МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1982

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

СЛИВКЕР В. И.

Известно, что вариационные постановки задач для упругих систем служат удобной основой для построения и теоретического обоснования многих численных методов таких, например, как вариационно-разностный, конечных элементов, метод Ритца с использованием гладких аппроксимаций. Различия между отдельными вариантами этих методов определяются, в частности, теми функционалами, на базе которых эти варианты строятся.

Наибольшее распространение получили конструкции, основанные на минимизации лагранжиана. Известные недостатки такого подхода (понижение точности при определении напряжений, разрывность полей напряжений при использовании МКЭ) привели к рассмотрению функционалов смешанного типа (рейсснерианов) с независимой аппроксимацией перемещений и напряжений. Эффективность такого подхода подтверждается численным экспериментом, однако этот подход сопровождается одним неприятным обстоятельством: рейсснериан не имеет экстремума в точке стационарности. Это порождает трудности в двух аспектах: во-первых, затруднено теоретическое обоснование численных алгоритмов в силу того, что рейсснериан не порождает метрики; во-вторых, возникают трудности вычислительного характера, поскольку разрешающие ритцевы системы уравнений не обладают свойством положительной определенности.

Рассматривается смешанная вариационная постановка задач для упругих систем, лишенная отмеченного недостатка. Эта постановка опирается на функционал, имеющий минимум в точке стационарности. Уравнениями Эйлера для этого функционала служат линейные комбинации уравнений равновесия и физических соотношений. Аналогичные линейные комбинации входят в естественные краевые условия, каковыми являются краевые условия статического типа. В отличие от рейсснериана рассматриваемый смешанный функционал определен на более узком классе функций, а именно: варьируемые перемещения должны быть кинематически допустимыми.

1. Уравнения равновесия, соотношения Коши и физические соотношения линейно-упругого анизотропного тела при статическом нагружении записываются в декартовой системе координат в виде

$$\sigma_{,j}^{ij}-k^{ij}u_j+F^{\vee i}=0 \qquad (1.1)$$

$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2\,(u_{i,\,j}+u_{j,\,i}) \qquad (1.2)$$

$$\sigma^{ij}=c^{ijkm}\varepsilon_{km}, \qquad \varepsilon_{ij}=d_{ijkm}\sigma^{km} \qquad (1.3)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\mathbf{F}^{\vee}$ — вектор заданных объемных сил, $\mathbf{k}$ — тензор коэффициентов упругости среды, в которую помещено рассматриваемое деформируемое тело, $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathrm{Def}\,\mathbf{u}$ — тензор деформаций Коши, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ — взаимно обратные тензоры жесткости и податливости материала деформируемого тела, удовлетворяющие условиям симметрии $c^{ijkm}=c^{jikm}=c^{kmij}$, $d_{ijkm}=d_{jikm}=d_{kmij}$ и положительной определенности $M_c a^{ij}a_{ij}\geqslant c^{ijkm}a_{ij}a_{km}\geqslant m_c a^{ij}a_{ij}$ $(m_c>0)$, $M_d a^{ij}a_{ij}\geqslant d_{ijkm}a^{ij}a^{km}\geqslant m_d a^{ij}a_{ij}$ $(m_d>0)$, где $\mathbf{a}$ — произвольный симметричный тензор второго ранга, $M_c=1/m_d$, $M_d=1/m_c$ — не зависящие от координат и тензора $\mathbf{a}$ скаляры.

Для трехмерного упругого изотропного тела

$$c^{ijkm}=\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\delta^{ij}\delta^{km}+\frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jm}+\delta^{jk}\delta^{im})\right]$$

$$m_c = \min\left\{\frac{E}{1+\nu}, \frac{E}{1-2\nu}\right\}$$

$$d_{ijkm} = \frac{1}{E}\left[-\nu\delta_{ij}\delta_{km} + \frac{1+\nu}{2}(\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{jk}\delta_{im})\right]$$

$$m_d = \min\left\{\frac{1+\nu}{E}, \frac{1-2\nu}{E}\right\}$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, $\delta_{ij}=\delta^{ij}$ — символ Кронекера.

Для тензора $\mathbf{k}$ будем предполагать, что он удовлетворяет условиям симметрии $k^{ij}=k^{ji}$ и неотрицательности $M_k a^i a_i \geqslant k^{ij}a_i a_j \geqslant 0$, где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор, M_k — скаляр.

Пусть рассматриваемое тело занимает область Ω (одно-, двух- или трехмерного пространства) с кусочно-гладкой границей Γ, состоящей из двух частей Γ_p и Γ_u так, что $\Gamma_p \cup \Gamma_u = \Gamma$, $\Gamma_p \cap \Gamma_u = \varnothing$; при этом на Γ_p поставлены статические, а на Γ_u кинематические краевые условия

$$\sigma^{ij}n_j + \gamma^{ij}(u_j - \check{u}_j) - \check{p}^i = 0 \text{ на } \Gamma_p \tag{1.4}$$

$$u_i - \check{u}_i = 0 \text{ на } \Gamma_u \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ — тензор жесткости упругого слоя, ограничивающего тело вдоль Γ_p, $\check{\mathbf{p}}$ — заданный на поверхности тела Γ_p вектор внешних сил, $\check{\mathbf{u}}$ — вектор перемещений, заданный на внешней (по отношению к телу) поверхности упругого слоя вдоль Γ_p и на поверхности тела Γ_u, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела.

Тензор $\boldsymbol{\gamma}$ удовлетворяет условиям симметрии $\gamma^{ij}=\gamma^{ji}$ и неотрицательности $M_\gamma a^i a_i \geqslant \gamma^{ij}a_i a_j \geqslant 0$, где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор, M_γ — независящий от вектора $\mathbf{a}$ и координат скаляр.

Пусть U — множество кинематически допустимых векторов перемещений, U° — множество кинематически допустимых вариаций векторов перемещений. Векторы из U удовлетворяют краевым условиям (1.5) на Γ_u, а векторы из U° — соответствующим однородным краевым условиям. При этом входящие в оба множества векторы перемещений и порождаемые этими перемещениями тензоры деформаций квадратично суммируемые на Ω. Пусть далее N — произвольное статическое поле, т. е. множество квадратично суммируемых на Ω симметричных тензоров второго ранга. Положим $G=U\times N$ и $G^\circ=U^\circ\times N$.

Обобщенным решением задачи (1.1)—(1.5) назовем пару $\mathbf{g}^*=(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}_*)\in G$, такую, что для любой пары $\mathbf{g}^\circ=(\mathbf{u}^\circ, \boldsymbol{\sigma})\in G^\circ$ имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega (2c^{ijkm}\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{km}^\circ + d_{ijkm}\sigma_*^{ij}\sigma^{km} - \sigma_*^{ij}\varepsilon_{ij}^\circ - \sigma^{ij}\varepsilon_{ij}^* + k^{ij}u_i^*u_j^\circ - \check{F}^i u_i^\circ)\,d\Omega -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_p}[\check{p}^i u_i^\circ - \gamma^{ij}(u_i^* - \check{u}_i)u_j^\circ]\,d\Gamma = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^\circ = \operatorname{Def}\mathbf{u}^\circ, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \operatorname{Def}\mathbf{u}^* \tag{1.6}$$

Покажем, что пара $\mathbf{g}^*$, являющаяся решением задачи (1.1)—(1.5) в обычном смысле, является в то же время и обобщенным решением, т. е. удовлетворяет интегральному тождеству (1.6). Действительно, в соответствии с принципом возможных перемещений имеем

$$\int\limits_\Omega (c^{ijkm}\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{km}^\circ + k^{ij}u_i^*u_j^\circ - \check{F}^i u_i^\circ)\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_p}[\check{p}^i u_i^\circ - \gamma^{ij}(u_i^* - \check{u}_i)u_j^\circ]\,d\Gamma = 0 \tag{1.7}$$

Далее в силу (1.3)

$$c^{ijkm}\varepsilon_{ij}^{*}=\sigma_{*}^{km}, \quad d_{ijkm}\sigma_{*}^{ij}=\varepsilon_{km}^{*}$$

и, следовательно, справедливо тождество

$$\int\limits_{\Omega}(c^{ijkm}\varepsilon_{ij}^{*}\varepsilon_{km}^{\circ}+d_{ijkm}\sigma_{*}^{ij}\sigma^{km}-\sigma_{*}^{ij}\varepsilon_{ij}^{\circ}-\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}^{*})\,d\Omega=0 \tag{1.8}$$

Суммируя полученное тождество с тождеством (1.7), получим соотношение (1.6). Пусть теперь выполнено (1.6). Покажем, что если обобщенное решение в смысле (1.6) достаточно гладкое, то оно является решением задачи (1.1)—(1.5) и в обычном смысле. В силу произвольности тензора $\sigma\in N$ из (1.6) следует $d_{ijkm}\sigma_{*}^{km}=\varepsilon_{ij}^{*}$, что совпадает с (1.3). Следовательно, справедливо тождество (1.8). Вычитая (1.8) из (1.6), получим соотношение (1.7), из которого в силу принципа возможных перемещений при достаточной гладкости вектора $\mathbf{u}^{*}$ следуют уравнения равновесия в перемещениях [1].

2. На множестве G введем в рассмотрение функционал

$$\Phi_{u\sigma}=\int\limits_{\Omega}\left[c^{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km}+\frac{1}{2}d_{ijkm}\sigma^{ij}\sigma^{km}-\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}k^{ij}u_iu_j-F^{\vee i}u_i\right]d\Omega-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_p}\left[p^{\vee i}u_i-\gamma^{ij}\left(\frac{1}{2}u_i-u_i^{\vee}\right)u_j\right]d\Gamma \tag{2.1}$$

Варьируя $\Phi_{u\sigma}$, получим условия его стационарности в виде

$$\delta\Phi_{u\sigma}=\int\limits_{\Omega}(2c^{ijkm}\varepsilon_{ij}^{*}\delta\varepsilon_{km}+d_{ijkm}\sigma_{*}^{ij}\delta\sigma^{km}-\sigma_{*}^{ij}\delta\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{*}\delta\sigma^{ij}+k^{ij}u_i^{*}\delta u_j-F^{\vee i}\delta u_i)\,d\Omega-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_p}[p^{\vee i}\delta u_i-\gamma^{ij}(u_i^{*}-u_i^{\vee})\delta u_j]\,d\Gamma=0$$

Здесь $(\mathbf{u}^{*}, \boldsymbol{\sigma}_{*})$ — точка стационарного функционала $\Phi_{u\sigma}$.

Отождествляя вариации $\delta\boldsymbol{\sigma}$ с $\boldsymbol{\sigma}$ и $\delta\mathbf{u}$ с $\mathbf{u}^{\circ}$, получим интегральное тождество (1.6). Таким образом, задача поиска обобщенного решения, удовлетворяющего интегральному тождеству (1.6), и стационарной точки функционала $\Phi_{u\sigma}$ на множестве G эквивалентны.

Если обобщенное решение $\mathbf{g}^{*}$ существует, то оно оставляет минимум функционалу $\Phi_{u\sigma}$. Для любой пары $\mathbf{g}^{\circ}\in G^{\circ}$ с учетом (1.6) получим

$$\Phi_{u\sigma}(\mathbf{g}^{*}+\mathbf{g}^{\circ})-\Phi_{u\sigma}(\mathbf{g}^{*})=\int\limits_{\Omega}\left[f(\mathbf{g}^{\circ})+\frac{1}{2}k^{ij}u_i^{\circ}u_j^{\circ}\right]d\Omega+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_p}\gamma^{ij}u_i^{\circ}u_j^{\circ}\,d\Gamma$$

$$f(\mathbf{g}^{\circ})=c^{ijkm}\varepsilon_{ij}^{\circ}\varepsilon_{km}^{\circ}+\frac{1}{2}d_{ijkm}\sigma^{ij}\sigma^{km}-\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}^{\circ} \tag{2.2}$$

и остается доказать, что правая часть в (2.2) неотрицательна. Полагая $\varepsilon_{ij}=d_{ijkm}\sigma^{km}$, получим

$$f(\mathbf{g}^{\circ})={}^{1}\!/_{2}c^{ijkm}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{\circ})(\varepsilon_{km}-\varepsilon_{km}^{\circ})+{}^{1}\!/_{2}c^{ijkm}\varepsilon_{ij}^{\circ}\varepsilon_{km}^{\circ}\geqslant 0$$

Отсюда и с учетом неотрицательности тензоров $\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{k}$ следует оценка $\Phi_{u\sigma}(\mathbf{g}^{*}+\mathbf{g}^{\circ})\geqslant\Phi_{u\sigma}(\mathbf{g}^{*})$, что и требовалось доказать.

Пусть для любого ненулевого вектора $\mathbf{u}^{\circ}\in U^{\circ}$ общий потенциал деформирования тела и упругой среды

$$W(\mathbf{u}^{\circ})=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(c^{ijkm}\varepsilon_{ij}^{\circ}\varepsilon_{km}^{\circ}+k^{ij}u_i^{\circ}u_j^{\circ})\,d\Omega+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_p}\gamma^{ij}u_i^{\circ}u_j^{\circ}\,d\Gamma$$

строго положителен.

Неравенство $W(\mathbf{u}^\circ)>0$ может быть обеспечено либо за счет закрепления тела на Γ_u от жестких смещений ($\mathbf{u}^\circ\neq0\Rightarrow\boldsymbol{\varepsilon}^\circ\neq0$), либо за счет накопления энергии в упругой среде в объеме Ω или на поверхности Γ_p тела. При этих условиях обобщенное решение в смысле (1.6) задачи (1.1)—(1.5) единственно. Предположим, что существуют две пары $\mathbf{g}^{*1}\in G$ и $\mathbf{g}^{*2}\in G$, минимизирующие функционал $\Phi_{u\sigma}$. Тогда из (1.6) следует, что

$$\int\limits_\Omega [2c^{ijkm}(\overset{*1}{\varepsilon_{ij}}-\overset{*2}{\varepsilon_{ij}})\varepsilon_{km}{}^\circ+d_{ijkm}(\overset{ij}{\sigma_{*1}}-\overset{ij}{\sigma_{*2}})\sigma^{km}-(\overset{ij}{\sigma_{*1}}-\overset{ij}{\sigma_{*2}})\varepsilon_{ij}{}^\circ-$$

$$-\sigma^{ij}(\overset{*1}{\varepsilon_{ij}}-\overset{*2}{\varepsilon_{ij}})+k^{ij}(u_i{}^{*1}-u_i{}^{*2})u_j{}^\circ]d\Omega+\int\limits_{\Gamma_p}\gamma^{ij}(u_i{}^{*1}-u_i{}^{*2})u_j{}^\circ\,d\Gamma=0$$

Полагая $\mathbf{u}^{*1}-\mathbf{u}^{*2}=\mathbf{u}^\circ$, $\boldsymbol{\sigma}_{*1}-\boldsymbol{\sigma}_{*2}=\boldsymbol{\sigma}$, получим

$$\int\limits_\Omega [2f(\mathbf{g}^\circ)+k^{ij}u_i{}^\circ u_j{}^\circ]d\Omega+\int\limits_{\Gamma_p}\gamma^{ij}u_i{}^\circ u_j{}^\circ\,d\Gamma=0 \qquad (2.3)$$

Переписывая левую часть равенства (2.3) в виде

$$2W(\mathbf{u}^\circ)+\int\limits_\Omega c^{ijkm}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}{}^\circ)(\varepsilon_{km}-\varepsilon_{km}{}^\circ)d\Omega$$

убеждаемся в том, что она строго положительна. Полученное противоречие и доказывает единственность обобщенного решения.

Рассмотрим условия существования обобщенного решения. Пусть $\mathbf{u}^*\in U$ есть точка минимума лагранжиана для задачи (1.1)—(1.5). Необходимое условие существования минимизирующего вектора перемещений для лагранжиана заключается в том [2], что, если какая-либо из составляющих главного вектора или главного момента всех действующих на тело активных объемных, а также активных и реактивных поверхностных сил может быть вычислена заранее (т. е. не зависит от перемещений), то эта составляющая должна равняться нулю. Если минимизирующий лагранжиан вектор перемещений $\mathbf{u}^*$ существует, то в этом случае обобщенное решение в смысле (1.6) также существует. Действительно, минимизирующий лагранжиан вектор $\mathbf{u}^*$ удовлетворяет [1] принципу возможных перемещений (1.7). Полагая $\sigma_*{}^{ij}=c^{ijkm}\varepsilon_{km}{}^*$, получим тождество (1.8), что после суммирования с (1.7) приводит к выполнению интегрального тождества (1.6).

Вариационную задачу для $\Phi_{u\sigma}$ на множестве G можно переформулировать в эквивалентную задачу минимизации $\Phi_{u\sigma}$ на линеале G°. Пусть пара $\mathbf{g}_0=(\mathbf{v},0)\in G$, предполагается, что множество U не пусто. Тогда $\forall\mathbf{g}=(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})\in G\exists\mathbf{g}^\circ=(\mathbf{u}^\circ,\boldsymbol{\sigma})\in G^\circ$, что дает $\mathbf{g}=\mathbf{g}_0+\mathbf{g}^\circ$. Функционал $\Phi_{u\sigma}$ можно задать теперь варьируемым на множестве G° ($\boldsymbol{\varepsilon}^\circ=\mathrm{Def}\,\mathbf{u}^\circ$, $\mathbf{e}=\mathrm{Def}\,\mathbf{v}$):

$$\Phi_{u\sigma}=\int\limits_\Omega\left(c^{ijkm}\varepsilon_{ij}{}^\circ\varepsilon_{km}{}^\circ+\frac{1}{2}d_{ijkm}\sigma^{ij}\sigma^{km}-\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}{}^\circ+\frac{1}{2}k^{ij}u_i{}^\circ u_j{}^\circ\right)d\Omega+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_p}\gamma^{ij}u_i{}^\circ u_j{}^\circ\,d\Gamma+\int\limits_\Omega(2c^{ijkm}e_{ij}\varepsilon_{km}{}^\circ-e_{ij}\sigma^{ij}+k^{ij}v_iu_j{}^\circ-F^{\vee i}u_i{}^\circ)d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_p}[\gamma^{ij}(v_i-u_i{}^\vee)u_j{}^\circ-p^{\vee i}u_i{}^\circ]d\Gamma+C_v \qquad (2.4)$$

где C_v — скаляр, зависящий от фиксированного вектора v.

На линеале G° введем билинейную форму b от двух пар $\mathbf{g}^1$ и $\mathbf{g}^2$:

$$b(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2) = \int_\Omega \left(c^{ijkm} \varepsilon_{ij}{}^1 \varepsilon_{km}{}^2 + \frac{1}{2} d_{ijkm} \sigma_1{}^{ij} \sigma_2{}^{km} - \frac{1}{2} \sigma_1{}^{ij} \varepsilon_{ij}{}^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \sigma_2{}^{ij} \varepsilon_{ij}{}^1 + \frac{1}{2} k^{ij} u_i{}^1 u_j{}^2 \right) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_p} \gamma^{ij} u_i{}^1 u_j{}^2 \, d\Gamma$$

Эта форма при условии $W(\mathbf{u}^\circ) > 0$ $\forall \mathbf{u}^\circ \in U^\circ$, $\mathbf{u}^\circ \neq 0$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения и, следовательно, порождает метрику в G°. Пополняя G° по этой метрике, получаем гильбертово пространство H_Φ, на котором и отыскивается минимум функционала (2.4).

Пусть $\mathbf{g}^h$ — приближенное (ритцево) решение для функционала $\Phi_{u\sigma}$ на конечно-мерном подпространстве $G^h \subset H_\Phi$. Тогда погрешность этого приближенного решения можно оценивать нормой разности $\|\mathbf{g}^* - \mathbf{g}^h\|_{H_\Phi}$, при этом в силу общих теорем метода Ритца [3] имеет место формула (теорема Пифагора)

$$\|\mathbf{g}^* - \mathbf{g}^h\|^2_{H_\Phi} = \|\mathbf{g}^*\|^2_{H_\Phi} - \|\mathbf{g}^h\|^2_{H_\Phi} \qquad (2.5)$$

3. Найдем теперь уравнения Эйлера и естественные краевые условия для функционала $\Phi_{u\sigma}$. Из условия $\delta\Phi_{u\sigma} = 0$, воспользовавшись формулой интегрирования по частям

$$\int_\Omega \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} \, d\Omega = -\int_\Omega \sigma_{,j}{}^{ij} u_i \, d\Omega + \int_\Gamma \sigma^{ij} n_j u_i \, d\Gamma$$

получим

$$\int_\Omega \{[-2(c^{ijkm}\varepsilon_{km})_{,j} + \sigma_{,j}{}^{ij} + k^{ij} u_j - F^{\vee i}] \delta u_i + [d_{ijkm}\sigma^{km} - \varepsilon_{ij}] \delta\sigma^{ij}\} d\Omega -$$
$$- \int_{\Gamma_p} [p^{\vee i} - 2c^{ijkm}\varepsilon_{km} n_j + \sigma^{ij} n_j - \gamma^{ij}(u_j - u_j{}^\vee)] \delta u_i \, d\Gamma = 0$$

Здесь учтено, что $\delta\mathbf{u} = 0$ на Γ_u. В силу произвольности вариаций $\delta\mathbf{u} \in U^\circ$ и $\delta\boldsymbol{\sigma} \in N$, отсюда найдем уравнения Эйлера и естественные краевые условия для функционала $\Phi_{u\sigma}$

$$\begin{gathered} -2(c^{ijkm}\varepsilon_{km})_{,j} + \sigma_{,j}{}^{ij} + k^{ij} u_j - F^{\vee i} = 0 \text{ на } \Omega \\ d_{ijkm}\sigma^{km} - \varepsilon_{ij} = 0 \text{ на } \Omega \\ p^{\vee i} - 2c^{ijkm}\varepsilon_{km} n_j + \sigma^{ij} n_j - \gamma^{ij}(u_j - u_j{}^\vee) = 0 \text{ на } \Gamma_p \end{gathered} \qquad (3.1)$$

эквивалентные исходным уравнениям задачи (1.1)—(1.4); при этом уравнение (1.5) выполняется в силу принадлежности $\mathbf{u} \in U$.

Так же как и смешанный функционал Рейсснера [4, 5], смешанный функционал $\Phi_{u\sigma}$ можно записать и в иной отличной от (2.1) форме

$$\Phi_{u\sigma} = \int_\Omega \left(c^{ijkm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{km} + \frac{1}{2} d_{ijkm} \sigma^{ij} \sigma^{km} + \sigma_{,j}{}^{ij} u_i + \frac{1}{2} k^{ij} u_i u_j - F^{\vee i} u_i \right) d\Omega -$$
$$- \int_{\Gamma_p} \left[(p^{\vee i} + \sigma^{ij} n_j) u_i - \gamma^{ij} \left(\frac{1}{2} u_i - u_i{}^\vee \right) u_j \right] d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \sigma^{ij} n_j u_i{}^\vee \, d\Gamma \qquad (3.2)$$

Несложно установить связь между тремя функционалами: лагранжианом L_u, рейсснерианом $R_{u\sigma}$ и смешанным функционалом $\Phi_{u\sigma}$.

В самом деле, для задачи (1.1)—(1.5) имеем

$$L_u=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}c^{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km}+\frac{1}{2}k^{ij}u_iu_j-F^{\vee i}u_i\right)d\Omega+$$
$$+\int_{\Gamma_p}\left[\gamma^{ij}\left(\frac{1}{2}u_i-u_i^{\vee}\right)u_j-p^{\vee i}u_i\right]d\Gamma \tag{3.3}$$

$$R_{u\sigma}=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}d_{ijkm}\sigma^{ij}\sigma^{km}+\sigma_{,j}{}^{ij}u_i-\frac{1}{2}k^{ij}u_iu_j+F^{\vee i}u_i\right)d\Omega-$$
$$-\int_{\Gamma_p}\left[\sigma^{ij}n_j+\gamma^{ij}\left(\frac{1}{2}u_j-u_j^{\vee}\right)-p^{\vee i}\right]u_i\,d\Gamma-\int_{\Gamma_u}\sigma^in_ju_i^{\vee}d\Gamma \tag{3.4}$$

откуда следует

$$\Phi_{u\sigma}=R_{u\sigma}+2L_u \tag{3.5}$$

Формула (3.5) оказывается полезной при установлении выражения для смешанного функционала $\Phi_{u\sigma}$ в частных случаях. Заметим, что используемая здесь запись для рейсснериана отличается знаком от записи, принятой в [4, 5].

1. Рассмотрим пружину с жесткостью c и податливостью $d=1/c$ под действием сжимающей силы P. Пусть u — укорочение пружины, S — развиваемое в пружине усилие. Тогда

$$L_u={}^1/_2cu^2-Pu,\quad R_{us}={}^1/_2S^2d-Su+Pu$$

откуда на основании формулы (3.5)

$$\Phi_{us}=cu^2+{}^1/_2S^2d-Su-Pu \tag{3.6}$$

Условия минимума Φ_{us} принимают вид

$$\partial\Phi_{us}/\partial S=Sd-u=0,\quad \partial\Phi_{us}/\partial u=-S+2cu=P \tag{3.7}$$

2. Рассмотрим изгиб балки, покоящейся на упругом винклеровом основании с коэффициентом постели k. Пусть l — длина балки, w — прогиб, φ — угол поворота сечения балки, M — изгибающий момент, Q — поперечная сила, EJ — изгибная жесткость, q — поперечная нагрузка. Ограничившись рассмотрением идеальных краевых условий (шарнир, ползун, заделка, консоль), выпишем выражения для лагранжиана и рейсснериана. Имеем

$$L_w=\int_0^l\left(\frac{EJw''^2}{2}+\frac{kw^2}{2}-qw\right)dx+[M^{\vee}w']_{\Gamma_M}-[Q^{\vee}w]_{\Gamma_Q}$$

$$R_{wM}=\int_0^l\left(\frac{M^2}{2EJ}-M'w'-\frac{kw^2}{2}+qw\right)dx+[M'(w-w^{\vee})]_{\Gamma_w}+$$
$$+[\varphi^{\vee}M]_{\Gamma_\varphi}+[(M-M^{\vee})w']_{\Gamma_M}+[Q^{\vee}w]_{\Gamma_Q}$$

откуда на основании формулы (3.5), а также с учетом того, что смешанный функционал Φ_{wM} определен на кинематически допустимом поле перемещений $U=\{w\,|\,w-w^{\vee}=0\in\Gamma_w,\ w'-\varphi^{\vee}=0\in\Gamma_\varphi\}$, получим

$$\Phi_{wM}=\int_0^l\left(EJw''^2+\frac{M^2}{2EJ}-M'w'+\frac{kw^2}{2}-qw\right)dx+[\varphi^{\vee}M]_{\Gamma_\varphi}+$$
$$+[(M+M^{\vee})w']_{\Gamma_M}-[Q^{\vee}w]_{\Gamma_Q} \tag{3.8}$$

Уравнения Эйлера для функционала (3.8) имеют вид

$$2(EJw'')''+M''+kw-q=0, \quad M/(EJ)+w''=0 \tag{3.9}$$

при естественных краевых условиях

$$2EJw''+M+M^{\vee}=0 \text{ на } \Gamma_M$$
$$2(EJw'')'+M'+Q^{\vee}=0 \text{ на } \Gamma_Q \tag{3.10}$$

Здесь Γ_w, Γ_φ, Γ_M, Γ_Q — точки с координатами $x=0$ или $x=l$, в которых поставлены краевые условия по прогибу, углу поворота, изгибающему моменту или поперечной силе соответственно. Выражениями вида $[f]_\Gamma$ обозначены значения функции f в точке $x=l$ и (или) $x=0$, если там поставлено соответствующее краевое условие, причем это выражение берется со знаком плюс для $x=l$ и со знаком минус для $x=0$. Например, для балки с заделкой в сечении $x=0$ и с шарнирным опиранием при $x=l$ имеем

$$[f]_{\Gamma_w}=f(l)-f(0), \quad [f]_{\Gamma_\varphi}=-f(0), \quad [f]_{\Gamma_M}=f(l), \quad [f]_{\Gamma_Q}=0$$

3. Рассмотрим прямолинейный стержень под действием продольных сил. Пусть l — длина стержня, u — продольное перемещение, S — продольная сила, EF — жесткость стержня, q — действующая вдоль оси стержня нагрузка. Считая, что каждый из концов стержня либо закреплен от продольных перемещений, либо имеет возможность свободно перемещаться вдоль оси стержня, выпишем выражения для лагранжиана и рейсснериана

$$L_u=\int_0^l\left(\frac{EFu'^2}{2}-qu\right)dx-[S^{\vee}u]_{\Gamma_S}$$

$$R_{us}=\int_0^l\left(\frac{S^2}{2EF}+uS'+qu\right)dx-[(S-S^{\vee})u]_{\Gamma_s}-[u^{\vee}S]_{\Gamma_u}$$

Отсюда на основании формулы (3.5)

$$\Phi_{us}=\int_0^l\left(EFu'^2+\frac{S^2}{2EF}+uS'-qu\right)dx-[(S+S^{\vee})u]_{\Gamma_s}-[u^{\vee}S]_{\Gamma_u} \tag{3.11}$$

Уравнения Эйлера для функционала (3.11) имеют вид

$$-2(EFu')'+S'-q=0, \quad S/(EF)-u'=0 \tag{3.12}$$

при естественных краевых условиях на Γ_s

$$2EFu'-S-S^{\vee}=0 \tag{3.13}$$

и главных краевых условиях $u-u^{\vee}=0$ на Γ_u.

4. Рассмотрим осесимметричный изгиб круглой пластинки, лежащей на винклеровом основании с коэффициентом постели k. Пусть R — радиус пластинки, w — прогиб, φ — угол поворота нормали к срединной поверхности пластинки, M_r, M_φ — радиальный и тангенциальный изгибающие моменты, Q — поперечная сила в радиальном сечении, D — цилиндрическая жесткость, ν — коэффициент Пуассона, q — поперечная нагрузка. Ограничиваясь рассмотрением идеальных краевых условий, выпишем выражения для лагранжиана и рейсснериана

$$L_w=2\pi\int_0^R\left[\frac{D}{2}\left(w''^2+\frac{2\nu}{r}w'w''+\frac{1}{r^2}w'^2\right)+\frac{kw^2}{2}-qw\right]r\,dr+$$
$$+2\pi R\{[M_r^{\vee}w']_{\Gamma_M}-[Q^{\vee}w]_{\Gamma_Q}\}$$

$$R_{wM}=2\pi\int_0^R\left[\frac{M_r^2-2\nu M_rM_\varphi+M_\varphi^2}{2D(1-\nu^2)}-\frac{(rM_r)'-M_\varphi}{r}w'-\frac{kw^2}{2}+qw\right]r\,dr+$$

$$+2\pi R\left\{\left[\frac{(rM_r)'-M_\varphi}{r}(w-w^\vee)\right]_{\Gamma_w}+[\varphi^\vee M_r]_{\Gamma_\varphi}+\right.$$

$$\left.+[(M_r-M_r^\vee)w']_{\Gamma_M}+[Q^\vee w]_{\Gamma_Q}\right\}$$

Учитывая, что

$$U=\{w\,|\,w-w^\vee=0\in\Gamma_w,\quad w'-\varphi^\vee=0\in\Gamma_\varphi\}$$

получаем

$$\Phi_{wM}=2\pi\int_0^l\left[D\left(w''^2+\frac{2\nu}{r}w'w''+\frac{1}{r^2}w'^2\right)+\frac{M_r^2-2\nu M_rM_\varphi+M_\varphi^2}{2D(1-\nu^2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{(rM_r)'-M_\varphi}{r}w'+\frac{kw^2}{2}-qw\right]r\,dr+2\pi R\{[\varphi^\vee M_r]_{\Gamma_\varphi}+$$

$$+[(M_r+M_r^\vee)w']_{\Gamma_M}-[Q^\vee w]_{\Gamma_Q}\}\tag{3.14}$$

Уравнения Эйлера для функционала (3.14) имеют вид

$$2\left[(Drw'')'+(D\nu w')'-D\left(\nu w''+\frac{1}{r}w'\right)\right]'+[(rM_r)'-M_\varphi]'+(kw-q)r=0$$

$$\frac{M_r-\nu M_\varphi}{D(1-\nu^2)}+w''=0,\qquad\frac{M_\varphi-\nu M_r}{D(1-\nu^2)}r+w'=0\tag{3.15}$$

при естественных краевых условиях

$$2D(w''+\nu w'/r)+M_r+M_r^\vee=0\ \text{ на }\Gamma_M$$

$$2[(Drw'')'+(D\nu w')'-D(\nu w''+w'/r)]+(rM_r)'-M_\varphi+Q^\vee r=0\ \text{ на }\Gamma_Q\tag{3.16}$$

5. Рассмотрим анизотропную пластинку, занимающую в плоскости (x_1, x_2) область Ω с кусочно-гладкой границей Γ. Пластинка покоится на упругом основании с коэффициентом постели k и загружена поперечной нагрузкой интенсивностью q. Пусть w — прогиб, M^{ij} — компоненты тензора моментов, n_i — компоненты единичного вектора внешней нормали к границе Γ, t_i — компоненты единичного вектора касательного к границе Γ. Пусть $w^\vee$, $\varphi^\vee$, $M^\vee$, $K^\vee$ — заданные соответственно на Γ_w, Γ_φ, Γ_M, Γ_k прогиб, угол поворота, изгибающий момент и обобщенная поперечная сила.

Тензор моментов и тензор кривизн связаны соотношениями $c^{ijkm}w_{,km}+$ $+M^{ij}=0$, $d_{ijkm}M^{km}+w_{,ij}=0$, причем для пластинки из изотропного материала

$$c^{ijkm}=D\left[\nu\delta^{ij}\delta^{km}+\frac{1-\nu}{2}(\delta^{ik}\delta^{jm}+\delta^{jk}\delta^{im})\right]$$

$$d_{ijkm}=\frac{1}{D(1-\nu^2)}\left[-\nu\delta_{ij}\delta_{km}+\frac{1+\nu}{2}(\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{jk}\delta_{im})\right]$$

Введем обозначения: $M^{nn}=M^{ij}n_in_j$, $M^{nt}=M^{ij}n_it_j$, $f_{,n}=f_{,i}n_i$, $f_{,t}=f_{,i}t_i$, и выпишем выражение для смешанного функционала

$$\Phi_{wM}=\int_\Omega\left(c^{ijkm}w_{,ij}w_{,km}+\frac{1}{2}d_{ijkm}M^{ij}M^{km}-M_{,j}^{ij}w_{,i}+\frac{kw^2}{2}-qw\right)d\Omega+$$

$$+\oint_\Gamma M^{nt}w_{,t}\,d\Gamma+\int_{\Gamma_\varphi}\varphi^\vee M^{nn}\,d\Gamma+\int_{\Gamma_M}(M^{nn}+M^\vee)w_{,n}\,d\Gamma-\int_{\Gamma_k}K^\vee w\,d\Gamma\tag{3.17}$$

Уравнения Эйлера для функционала (3.17) имеют вид

$$2(c^{ijkm}w_{,ij})_{,km}+M^{ij}_{,ij}+kw-q=0$$

$$d_{ijkm}M^{km}+w_{,ij}=0 \qquad (3.18)$$

при естественных краевых условиях

$$2c^{ijkm}w_{,ij}n_kn_m+M^{nn}+M^{\vee}=0 \text{ на } \Gamma_M$$

$$2(c^{ijkm}w_{,ij})_{,k}n_m+M^{ij}_{,j}n_i+2(c^{ijkm}w_{,ij})_{,l}n_kt_lt_m+M_{,t}^{nt}+K^{\vee}=0 \text{ на } \Gamma_k \qquad (3.19)$$

$$[2c^{ijkm}w_{,ij}n_kt_m+M^{nt}]_\alpha=0 \qquad (3.20)$$

и главных краевых условиях

$$w-w^{\vee}=0 \text{ на } \Gamma_w, \quad w'-\varphi^{\vee}=0 \text{ на } \Gamma_\varphi$$

В (3.20) под выражением вида $[f]_\alpha$ понимается скачок функции f на контуре пластинки в той точке α контура, где имеет место разрыв непрерывности компонент касательного вектора t при перемещении его вдоль кривой Γ.

4. Рассмотрим в качестве примера расчет балки на упругом основании при шарнирном опирании ее по концам. Следуя [6], введем две системы координатных функций φ_α и ψ_α полные в том смысле, что прогиб w и момент M соответственно можно сколь угодно точно аппроксимировать линейными агрегатами из этих функций. Положим (4.1)

$$w=\sum_{\alpha=1}^{n} Z_\alpha\varphi_\alpha, \quad M=\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha\psi_\alpha, \quad \varphi_\alpha(0)=\varphi_\alpha(l)=0, \quad \psi_\alpha(0)=\psi_\alpha(l)=0$$

Аппроксимации (4.1) переводят функционал (3.8) в квадратичную форму относительно искомых коэффициентов Z_α и X_α $(\alpha=1,\ldots,n)$.

В результате дифференцирования этой квадратичной формы по параметрам Z_α и X_α и приравнивания соответствующих производных к нулю, получим следующую систему Ритца:

$$\sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha\beta}X_\beta-\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}Z_\beta=0, \quad -\sum_{\beta=1}^{n} A_{\beta\alpha}X_\beta+\sum_{\beta=1}^{n}(2C_{\alpha\beta}+K_{\alpha\beta})Z_\beta=P_\alpha \quad (\alpha=1,\ldots,n)$$

$$D_{\alpha\beta}=\int_0^l \frac{\psi_\alpha\psi_\beta}{EJ}\,dx, \quad A_{\alpha\beta}=\int_0^l \psi_\alpha'\varphi_\beta'\,dx, \quad C_{\alpha\beta}=\int_0^l EJ\varphi_\alpha''\varphi_\beta''\,dx, \qquad (4.2)$$

$$K_{\alpha\beta}=\int_0^l k\varphi_\alpha\varphi_\beta\,dx, \quad P_\alpha=\int_0^l q\varphi_\alpha\,dx$$

Если исходить из условий стационарности рейсснериана, то система уравнений Ритца при аппроксимациях (4.1) будет иметь вид

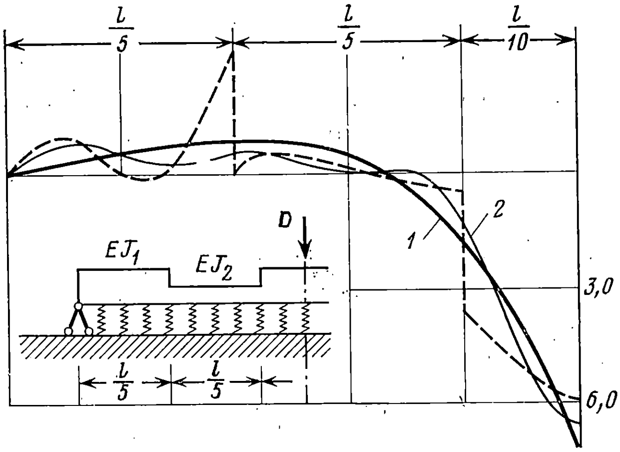
$$\sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha\beta}X_\beta-\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}Z_\beta=0, \quad -\sum_{\beta=1}^{n} A_{\beta\alpha}X_\beta-\sum_{\beta=1}^{n} K_{\alpha\beta}Z_\beta=-P_\alpha \quad (\alpha=1,\ldots,n) \qquad (4.3)$$

Условия стационарности лагранжиана приводят к системе Ритца

$$\sum_{\beta=1}^{n}(C_{\alpha\beta}+K_{\alpha\beta})Z_\beta=P_\alpha \quad (\alpha=1,\ldots,n) \qquad (4.4)$$

при этом изгибающие моменты в сечениях балки определяются соотношением $M=EJ\sum Z_\beta\varphi_\beta''(\beta=1,2,\ldots,n)$.

Сопоставляя между собой эти три решения, заметим, что при использовании лагранжиана изгибающие моменты определяются в результате дифференцирования прогибов, что приводит к понижению точности. В частности, при разрывной функции EJ (например, кусочно-непрерывной) изгибающие моменты также будут претерпевать разрывы. С другой стороны, матрица системы уравнений (4.3) не является знакоопределенной, тогда как матрица системы уравнений (4.2) положитель-



Фиг. 1, 2

но определена. Последнее обстоятельство существенно облегчает решение системы линейных алгебраических уравнений [7].

Приведем результаты расчета балки со ступенчатым изменением изгибной жесткости EJ под действием сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета (фиг. 1), при этом полагаем $\varphi_\alpha=\psi_\alpha=\sin[(2\alpha-1)\pi x/l]$.

Ниже приведены значения относительного изгибающего момента $M^\circ=100MEJ_0/(PlEJ_1)$ в сечении под силой в зависимости от числа членов, удерживаемых в разложении (4.1)

n	2	3	4	5	6
M_L°	4,25	6,14	6,04	5,43	5,85
M_R°	2,68	4,40	5,39	5,87	6,11
M_Φ°	1,43	2,64	4,49	5,97	6,58

При расчете принимались следующие значения параметров: $EJ_1/(EJ_0)=2/3$, $EJ_2/(EJ_0)=1/12$, $l[k/(EJ_0)]^{1/4}=6{,}25$.

Точное значение M° в середине пролета равняется 7,37.

Эпюры моментов M° при $n=6$ показаны на фиг. 2. Кривая 1 соответствует точному решению задачи, кривая 2 – величине M_Φ°, пунктирная линия – M_L°, при этом M_T° – относительный изгибающий момент, вычисленный из условия стационарности функционала T ($T=L$, R, Φ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 531—541.
2. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
3. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
4. *Рейсснер Е.* О некоторых вариационных теоремах теории упругости.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 328–337.
5. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 223 с.
6. *Фридман В. М., Чернина В. С.* Видоизменение метода Бубнова — Галеркина — Ритца, связанное со смешанным вариационным принципом в теории упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1, с. 64—78.
7. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры: М.– Л.: Физматгиз, 1963. 734 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 3.III.1981