

$$v=\frac{1}{\pi\theta}\int\limits_{-a}^{a}p(\xi,t)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi+\theta_*p^{\mu}(x,t) \tag{1.2}$$

$$K(z)=\int\limits_0^{\infty}\frac{L(u)}{u}\cos(uz)\,du\qquad\left(z=\frac{\xi-x}{\lambda}\right) \tag{1.3}$$

Здесь θ — некоторая комбинация упругих постоянных основания, определяемая конкретными задачами, a — полуширина области контакта, λ —

характерный геометрическсий параметр (в случае слоя, например, $\theta = G(1-\sigma)^{-1}$, $\lambda=h$), θ_* — коэффициент, связанный с деформациями микронеровностей поверхностей контактирующих тел (или с шероховатостями этих тел). Будем считать, что функция $L(u)u^{-1}$ непрерывна, вещественна и четна на действительной оси

$$L(u)u^{-1}>0 \quad (|u|<\infty) \tag{1.4}$$

$$L(u)=Au+O(u^3) \quad (u\to 0) \tag{1.5}$$

$$L(u)u^{-1}=Bu^{-2r}[1+O(u^{-s})] \quad (u\to\infty) \quad (^1/_4<r<1)$$

где A, B, r, s — постоянные, причем $s>r$ при $r\geqslant {}^1/_2$ и $s<1-r$ при $r<{}^1/_2$.

Очевидно, в силу условия контакта штампа с поверхностью линейно-деформируемого основания

$$v+v_*=\gamma(t)+\beta(t)x-f(x) \quad (|x|\leqslant a) \tag{1.6}$$

где $\gamma(t)+\beta(t)x$ — жесткое перемещение штампа под действием приложенных к нему силы $P(t)$ и момента $M(t)$, $f(x)$ — функция, описывающая форму основания штампа [1].

Подставляя (1.1), (1.2) в (1.6), получим интегральное уравнение относительно неизвестного под штампом контактного давления

$$\theta_*\varphi^\mu(x,t)+\int_{-1}^{1}\varphi(\xi,t)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi[\gamma(t)+\beta(t)x-f(x)]-\int_0^t\varphi^\nu(x,\tau)d\tau$$

$$(0\leqslant t\leqslant T,\ |x|\leqslant 1) \tag{1.7}$$

$$\xi'=\xi a^{-1},\quad x'=xa^{-1},\quad \lambda'=\lambda a^{-1},\quad t'=\pi D\theta^\nu a^{-1}t,\quad D=k_*V^\varkappa$$

$$\theta_*'=\pi\theta_*\theta^\mu a^{-1},\quad \gamma'(t')=\gamma(t)a^{-1},\quad \beta(t)=\beta'(t'),\quad f'(x')=f(x)a^{-1}$$

$$\varphi(x',t')=p(x,t)\theta^{-1},\quad P'(t')=P(t)(a\theta)^{-1},\quad M'(t')=M(t)(a^2\theta)^{-1}$$

Далее считается $\mu=1$ и штрихи над безразмерными параметрами опускаются.

Решение уравнения (1.7) должно быть найдено при очевидных условиях статики

$$P(t)=\int_{-1}^{1}\varphi(x,t)dx,\quad M(t)=\int_{-1}^{1}x\varphi(x,t)dx \tag{1.8}$$

Заметим, что при $t=0$ уравнение (1.7) и условия (1.8) приобретают известный из теории статических контактных задач вид [7] ($|x|\leqslant 1$):

$$\theta_*\varphi(x,0)+\int_{-1}^{1}\varphi(\xi,0)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi[\gamma(0)+\beta(0)x-f(x)] \tag{1.9}$$

$$P(0)=\int_{-1}^{1}\varphi(x,0)dx,\quad M(0)=\int_{-1}^{1}x\varphi(x,0)dx \tag{1.10}$$

Теперь с учетом формул (1.3)—(1.5) приведем некоторые результаты из [9, 10].

Лемма. При $z=(\xi-x)\lambda^{-1}\to 0$ справедливы оценки $K(z)=O(|z|^{2r-1})$, $r<{}^1/_2$; $K(z)=O(\ln|z|)$, $r={}^1/_2$; $K(z)=O(1)$, $r>{}^1/_2$; при $|z|\geqslant\varepsilon>0$ функция $K(z)$ непрерывна.

---

[1] Здесь и далее считаем $0\leqslant t\leqslant T$, где величина T достаточно большая, но такая, что $\gamma(t)$ и $\beta(t)$ имеют порядок перемещений в линейной теории упругости.

В соответствии с неравенством

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)\right]^2 d\xi\, dx=m<\infty \qquad (m=\text{const})$$

вытекающим из леммы и формул (1.5), сформулируем следующую теорему.

Теорема. Если функция $f(x)\in L_2(-1, 1)$, то решение уравнения (1.9) в пространстве $L_2(-1, 1)$ существует и единственно при любых значениях параметров λ, $\theta_*\in(0, \infty)$.

2. Пусть жесткое перемещение штампа изменяется во времени по закону

$$\gamma(t)=\gamma_0+\gamma_1 t, \quad \beta(t)=\beta_0+\beta_1 t \quad (\gamma_1, \beta_1\neq 0) \tag{2.1}$$

Не нарушая общности рассуждений, исследуем только четный случай уравнения (1.7), (1.8) ($\beta(t)\equiv 0$, $f(x)$ — четная функция переменной x), имея в виду, что для нечетного случая все можно сделать аналогично.

Продифференцировав обе части уравнения (1.7) по t, перепишем его в форме

$$\theta_*\varphi^{\cdot}(x, t)+\int_{-1}^{1}\varphi^{\cdot}(\xi, t)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi\gamma_1-\varphi^{\nu}(x, t) \tag{2.2}$$

$$(|x|\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T)$$

Будем искать решение уравнения (2.2) при достаточно больших значениях переменной $t\in[0, T]$ в виде

$$\varphi(x, t)=\varphi_0(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k{}^*(x, t)=\varphi_0(x)+O(t^{-\delta}) \tag{2.3}$$

$$\varphi_{k+n}^*(x, t)/\varphi_k{}^*(x, t)\to 0 \quad (t\to\infty,\ k\geqslant 0,\ n\geqslant 1,\ \delta>0)$$

Изложим теперь алгоритм построения любого члена приближения в асимптотическом решении (2.3). Для этого воспользуемся методом, аналогичным по своей структуре методу Ньютона [11]. В результате получим

$$l\varphi_0{}^{\cdot}(x, t)+\int_{-1}^{1}\varphi_0{}^{\cdot}(\xi, t)K^*(\xi, x, \lambda)\,d\xi=-\varphi_0(x, t) \tag{2.4}$$

$$l\varphi_1{}^{\cdot}(x, t)+\int_{-1}^{1}\varphi_1{}^{\cdot}(\xi, t)K^*(\xi, x, \lambda)\,d\xi=-\varphi_1(x, t)-$$

$$-\frac{\nu-1}{2\sqrt{\nu}\,[\varphi_0(x)]^{1/2(1+\nu)}}[\varphi_0(x, t)]^2 \quad (|x|\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ l\nu(\pi\gamma_1)^{(\nu-1)/\nu}=\theta_*) \tag{2.5}$$

$$K^*(\xi, x, \lambda)=\nu^{-1}[\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)]^{1/2(1-\nu)}K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)$$

$$\varphi_0(x)=(\pi\gamma_1)^{1/\nu}, \qquad \varphi_k(x, t)=\sqrt{\nu}[\varphi_0(x)]^{1/2(\nu-1)}\varphi_k{}^*(x, t) \qquad (k\geqslant 0)$$

В уравнении (2.5) учтено, что $[\varphi_0(x, t)]^2\sim\varphi_1(x, t)$ при $t\to\infty$.

Прежде чем приступить к решению полученных интегральных уравнений (2.4), (2.5), отметим, что результаты из [10] дают основание утверждать: оператор

$$H\varphi=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)K^*(\xi, x, \lambda)\,d\xi \quad (|x|\leqslant 1,\ 0<\lambda<\infty) \tag{2.6}$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительно-определенным, действующим из $L_2(-1, 1)$ в $L_2(-1, 1)$. Отсюда по общей теории самосопряженных, вполне непрерывных, положительно-определенных операторов в гильбертовых пространствах [11] следует, что оператор H в $L_2(-1, 1)$ имеет множество нетривиальных собственных функций $\varphi_n(x)$ $(n\geqslant1)$, составляющих полную ортонормированную систему, с характеристическими числами α_n. При этом все α_n вещественны, положительны и $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_k\leqslant\ldots<\infty$, $\lim\alpha_n=0$ при $n\to\infty$.

Представим решение уравнения (2.4) в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора H, т. е.

$$\varphi_0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}(t)\varphi_{2k}(x) \tag{2.7}$$

$$\varphi_{2k}(x)=\alpha_{2k}\int_{-1}\varphi_{2k}(\xi)K^*(\xi,x,\lambda)\,d\xi \qquad (|x|\leqslant1)$$

где $\varphi_{2k}(x)$ — четные функции. Подставляя (2.7) в (2.4) и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты правой и левой частей при собственных функциях одинакового номера, будем иметь

$$a_{2k}^{\bullet}(t)+\beta_{2k}a_{2k}(t)=0, \qquad \beta_{2k}=\alpha_{2k}/(1+l\alpha_{2k}) \tag{2.8}$$

или

$$a_{2k}(t)=R_{2k}e^{-\beta_{2k}t} \qquad (R_{2k}=\text{const}) \tag{2.9}$$

Таким образом, решение (2.7) с учетом (2.8), (2.9) перепишется в форме

$$\varphi_0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}R_{2k}e^{-\beta_{2k}t}\varphi_{2k}(x) \tag{2.10}$$

Заметим, что в силу полноты системы экспонент в $C(0,T)$ [12] формула (2.10) указывает на то, в каком виде следует искать решения уравнения (2.5) и всех последующих уравнений.

А именно, представим функцию $\varphi_1(x,t)$ в (2.5) в форме

$$\varphi_1(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}B_{ij}(x)\exp[-(\beta_{2i}+\beta_{2j})t], \quad B_{ij}(x)=B_{ji}(x) \tag{2.11}$$

Подставляя (2.10), (2.11) в (2.5) и приравнивая в полученном выражении коэффициенты левой и правой частей при одинаковых экспонентах, получим $(|x|\leqslant1)$:

$$\begin{gathered}[l(\beta_{2i}+\beta_{2j})-1]B_{ij}(x)+(\beta_{2i}+\beta_{2j})\int_{-1}^{1}B_{ij}(\xi)K^*(\xi,x,\lambda)\,d\xi=\\ =\frac{\nu-1}{2\sqrt{\nu}[\varphi_0(x)]^{1/2(1+\nu)}}R_{2i}R_{2j}\varphi_{2i}(x)\varphi_{2j}(x) \quad (i,j\geqslant1)\end{gathered} \tag{2.12}$$

Будем искать решение интегрального уравнения (2.12) в виде

$$B_{ij}(x)=R_{2i}R_{2j}\sum_{m=1}^{\infty}h_m^{ij}\varphi_{2m}(x) \quad (i,j\geqslant1) \tag{2.13}$$

Разлагая далее функцию

$$\frac{\nu-1}{2\sqrt{\nu}[\varphi_0(x)]^{1/2(1+\nu)}}\varphi_{2i}(x)\varphi_{2j}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}g_m^{ij}\varphi_{2m}(x) \tag{2.14}$$

в ряд Фурье, подставляя (2.13), (2.14) в уравнение (2.12), а также приравнивая в полученном соотношении коэффициенты правой и левой частей при собственных функциях оператора H одинакового номера, будем иметь

$$h_n^{ij}=\frac{\beta_{2n}}{\beta_{2i}+\beta_{2j}-\beta_{2n}}g_n^{ij} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.15}$$

Продолжая указанный процесс построения членов асимптотического ряда (2.3), можем получить поправочные члены решения интегрального уравнения (2.2) любого порядка малости при $t\to\infty$.

Удовлетворим теперь первоначальному интегральному уравнению задачи (1.7), (2.1) при $t=0$, $\beta(t)\equiv0$ соответствующим выбором счетного множества постоянных R_{2k} $(k=1,2,\ldots)$.

Предположим, что функция $f(x)\in L_2(-1,1)$ и разложим ее в ряд Фурье $f(x)=\Sigma f_{2k}\varphi_{2k}(x)$ $(k=1,2,\ldots)$. Подставляя затем ее в уравнение (1.9), учитывая (2.10), (2.11), (2.13) и выражения

$$K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)=\nu(\pi\gamma_1)^{(\nu-1)/\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\xi)\varphi_k(x)}{\alpha_k}, \qquad 1=\sum_{k=1}^{\infty}b_{2k}\varphi_{2k}(x)$$

а также приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при собственных функциях оператора H одинакового номера, получим бесконечную нелинейную алгебраическую систему для определения неизвестных постоянных R_{2k} $(k=1,2,\ldots)$ вида

$$\begin{gathered}\sqrt{\nu}(\pi\gamma_1)^{1/2(\nu-1)/\nu}\Big[\sqrt{\nu}\,b_{2k}(\pi\gamma_1)^{1/2(\nu+1)/\nu}+R_{2k}+\\+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}h_k^{ij}R_{2i}R_{2j}+\ldots\Big]=\pi\beta_{2k}(\gamma_0 b_{2k}-f_{2k})\end{gathered} \tag{2.16}$$

После решения системы (2.16) определим $\varphi_k^*(x,t)$ $(k\geqslant0)$, а вместе с тем найдем решение $\varphi(x,t)$ согласно (2.3). При этом по формуле (1.8) найдем силу, действующую на штамп. Заметим, что конечное значение ее $P(\infty)=2(\pi\gamma_1)^{1/\nu}$ зависит лишь от скорости поступательного перемещения штампа. Точно так $M(\infty)={}^2/_3(\pi\beta_1)^{1/\nu}$, т. е. зависит лишь от угловой скорости поворота штампа.

3. Приведем алгоритм построения собственных функций оператора H. Рассмотрим уравнение

$$(E-\alpha H)\varphi=0 \qquad (|x|\leqslant1) \tag{3.1}$$

(E — единичный оператор) и будем искать его собственные функции $\varphi_k(x)$ в виде

$$\varphi_k(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{(k)}P_m^*(x), \qquad P_m^*(x)=\sqrt{\frac{2m+1}{2}}P_m(x) \tag{3.2}$$

Здесь $\{P_m^*(x)\}$ — система нормированных полиномов Лежандра; известно, что они составляют базис в пространстве $L_2(-1,1)$.

Разложим функцию $K^*(\xi,x,\lambda)$ в двойной ряд Фурье по указанным многочленам

$$K^*(\xi,x,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}e_{ij}(\lambda)P_i^*(\xi)P_j^*(x) \tag{3.3}$$

$$e_{ij}(\lambda)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K^*(\xi,x,\lambda)P_i^*(\xi)P_j^*(x)\,d\xi\,dx \tag{3.4}$$

Подставляя (3.2), (3.3) в (3.1), используя условие ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая в полученном выражении коэффициенты при полиномах одинакового номера, получим

$$\alpha_k\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(k)} e_{jm}(\lambda)=a_j^{(k)} \qquad {\scriptstyle (j=0,1,\ldots)} \tag{3.5}$$

Опираясь на результаты леммы, с учетом формулы для $\varphi_0(x)$ можно показать, что $\Sigma\Sigma e_{ij}^2(\lambda)<\infty$ $(i,j=0,1,\ldots)$, т. е. оператор, стоящий в левой части соотношения (3.5), действует из пространства квадратично-суммируемых последовательностей l_2 в l_2 вполне непрерывно при $\lambda\in(0,\infty)$. Таким образом, к бесконечной системе (3.5) применима теорема Гильберта [11] о ее разрешимости. Чтобы существовало нетривиальное решение указанной системы (3.5), приравняем ее определитель нулю. Получим уравнение для определения счетного множества характеристических чисел α_k. Определив α_k, найдем затем $a_m^{(k)}$, выразив их через $a_0^{(k)}$

$$a_m^{(k)}=a_0^{(k)}\,b_m^{(k)} \qquad (b_0^{(k)}=1) \tag{3.6}$$

В результате можно записать

$$\varphi_k(x)=a_0^{(k)}\varphi_k^*(x), \qquad \varphi_k^*(x)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(k)} P_m^*(x) \qquad {\scriptstyle (k\geqslant 1)} \tag{3.7}$$

Постоянные $a_0^{(k)}$ в (3.6), (3.7) должны быть подобраны из условия ортонормированности собственных функций $\varphi_k(x)$ оператора H. Итак, имеем (δ_{kn} — символ Кронекера):

$$\int_{-1}^{1}\varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx=a_0^{(k)}a_0^{(n)}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(k)}b_i^{(n)}=\delta_{kn} \qquad {\scriptstyle (k,n=1,2,\ldots)} \tag{3.8}$$

После определения $a_0^{(k)}$ из системы (3.8) будут найдены искомые собственные функции $\varphi_k(x)$ оператора H.

4. Пусть $P=M=\mathrm{const}$. Предположим при этом, что жесткое перемещение штампа вследствие изнашивания поверхности линейно-деформируемого основания изменяется во времени по закону [2]

$$\gamma(t)=\gamma t+\gamma_0+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^* e^{-\beta_{2k}t}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{kn}^* e^{-(\beta_{2k}+\beta_{2n})t}+\ldots \tag{4.1}$$

где γ, γ_0, γ_k^*, γ_{kn}^*, β_{2k} ($\gamma\neq 0$; $k,n\geqslant 1$) — постоянные. Задание $\gamma(t)$ в форме (4.1) оправдано тем, что, как показано в предыдущем пункте, при достаточно большом t некоторым постоянным значениям P соответствует линейное изменение во времени $\gamma(t)$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\theta_*\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}(x,t)+\int_{-1}^{1}\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}(\xi,t)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}(t)-\varphi^{\nu}(x,t) \tag{4.2}$$

$$(|x|\leqslant 1, \qquad 0\leqslant t\leqslant T)$$

[2] Здесь и далее, как в п. 2, не нарушая общности рассуждений, будем рассматривать только четный вариант задачи.

получающееся из (1.7) дифференцированием по t обеих его частей. Будем искать решение (4.2) в виде (2.3). Воспользовавшись далее, как и ранее, методом Ньютона, с учетом (4.1) и введенных обозначений получим

$$l\varphi_0^{\cdot}(x,t)+\int_{-1}^{1}\varphi_0^{\cdot}(\xi,t)K^*(\xi,x,\lambda)\,d\xi=-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{2k}\gamma_k e^{-\beta_{2k}t}-\varphi_0(x,t) \quad (4.3)$$

$$l\varphi_1^{\cdot}(x,t)+\int_{-1}^{1}\varphi_1^{\cdot}(\xi,t)K^*(\xi,x,\lambda)\,d\xi=-\varphi_1(x,t)-$$

$$-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{2k}+\beta_{2n})\gamma_{kn}\exp[-(\beta_{2k}+\beta_{2n})t]-\frac{\nu-1}{2\sqrt{\nu}(\pi\gamma)^{{}^1\!/_2(1+\nu)/\nu}}[\varphi_0(x,t)]^2 \quad (4.4)$$

$$\gamma_k=\gamma_k^*b,\qquad \gamma_{kn}=\gamma_{kn}^*b,\qquad b=[\sqrt{\nu}(\pi\gamma)^{{}^1\!/_2(\nu-1)/\nu}]^{-1},\qquad l=b^2\theta_*,$$

$$\varphi_0(x)=(\pi\gamma)^{1/\nu}\quad(|x|\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T)$$

Представим теперь решения уравнений (4.3), (4.4) в форме

$$\varphi_0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{2k}(x)e^{-\beta_{2k}t} \quad (4.5)$$

$$\varphi_1(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{kn}(x)\exp[-(\beta_{2k}+\beta_{2n})t]$$

Тогда после очевидных преобразований запишем

(4.6)

$$\alpha_{2k}\int_{-1}^{1}\varphi_{2k}(\xi)K^*(\xi,x,\lambda)\,d\xi=\pi\alpha_{2k}\gamma_k+\varphi_{2k}(x)\quad(|x|\leqslant 1,\ \beta_{2k}=\alpha_{2k}/(1+l\alpha_{2k}))$$

$$\alpha_{2k,2n}\int_{-1}^{1}B_{kn}(\xi)K^*(\xi,x,\lambda)\,d\xi=\pi\alpha_{2k,2n}\gamma_{kn}+B_{kn}(x)+$$

$$+\frac{(\nu-1)(1+l\alpha_{2k,2n})}{2\sqrt{\nu}(\pi\gamma)^{{}^1\!/_2(1+\nu)/\nu}}\varphi_{2k}(x)\varphi_{2n}(x)$$

$$(|x|\leqslant 1,\quad \alpha_{2k,\,2n}=(\beta_{2k}+\beta_{2n})/[1-l(\beta_{2k}+\beta_{2n})]$$

Отметим, что в силу свойств оператора H, указанных в п. 2, уравнения (4.6) почти при всех α_{2k} $(k\geqslant 1)$ и $\lambda\in(0,\infty)$ однозначно разрешимы в $L_2(-1,1)$. Кроме того

$$P=\int_{-1}^{1}\varphi(x,t)\,dx=P_0+b\sum_{n=1}^{\infty}P_n e^{-\beta_{2n}t}+b\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}P_{nm}\exp[-(\beta_{2n}+\beta_{2m})t]+\ldots \quad (4.7)$$

$$P_0=2(\pi\gamma)^{1/\nu},\quad P_n=\int_{-1}^{1}\varphi_{2n}(x)\,dx=0,\quad P_{nm}=\int_{-1}^{1}B_{nm}(x)\,dx=0\quad(n,m\geqslant 1)$$

Ищем решения уравнений (4.6) в форме рядов Фурье по ортонормированной системе полиномов Лежандра

$$\varphi_{2k}(x)=\pi\sqrt{2}\,\alpha_{2k}\gamma_k\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(k)}P_{2n}{}^*(x)\qquad (k\geqslant 1)\tag{4.8}$$

$$B_{kn}(x)=\pi\sqrt{2}\,\alpha_{2k,2n}\gamma_k\gamma_n\sum_{m=0}^{\infty}h_m{}^{kn}P_{2m}{}^*(x)\qquad (k,n\geqslant 1)$$

Подставляя (3.3), (4.8) в (4.6), используя условие ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты правой и левой частей при многочленах одинакового номера, получим

$$\alpha_{2k}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(k)}e_{mn}(\lambda)-a_m^{(k)}=\delta_{0m}\qquad (m=0,1,\ldots)\tag{4.9}$$

$$\alpha_{2k,2n}\sum_{m=0}^{\infty}h_m{}^{kn}e_{im}(\lambda)=\gamma_{kn}(\gamma_k\gamma_n)^{-1}\,\delta_{i0}+h_i{}^{kn}+g_i{}^{kn}\tag{4.10}$$

$$g_i{}^{kn}=\frac{(\nu-1)\,(\gamma_k\gamma_n)^{-1}}{2\pi\sqrt{2\nu}\,(\pi\gamma)^{{}^1\!/_2(1+\nu)/\nu}(\beta_{2k}+\beta_{2n})}\int_{-1}^{1}\varphi_{2k}(x)\,\varphi_{2n}(x)P_{2i}{}^*(x)\,dx\qquad (i=0,1,\ldots)$$

Заметим, что в силу (4.7), (4.8) $a_0^{(k)}=0$, $h_0{}^{kn}=0$ $(k,n\geqslant 1)$. Эти условия служат для определения неизвестных величин α_{2k}, $\gamma_{kn}(\gamma_k\gamma_n)^{-1}$. Действительно, из (4.9) имеем $a_0^{(k)}=\Delta_1/\Delta$, где Δ — основной определитель системы (4.9), Δ_1 — вспомогательный определитель, который получается из Δ заменой в нем первого столбца элементами $\{1,0,0,\ldots,0,\ldots\}$. Определитель Δ_1 симметричный, поэтому его корни α_{2k} $(k\geqslant 1)$ вещественны. Кроме того, ранее было отмечено, что при достаточно большом времени постоянным значениям P соответствует линейное изменение во времени $\gamma(t)$, поэтому суммы по экспонентам в (4.1) при $t\to\infty$ должны исчезать. Отсюда, в частности, следует, что все $\alpha_{2i}>0$ $(i\geqslant 1)$, в чем можно также убедиться непосредственно с помощью вычислительного критерия Сильвестра [13].

Покажем теперь, что условие $h_0{}^{kn}=0$ служит для однозначного определения $\gamma_{kn}(\gamma_k\gamma_n)^{-1}$. Из системы (4.10) следует, что $h_0{}^{kn}=\Delta_3/\Delta_2$, где $\Delta_2=\det\left[\alpha_{2k,\,2n}e_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}\right]$, Δ_3 — вспомогательный определитель системы (4.10), получающийся из основного Δ_2 заменой первой колонны элементами $\{\gamma_{kn}(\gamma_k\gamma_n)^{-1}+g_0{}^{kn}, g_1{}^{kn}, g_2{}^{kn},\ldots,g_i{}^{kn},\ldots\}$. Очевидно, чтобы из условия $h_0{}^{kn}=0$ можно было подобрать $\gamma_{kn}(\gamma_k\gamma_n)^{-1}$ единственным образом, требуется, чтобы определитель $\Delta_4=\det\left[\alpha_{2k,\,2n}e_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}\right]$ $(i,j\geqslant 1)$ был отличен от нуля. Нетрудно заметить, что по своей структуре Δ_4 совпадает с Δ_1, в котором вместо элементов $\alpha_{2k,\,2n}e_{ij}(\lambda)-1$ $(i,j\geqslant 1)$ стоят $\alpha_{2k}e_{ij}(\lambda)-1$. Предположим, что $\Delta_4=0$, тогда из условия $a_0^{(k)}=0$ следует $\alpha_{2k,\,2n}=\alpha_{2n}$, откуда $\alpha_{2k}=0$ $(k\geqslant 1)$. Но этого быть не может, так как $\alpha_{2k}>0$ $(k\geqslant 1)$. Следовательно, $\Delta_4\neq 0$ и условие $h_0{}^{kn}=0$ служит для однозначного подбора $\gamma_{kn}(\gamma_k\gamma_n)^{-1}$.

Определив, таким образом, числа α_{2k}, $\gamma_{kn}(\gamma_k\gamma_n)^{-1}$, найдем затем из неоднородных систем (4.9), (4.10) $a_m^{(k)}$, $h_m{}^{kn}$ и построим функции $\varphi_{2k}(x)$, $B_{kn}(x)$ с точностью до счетного множества постоянных γ_k $(k\geqslant 1)$, которые нужно найти из условия удовлетворения уравнению (1.9) при $\beta(0)=0$.

Представляя $f(x)$ в виде $f(x)=\Sigma f_{2i}P_{2i}^*(x)$ $(i=0, 1,\ldots)$, подставляя (2.3), (4.1) при $t=0$ в (1.9), используя формулы (3.3), (4.5), (4.8), а также условие ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при многочленах одинакового номера, получим

$$lz_i(\gamma_k)+\sum_{j=0}^{\infty} e_{ij}(\lambda)z_j(\gamma_k)=\pi[\sqrt{2}\,\gamma(0)\delta_{0i}-f_{2i}) \quad (i=0,1,\ldots) \tag{4.11}$$

$$z_i(\gamma_k)=\sqrt{2}\nu\pi\gamma\delta_{0i}+\sqrt{\nu}(\pi\gamma)^{1/2(\nu-1)/\nu}\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}(\gamma_k)+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{jm}^{(i)}(\gamma_k)+\ldots\right]$$

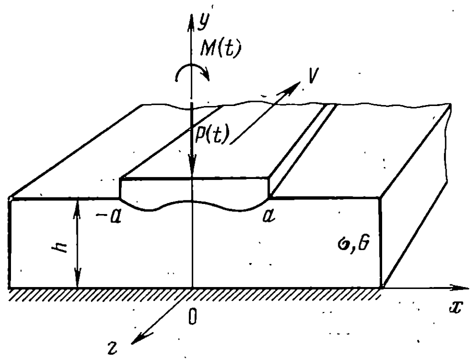
$$c_n^{(i)}(\gamma_k)=\int_{-1}^{1}\varphi_{2n}(\gamma_k)P_{2i}^*(x)\,dx, \quad c_{jm}^{(i)}(\gamma_k)=\int_{-1}^{1}B_{jm}(x)P_{2i}^*(x)\,dx$$

Здесь $\gamma(0)$ связано с γ_0 соотношением, вытекающим из (4.1)

$$\gamma(0)=\gamma_0+b^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_{ij}+\ldots\right)$$

После решения системы (4.11) функции $\varphi_{2k}(x)$, $B_{ij}(x)$ будут полностью определены, а вместе с тем будут найдены $\varphi(x, t)$ и функция $\gamma(t)$, характеризующая перемещение штампа как жесткого целого.

5. В качестве примера рассмотрим плоскую контактную задачу при наличии изнашивания ($\nu=1, \nu={}^3/_2$) для упругости (G, σ) изотропного слоя толщины h, жестко защемленного по основанию (фиг. 1). Положим, при этом $f(x)\equiv 0$ (случай штампа



Фиг. 1

с плоским основанием), $\beta(t)\equiv 0$, $\lambda=ha^{-1}$, $\theta=G(1-\sigma)^{-1}$, $\theta=1$, $L(u)=(2\zeta\,\mathrm{sh}\,2u-4u)/$ $/(2\zeta\,\mathrm{ch}\,2u+1+\zeta^2+4u^2)$ $(\zeta=3-4\sigma)$ и изучим случаи, изложенные в пп. 2, 4.

Представляя коэффициенты (3.4) в виде $e_{ij}(\lambda)=\nu^{-1}[\pi\gamma^*(\infty)]^{(1-\nu)/\nu}e_{ij}^*(\lambda)$ и используя интеграл

$$\int_0^1 P_{2n}(x)\cos(ux)\,dx=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2u}}\,J_{1/2+2n}(u)$$

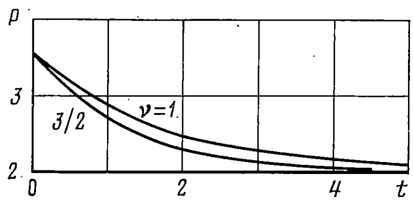
($J_{1/2+2n}(u)$ — функции Бесселя полуцелого порядка), получим

$$e_{ij}^*(\lambda)=(-1)^{i+j}(\pi\lambda)\sqrt{(4i+1)(4j+1)}\int_0^{\infty}L(u)u^{-2}J_{1/2+2i}\left(\frac{u}{\lambda}\right)J_{1/2+2j}\left(\frac{u}{\lambda}\right)du \tag{5.1}$$

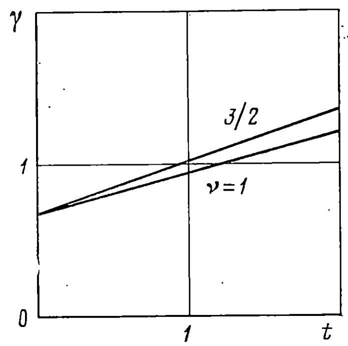
Коэффициенты $e_{ij}^*(\lambda)$ в (5.1) подсчитаны с точностью до $\varepsilon=10^{-5}$ при $\lambda=1$, $\sigma=0{,}3$ и приведены ниже

ij	$e_{ij}^*(1)$	ij	$e_{ij}^*(1)$	ij	$e_{ij}^*(1)$
00	1,20168	03	−0,00863	22	0,44640
01	−1,16220	11	0,74072	23	−0,12009
		12	−0,17450		
02	−0,04062	13	−0,02811	33	0,30896

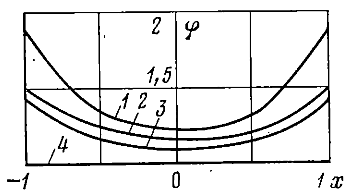
Ограничимся в формуле (2.3) случаем $k=0$ и будем решать бесконечные системы (3.5) и (4.9) методом редукции, взяв в них три первых уравнения. Полагая $\gamma_0=1$, $P=2$ соответственно для первой и второй задач и используя методику, изложенную в пп. 2, 4, найдем величину вдавливающей силы $P(t)$ для первой задачи



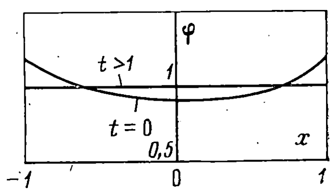
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

и величину поступательного перемещения штампа $\gamma(t)$ для второй задачи при $\nu=1$, $^3/_2$ (фиг. 2, 3).

На фиг. 4, 5 приведены значения $\varphi(x, t)$ для первой и второй задач соответственно, посчитанные для $\gamma_0=1$, $P=2$ и $\nu=1$, $^3/_2$. Кривые *1–4* на фиг. 4 соответствуют $t=0$; $t=1$, $\nu=1$; $t=1$, $\nu=^3/_2$; $t=\infty$.

Отметим, что при $t=0$ для обоих случаев решения определяются формулами из [10].

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за ценные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. *Коровчинский М. В.* Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей.— В сб.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М.: Наука, 1971, с. 130—140.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости при наличии износа.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 6, с. 981—986.
4. *Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П.* Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4. 60—67.
5. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Плоские контактные задачи теории упругости для неклассических областей при наличии износа.— ПМТФ, 1980, № 3, с. 163—172.
6. Трение, изнашивание, смазка (справочник). / Под ред. Крагельского И. В., Алисина В. В. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 400 с.

7. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. *Дёмкин Н. Б.* Расчет и экспериментальное исследование характеристик контакта шероховатых поверхностей.— В кн.: Контактные задачи и их инженерные приложения. М.: Н.-и. ин-т машиноведения, 1969, с. 264–271.
9. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике.– ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 88—99.
10. *Коваленко Е. В.* Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 76–82.
11. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
12. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
13. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.IX.1980