

УДК 539.3

## **КОМБИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ КОНСТРУКЦИИ**

**КАЛИНИН И. Н., НИКИШИН С. С.**

Напомним, что подходы к оптимальному проектированию конструкций можно условно классифицировать так: использование методов математического программирования; применение априорных физических предположений о свойствах оптимальных конструкций (равнопрочность, равноустойчивость и т. д.) для построения итерационного процесса поиска (см. обзор [1]); использование алгоритмов, основанных на необходимых условиях оптимальности [2].

Между тем задачи строительной механики и теории упругости характеризуются большим объемом вычислений на один расчет конструкции (для проверки ограниченной задачи) и значительным числом проектируемых параметров.

Методы математического программирования обладают общностью, позволяющей применять их для решения задач различной физической природы. Это дает возможность использовать стандартное математическое обеспечение, имеющееся в вычислительных центрах, в отраслевых и государственном фондах алгоритмов и программ, программы, опубликованные в статьях и монографиях. Подобный подход, безусловно, приводит к экономии времени на подготовку задачи к решению.

Но можно отметить следующие его недостатки: по результатам одного расчета конструкции изменяется (на большей части траектории поиска), как правило, один или несколько варьируемых параметров; вычислительные затраты сильно растут с увеличением размерности задачи; алгоритм оптимизации и методика расчета характеристик проектируемой системы, по которой проверяются ограничения или оценивается ее эффективность, рассматриваются независимо.

Можно утверждать, что методы математического программирования в реальных прикладных задачах требуют огромного объема вычислений, который не всегда удается реализовать даже на современных ЭЦВМ.

В целях сокращения объема вычислений используются критерии оптимальности, основанные на тех или иных априорных предположениях. Применяемые при решении вычислительные алгоритмы в этом случае обладают хорошими характеристиками сходимости. Одна из основных причин сокращения объема вычислений заключается в том, что по результатам одного расчета конструкции изменяются все искомыми параметры. Однако этот подход не обладает достаточной общностью относительно выбора параметров проектирования и ограничений задачи и может приводить к неудовлетворительным результатам.

В публикуемой работе рассматривается один подход к оптимальному проектированию конструкций в вариационной и конечно-мерной постановках. Приводятся результаты сравнительных экспериментов. Делаются выводы и даются рекомендации по его практическому применению. Рассматриваются статические задачи в упругой постановке.

**1. Конечно-мерные задачи.** Введем следующие определения. Локальной переменной задачи оптимального проектирования будем называть переменную, относящуюся только к одной подконструкции (части конструкции).

Нелокальной переменной задачи будем называть переменную, относящуюся более чем к одной подконструкции (но не ко всей конструкции), глобальной — относящуюся ко всей конструкции в целом.

Предлагается определять функции, через которые можно выразить ограничения задачи такие, чтобы они были инвариантны относительно искомым переменным или слабо зависели от них. В этом случае при определенных условиях найденные функции можно использовать для провер-

ки ограничений, а не производить расчет конструкции в каждой текущей точке поиска. Рассмотрим два класса задач.

Пусть в задаче оптимального проектирования имеются только глобальные переменные. Необходимо определить  $Y^* = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  из условия

$$F(Y^*) = \min_{Y \in X^n} F(Y) \quad (1.1)$$

при ограничениях

$$g_i(Y, T(Y, x, y, z)) \leq 0 \quad (i=1, k), \quad H_j(Y, T(Y, x, y, z)) = 0 \quad (j=1, m, m < n) \quad (1.2)$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты ( $x, y, z \in D, D$  — область, занятая телом),  $T = T(Y, x, y, z)$  — функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние исследуемой конструкции и определяемые с учетом условий равновесия, неразрывности деформации, граничных условий и физических соотношений

$$\sigma(Y, T, x, y, z) = 0, \quad \varepsilon(Y, T, x, y, z) = 0, \quad h(Y, T, x, y, z) = 0 \quad (1.3)$$

Вводится в рассмотрение функция  $\varphi = \psi(Y, T(Y, x, y, z))$ , где  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ . Если удастся подобрать функцию  $\psi$ , такую, что  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  и существует однозначно определяемое обратное преобразование  $T = f(Y, \varphi(x, y, z))$ , то в процессе оптимизации требуется только один раз рассчитывать конструкцию.

В том случае, когда  $\varphi(Y, x, y, z) \neq \varphi(x, y, z)$ , можно предложить итерационный путь решения задачи оптимизации.

В итерации с номером  $k$  имеется следующая информация:  $Y^{k-1}, \varphi^{k-1}$ . Определяется  $\varphi_*(Y, x, y, z)$  при  $Y = Y^{k-1}$ . Согласно итерационной формуле,  $\varphi^k = \Phi(\varphi^{k-1}, \varphi_*)$ , где  $\Phi$  — функция, определяющая вид итерационной процедуры, находится  $\varphi^k(Y^{k-1}, x, y, z)$  и решается задача оптимизации с проверкой только ограничений (1.2) при  $\varphi(Y, x, y, z) = \varphi^k(Y^{k-1}, x, y, z)$ .

Проверка окончания счета может быть произведена по обычному для итерационных методов критерию  $\|Y^{k+1} - Y^k\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — наперед заданная константа.

Число расчетов конструкции при этом равно числу итераций  $k$ . Если вычислительные затраты на расчет конструкции превосходят затраты на оптимизацию с предлагаемой схемой проверки ограничений по функциям  $\varphi^k$ , то общие затраты на решение могут быть сокращены.

Так, например, в статически определимых конструкциях в качестве компонент функции  $\varphi$  (при выборе в качестве варьируемых параметров площадей поперечных сечений) могут быть взяты внутренние усилия. В этом случае независимо от числа варьируемых параметров конструкцию необходимо рассчитать лишь один раз для получения усилий. Проверка ограничений по известным усилиям представляет собой элементарную задачу, и поэтому сокращение объема вычислений по сравнению с прямым применением методов математического программирования может быть значительным.

Рассмотрим класс задач, для которого применение данной методики имеет специфические особенности.

Для упрощения рассуждений предположим, что в ограничениях (1.2) отсутствуют ограничения равенства.

Пусть конструкция состоит из  $m$  подконструкций, все переменные проектирования локальные, а целевая функция и функции ограничений могут быть представлены в виде

$$F(Y) = \sum_{i=1}^m F_i(Y_i), \quad g_{ij}(Y_i) \leq 0 \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k_i}, \quad \sum_{i=1}^m k_i = k, \quad m \leq n) \quad (1.4)$$

Данный класс задач достаточно широк и, что наиболее важно, часто встречается в прикладных задачах. В этом случае  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ .

Для рассмотренной задачи алгоритм естественным образом приводит к декомпозиции [3].

Строго задача может быть сформулирована так: определить  $\varphi(x, y, z)|_{\Gamma} = \mathbf{f}$ , где  $\Gamma = \Sigma \Gamma_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, m}, i \neq j$ ) — граница между взаимодействующими элементами, из условия  $F(\mathbf{Y}^*(\mathbf{f})) = \min$  при выполнении ограничений (1.3).

Для определения  $\mathbf{Y}^*$  необходимо решить  $m$  задач следующего вида. Определить  $\mathbf{Y}_i^* = (Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_{l_i}^*)$  ( $i = \overline{1, m}, \Sigma l_i = n$ ) из условия  $F_i(\mathbf{Y}_i^*) = \min F_i(\mathbf{Y}_i)$ , ( $\mathbf{Y}_i \in E^{l_i}$ ) при ограничениях  $g_{ij}(\mathbf{Y}_i) \leq 0$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k_i}, \Sigma k_i = k, k \geq n$ ).

При решении каждой из задач второго уровня получается уже рассмотренная ранее задача с глобальными переменными.

При  $\varphi_i|_{\Gamma_{ij}} = \text{const}$  можно оценить трудоемкости решения первоначально сформулированной задачи и декомпозиционной.

При  $pM \gg n$ , где  $M$  — число стыков подконструкций, затраты на поиск при использовании декомпозиции будут, видимо, превосходить затраты при прямом решении задачи. Имеет практический смысл использование декомпозиционного подхода при  $pM \ll n$ .

Для еще более значительного сокращения вычислительных затрат предлагается упрощенная модель координирующей задачи, которая, впрочем, не всегда может приводить к искомому решению. При этом необходимо определить класс задач, для которого данная процедура эффективна по точности получаемого решения и вычислительным затратам.

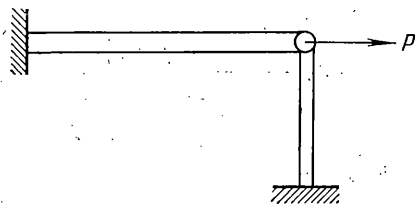
Вместо решения задачи оптимизации по функциям  $\varphi_i$ , предлагается итерационный процесс  $\varphi_i^k = \varphi_i^{k-1} + \mu(\varphi_i - \varphi_i^{k-1})$  ( $i = \overline{1, p}, 0 < \mu \leq 1$ ), где  $k = \overline{1, 2, 3, \dots}$  — номер итерации,  $\mu$  — итерационный параметр,  $\varphi_i$  — функции, полученные из решения системы уравнений (1.3) при  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{k-1}^*$ . Процесс продолжается до стабилизации по  $\varphi_i$  ( $i = \overline{1, p}$ ).

Для проверки предлагаемого подхода проводились сравнительные эксперименты на четырех различных задачах. Использовался прямой подход к решению задачи (решение получалось при помощи одной из модификаций комбинированного алгоритма прямого поиска [4]) и предлагаемая в данной статье методика. Оценка производилась по точности получаемого решения и числу перерасчетов конструкции.

Конструкции с относительно небольшими затратами на расчет были выбраны сознательно для проведения экспериментов в большом объеме при различном выборе начальных точек поиска.

Были рассмотрены следующие задачи: стержневая система, изображенная на фиг. 1; цилиндрическая оболочка, подкреплённая основными и вспомогательными ребрами жесткости при ограничениях по прочности и перемещениям; цилиндрическая оболочка, подкреплённая кольцевыми ребрами при ограничениях по прочности, устойчивости (общей и местной) и перемещениям; цилиндрическая оболочка с заглушками на торцах под действием внутреннего давления при ограничениях по прочности.

Для первой из перечисленных задач произведено аналитическое исследование итерационного процесса при  $\mu = 1$ . Считалось, что стержни выполнены из одного материала и длины стержней соответственно  $l_1, l_2$ . Задача ставится следующим образом. Определить площади поперечных сечений  $h_1, h_2$  из условия минимума объема материала  $F(h_1, h_2) = l_1 h_1 + l_2 h_2$



Фиг. 1

при ограничениях

$$\sigma_1(h_1, h_2) \leq [\sigma], \quad \sigma_2(h_1, h_2) \leq [\sigma], \quad h_1 \geq 0, \quad h_2 \geq 0, \quad h_1 + h_2 \neq 0 \quad (1.5)$$

где  $\sigma_i$  — напряжения в стержнях,  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение.

В явном виде ограничения по напряжениям могут быть представлены в виде

$$h_1 - \frac{p}{[\sigma]} + \frac{l_1}{4l_2^3} h_2^3 \geq 0, \quad h_1 - \frac{p}{[\sigma]} \frac{3l_1}{2l_2^2} h_2 + \frac{l_1}{4l_2^3} h_2^3 \geq 0 \quad (1.6)$$

При использовании предлагаемой методики поиска итерационный процесс описывается формулами

$$h_1^k = \frac{p/[\sigma]}{1 + \alpha_2 (h_2^{k-1})^3 / h_1^{k-1}}, \quad h_2^k = \left[ \frac{6l_2 p / [\sigma]}{1 + \alpha_2^{-1} [h_1^{k-1} / (h_2^{k-1})^3]} \right]^{1/2} \\ h_1^0, h_2^0 > 0, \quad \alpha_2 = l_1 / 4l_2^3 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (1.7)$$

Исследуем последовательности (1.7). Найдем стационарные точки. Для этого положим в (1.7)  $h_1^k = h_1^{k-1}$ ,  $h_2^k = h_2^{k-1}$  и решим систему нелинейных уравнений. В области определения задачи получим три пары значений:  $h_1=0$ ,  $h_2=[6l_2 p / [\sigma]]^{1/2}$ ;  $h_1=p/[\sigma]$ ,  $h_2=0$ ;  $h_1=(p/[\sigma]) - 2l_2^3 / (27l_1^2)$ ,  $h_2=2l_2^2 / (3l_1)$ . Третья пара значений соответствует равнопрочной конструкции. В этом можно убедиться подставив соответствующие значения  $h_1$ ,  $h_2$  в ограничения (1.6). Из (1.7) при помощи элементарных операций можно получить зависимость  $h_1^k = f(h_2^k)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) или уравнение кривой, которой принадлежат все приближения начиная с  $k=1$

$$h_1 = \alpha_1 (1 - h_2^2 / \alpha_3) \quad (\alpha_1 = p/[\sigma], \quad \alpha_3 = 6l_2 p / [\sigma]) \quad (1.8)$$

Для определения типа стационарных точек обратим внимание на то, что  $h_1^k$ ,  $h_2^k$  зависят от одного параметра  $\beta^{k-1} = h_1^{k-1} / (h_2^{k-1})^3$ . Равнопрочному проекту соответствует  $\beta = \beta_* = (\alpha_2 \alpha_3)^3 / \alpha_1^2 - \alpha_2$ . Из определения  $\beta^k$  и формул (1.7) получим

$$\beta^k = \alpha_1 \beta^{k-1} (\beta^{k-1} + \alpha_2)^{1/2} / (\alpha_2 \alpha_3)^{3/2} \quad (1.9)$$

Исследуем знак выражения  $\beta^{k+1} - (\beta_* + \Delta\beta) = (\alpha_2^3 \alpha_3^3 / \alpha_1^2 - \alpha_2 + \Delta\beta) \times [(\alpha_2^3 \alpha_3^3 + \alpha_1^2 \Delta\beta)^{1/2} - (\alpha_2 \alpha_3)^{3/2}] / (\alpha_2 \alpha_3)^{3/2}$ .

В предположении малости  $\Delta\beta$ , так как  $\alpha_2^3 \alpha_3^3 / \alpha_1^2 - \alpha_2 > 0$ , знак определяется выражением  $(\alpha_2^3 \alpha_3^3 + \alpha_1^2 \Delta\beta)^{1/2} - (\alpha_2 \alpha_3)^{3/2}$ . Отсюда следует, что  $\beta^{k+1} > \beta_* + \Delta\beta$  при  $\Delta\beta > 0$ , а  $\beta^{k+1} < \beta_* - |\Delta\beta|$  при  $\Delta\beta < 0$ . Таким образом,  $\beta_*$  является отталкивающей.

Рассмотрим разность между значениями  $\beta$  в итерациях с номерами  $i$  и  $i+1$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ):

$$\delta\beta = \beta^{i+1} - \beta^i = \beta^i \left( [\alpha_1 (\beta^i + \alpha_2)^{1/2} / (\alpha_2 \alpha_3)^{3/2}] - 1 \right) \quad (1.10)$$

Выражение в скобках больше нуля, если  $\beta^i > \beta_*$ , равно нулю при  $\beta^i = \beta_*$  и меньше нуля, если  $\beta^i < \beta_*$ .

Из (1.10) с учетом отмеченного выше следует монотонность итерационной последовательности по параметру  $\beta$ .

Докажем сходимость процесса к одной из двух стационарных точек ( $\beta=0$ ,  $\beta=\infty$ ) в зависимости от первого члена последовательности. Пусть  $\beta^i < \beta_*$  и  $0 < \alpha < \beta_* - \text{предел последовательности}$ . Обозначим  $\alpha \{ [\alpha_1 (\alpha + \alpha_2)^{1/2} / (\alpha_2 \alpha_3)^{3/2}] - 1 \} = a$  ( $a \neq 0$ ). Очевидно, что

$$|\delta\beta| = |\beta^i \{ [\alpha_1 (\beta^i + \alpha_2)^{1/2} / (\alpha_2 \alpha_3)^{3/2}] - 1 \}| > |\alpha \{ [\alpha_1 (\alpha + \alpha_2)^{1/2} / (\alpha_2 \alpha_3)^{3/2}] - 1 \}| = |a|$$

Ввиду монотонности последовательности  $|\delta\beta| = |\alpha - \beta^i| > |\delta\beta'| = |\beta^{i+1} - \beta^i|$ . Следовательно, справедливо следующее неравенство:  $|\delta\beta| > |\delta\beta'| > a$ , но в силу того, что  $|\delta\beta| = |\alpha - \beta^i|$ , и учитывая предположение о том, что  $\alpha > 0 -$

предел последовательности, за счет выбора номера  $i$  значение  $|\delta\beta|$  может быть сделано меньше любого положительного, наперед заданного числа. Полученное противоречие доказывает сходимость последовательности к точке  $\beta=0$  при  $\beta^1 < \beta_*$ .

Можно получить оценку скорости сходимости к точке  $\beta=0$ . Используя разложение в ряд Тейлора и соотношение (1.9), получим

$$|\beta^k| \leq \left[ \frac{\alpha_1}{(\alpha_2 \alpha_3)^{1/2}} \left( \max_{\xi \in [0, \beta_*]} \left| \frac{{}^3/2 \xi + \alpha_2}{(\xi + \alpha_2)^{1/2}} \right| \right) \right]^k |\beta^0|$$

Максимального значения выражение  $({}^3/2 \xi + \alpha_2)/(\xi + \alpha_2)^{1/2}$  достигает при  $\xi = \beta_*$ , и тогда оценка имеет вид

$$|\beta^k| \leq [{}^3/2 - \alpha_1^2 / (2\alpha_2^2 \alpha_3^3)]^k |\beta^0|$$

Нетрудно показать, что для любых  $0 < \beta < \beta_*$  выполняется неравенство  $[{}^3/2 - \alpha_1^2 / (2\alpha_2^2 \alpha_3^3)] < 1$ .

Также методом от противного доказывается сходимость к точке  $\beta = \infty$  при  $\beta^1 > \beta_*$ .

Рассмотрим вопрос о зависимости получаемых результатов от выбора начальных точек поиска. Ввиду того что координаты точки в итерации с номером  $k+1$  зависят фактически от одной переменной  $h_1/h_2^3$ , из всех начальных точек, лежащих на кривой  $h_1 = ch_2^3$  ( $0 < c < \infty$ ), в результате одной итерации процесс приведет в одну и только одну точку, расположенную на кривой, описываемой уравнением (1.8).

Учитывая приведенные выше свойства стационарных точек и сделанное замечание, можно утверждать, что все множество допустимых начальных точек разделяется кривой  $h_1 = \beta_* h_2^3$  на два множества, обладающих следующими свойствами. Из любой начальной точки  $h_1^0/h_2^0$  ( $h_1^0 > 0$ ), удовлетворяющей условию  $h_1^0/(h_2^0)^3 > \beta_*$ , итерационный процесс сходится к точке  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = [6l_2 p / [\sigma]]^{1/2}$ ; из любой начальной точки  $h_1^0/h_2^0 < \beta_*$  итерационный процесс сходится к точке  $h_1 = p/[\sigma]$ ,  $h_2 = 0$ . И, наконец, множество начальных точек, лежащих на кривой  $h_1 = \beta_* h_2^3$ , за одну итерацию обеспечивает определение параметров равнопрочного проекта.

Отметим характерную особенность рассмотренного подхода: процесс приводит либо к равнопрочному проекту, либо к одному из еще двух (частично вырожденных и также в определенном смысле равнопрочных), в зависимости от выбора начальной точки, и это совершенно не зависит от поведения линий уровня целевой функции и места нахождения действительно оптимального решения.

Рассматривалась бесконечная цилиндрическая оболочка, нагруженная равномерным внешним давлением  $p$ , и подкрепленная основными и промежуточными кольцевыми ребрами жесткости, равномерно распределенными по образующей.

Задача рассматривалась в двух постановках. В первой постановке надо было определить площади поперечных сечений ребер жесткости  $F_1$ ,  $F_2$  и толщину обшивки  $h$  из условия минимума объема материала

$$V(F_1, F_2, h) = F_1 + F_2 + hl \quad (1.11)$$

при ограничениях

$$\sigma(F_1, F_2, h) \leq [\sigma], \quad \sigma_1(F_1, F_2, h) \leq [\sigma], \quad \sigma_2(F_1, F_2, h) \leq [\sigma] \quad (1.12)$$

$$F_1 \geq F_2, \quad 0 < a \leq h \leq b, \quad F_1 \geq a_1 > 0, \quad F_2 \geq a_2 > 0$$

где  $R$  — радиус оболочки,  $l$  — расстояние между основными ребрами,  $\sigma$  — эквивалентное напряжение в обшивке,  $\sigma_i$  — напряжение в подкрепляющих элементах,  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение.

Эквивалентное напряжение определялось согласно энергетической теории прочности. Для определения напряжений в оболочке и ребрах применялось решение П. Ф. Папковича [5].

Во втором случае к ограничениям (1.12) добавлялись ограничения по местной и общей потери устойчивости  $p \leq p_1$ ,  $p \leq p_2$  и предполагалось, что  $F_1 = F_2 = F$  и, кроме того, форма поперечного сечения ребра имеет вид квадрата.

Критические значения давления местной  $p_1$  и общей потери устойчивости  $p_2$  определялись по формулам [6]:

$$p_1 = 14,4 \frac{Eh_3}{Rl^2}, \quad p_2 = 1,84 \frac{Eh^{5/2}}{LR^{3/2}} [1 + \beta \varphi (\psi - 1)^{5/2}]$$

$$\beta = \frac{0,41}{\varphi^{3/2}} + \frac{1,85}{\varphi^{3/2}} - 0,56, \quad \varphi = 4\pi F^{1/2} l, \quad \psi = \frac{h + F^{1/2}}{h}$$

Задача оптимального проектирования цилиндрической оболочки с заглушками на торцах ставилась следующим образом: найти толщины оболочки  $h_1$  и пластины  $h_2$  из условия минимума веса конструкции [7]

$$F(h_1, h_2) = \pi R^2 \rho_2 h_2 + \pi R L \rho_1 h_1 - \min \quad (1.13)$$

при ограничениях

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_1, \quad \sigma_2 \leq [\sigma]_2, \quad h_1 > 0, \quad h_2 > 0 \quad (1.14)$$

Здесь  $R$  и  $L$  — радиус и длина оболочки,  $\rho_i$  ( $i=1, 2$ ) — удельные веса материалов оболочки и пластины,  $\sigma_i$  и  $[\sigma]_i$  — эквивалентные и допускаемые напряжения в оболочке и пластине.

Методика расчета на прочность данной конструкции изложена в [7].

При проведении численного эксперимента задавалась область начальных точек  $R$ , где случайным образом, с использованием равномерного распределения, выбирались  $K$  начальных точек поиска. Из этих  $K$  точек задача оптимизации решалась в первоначальной постановке комбинированным алгоритмом прямого поиска [4] и с использованием предлагаемого подхода.

Исследования проводились при следующих данных.

Стержневая система:  $K=10$ ,  $l_1=1$  м,  $l_2=0,5$  м,  $p=98,1$  кн,  $[\sigma]=196,2$  МПа,  $h_i \geq 0,002$  м.

Цилиндрическая оболочка, подкрепленная основными и вспомогательными кольцевыми ребрами:  $K=10$ ,  $L=1,4$  м,  $l=0,2$  м,  $R=0,36$  м,  $p=4,42$  МПа,  $E=1,96 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu=0,3$ ,  $[\sigma]=196,2$  МПа.

Цилиндрическая оболочка с заглушками:  $K=10$ ,  $L=6$  м,  $R=0,3$  м,  $p=0,686$  МПа,  $\Delta p=0$ ,  $[\sigma]=196,2$  МПа,  $\nu=0,3$ ,  $\rho=69,6$  кн/м<sup>3</sup>,  $E=1,96 \cdot 10^5$  МПа.

Сравнительные численные результаты для этих четырех задач приводятся в табл. 1, 2, где  $K_1$  — коэффициент относительной эффективности,  $N_1$  — число вычислений  $f(x)$  (в первых столбцах представлены результаты расчета по методу математического программирования, а во вторых — на основании комбинированного подхода).

Все теоретические выводы, сделанные для стержневой системы, подтверждаются экспериментально. Так, например, при счете из девятой начальной точки получилось решение, не совпадающее с истинным минимумом. В этом случае начальная точка находилась под кривой  $h_1 = \beta \cdot h_2^3$  и процесс привел к другой стационарной точке.

Результаты, приведенные в таблицах для первых трех задач, показывают высокую сравнительную эффективность предлагаемой методики по вычислительным затратам.

При анализе процедуры возникает предположение, что итерационный процесс должен приводить (при выполнении достаточно «правдоподобных» предположений о свойствах целевой функции и функций ограничений) к проектам, у которых в точке оптимума в каждой из невырожденных подконструкций (при решении задач с локальными переменными) хотя бы одно ограничение выполняется как строгое равенство. Но известно, что проекты, обладающие данным свойством, далеко не всегда являются оптимальными [7].

Для проверки предположения о свойствах решения, получаемого по методике, предлагаемой в работе, рассматривалась задача, у которой дискретно равнопрочный проект не совпадает с проектом минимального веса (четвертая задача). Результаты показывают, что действительно получается дискретно равнопрочный проект (табл. 1, 2).

Таким образом, область применимости методики для задач с локальными переменными определяется классом конструкций, для которых дискретно равнопрочный проект совпадает с проектом минимального веса.

Таблица I

$x \cdot 10^4, \text{ м}^2$	$x^* \cdot 10^4, \text{ м}^2$	$f(x^*) \cdot 10^3, \text{ м}^2$	$N_1$	$K_1, \%$
Стержневая система				
5,061	5,010	5,010	196	4
6,328	0,200	0,200	511,030	511,030
5,369	5,018	5,019	215	6
9,301	0,200	0,200	511,784	511,869
6,664	5,014	5,014	179	13
18,85	0,200	0,200	511,401	511,372
11,66	5,006	5,006	209	6
9,412	0,200	0,200	510,629	510,627
9,966	5,015	5,015	203	5
6,789	0,200	0,200	511,529	511,528
14,88	5,003	5,003	213	6
16,03	0,200	0,200	510,329	510,327
19,58	5,003	5,003	215	6
15,06	0,200	0,200	510,317	510,316
23,55	5,004	5,004	220	3
6,109	0,200	0,200	510,406	510,406
5,124	5,024	0,200	512,353	1939,875
21,11	0,200	38,40	221	12
18,74	5,014	5,014	216	7
11,68	0,200	0,200	511,417	511,415

Цилиндрическая оболочка с ребрами жесткости: ограничения по напряжениям и перемещениям

4,012	0,7057	0,7057	14,549	14,549	100	3	3,00
0,0285	0,0023	0,0023					
0,0430	0,0021	0,0021					
3,056	0,7060	0,7060	14,542	14,542	101	3	2,97
0,0165	0,0021	0,0021					
0,0396	0,0021	0,0021					
2,228	0,7092	0,7092	14,614	14,614	93	3	3,23
0,0423	0,0023	0,0023					
0,038	0,0020	0,0020					
1,859	0,7090	0,7090	14,600	14,600	94	3	3,19
0,0252	0,0021	0,0021					
0,0312	0,0021	0,0021					
3,100	0,7062	0,7062	14,549	14,549	101	3	2,97
0,0161	0,0020	0,0020					
0,0457	0,0022	0,0022					
1,8750	0,7062	0,7062	14,565	14,565	98	3	3,06
0,0369	0,0022	0,0022					
0,0332	0,0022	0,0022					
3,342	0,7045	0,7045	14,497	14,497	98	3	3,06
0,0458	0,0020	0,0020					
0,0280	0,0021	0,0021					
3,176	0,7072	0,7072	14,559	14,559	92	3	3,26
0,0227	0,0021	0,0021					
0,0296	0,0021	0,0021					
4,976	0,7072	0,7072	14,585	14,585	101	3	2,97
0,0445	0,0023	0,0023					
0,0453	0,0021	0,0021					
3,738	0,7067	0,7067	14,576	14,576	97	3	3,09
0,0222	0,0022	0,0022					
0,0456	0,0022	0,0022					

Таблица 2

$x^0 \cdot 10^4, \text{ м}^3$	$x^* \cdot 10^4, \text{ м}^2$	$f(x^*) \cdot 10^3, \text{ м}^3$	$N_1$	$K_1, \%$
Цилиндрическая оболочка с ребрами жесткости: ограничения по напряжениям, перемещениям и устойчивости				
1,859	0,7687	0,7687		
0,0252	0,0136	0,0136	18,094	18,094
3,100	0,7312	0,7250		
0,0161	0,0145	0,0148	17,527	17,466
1,875	0,8500	0,7250		
0,0369	0,0119	0,0147	19,358	17,436
3,342	0,7420	0,7420		
0,0458	0,0142	0,0142	17,677	17,677
3,176	0,7250	0,7283		
0,0227	0,0146	0,0146	17,419	17,483
4,976	0,8000	0,8000		
0,0445	0,0129	0,0129	18,569	18,569
3,738	0,7250	0,7610		
0,0222	0,0147	0,0138	17,448	17,975
4,012	0,7245	0,7245		
0,0285	0,0148	0,0148	17,444	17,444
3,056	0,7247	0,7247		
0,0165	0,0146	0,0146	17,420	17,420
2,228	0,7250	0,7250		
0,0423	0,0148	0,0148	17,456	17,456

## Цилиндрическая оболочка с заглушками на торцах

1,028	0,1405	1,384		
2,531	1,981	1,406	96,178	583,986
1,172	0,1407	1,378		
3,720	1,955	1,420	96,559	581,858
1,777	0,1395	1,383		
7,542	1,992	1,417	95,995	583,805
4,107	0,1425	1,382		
3,765	1,990	1,415	97,161	583,264
3,317	0,1420	1,379		
2,716	1,991	1,416	96,974	582,285
5,610	0,1412	1,379		
6,411	1,986	1,411	96,569	581,875
7,804	1,1415	1,385		
6,024	1,999	1,399	96,927	584,241
4,992	0,1420	1,379		
2,445	1,995	1,420	97,051	582,362
1,058	0,1392	1,383		
7,644	1,994	1,419	95,937	583,746
7,412	0,1425	1,381		
4,670	1,995	1,420	97,262	582,860



2. Решение задач в вариационной постановке. Определим вектор-функцию  $Y(x, y, z) = (Y_1(x, y, z), Y_2(x, y, z), \dots, Y_n(x, y, z))$  из условия

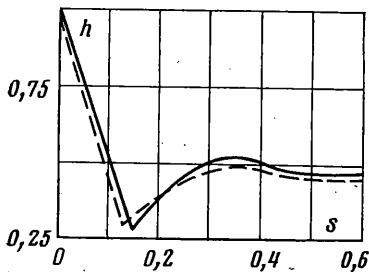
$$\iiint_{\Omega} \Phi(Y(x, y, z), T) d\Omega - \min$$

при выполнении ограничений

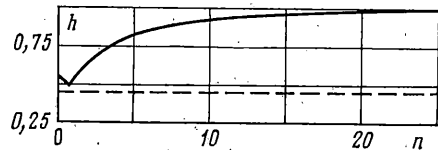
$$\begin{aligned} \sigma(Y(x, y, z), T, x, y, z) &= 0, \quad \varepsilon(Y(x, y, z), T, x, y, z) = 0, \\ h(Y(x, y, z), T, x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\sigma, \varepsilon, h, T = T(x, y, z)$  имеют прежний смысл.

В этом случае возможен тот же подход, что и в конечно-мерных задачах оптимального проектирования. В качестве примера рассмотрим задачу



Фиг. 2



Фиг. 3

нахождения распределения толщины вдоль образующей осесимметричной оболочки из условия равнопрочности.

Математически задача формулируется следующим образом. Необходимо определить  $h(s)$  из условия

$$\int_0^l [\sigma(h(s), T, s) - [\sigma]]^2 ds - \min$$

при выполнении ограничений (2.1).

В приведенных выражениях  $s$  — координата вдоль образующей, отсчитываемая от некоторой начальной точки  $s_0$ ,  $l$  — длина образующей,  $\sigma$  и  $[\sigma]$  — соответственно эквивалентное и допускаемое напряжения. В качестве функций  $\Phi_i$  примем внутренние усилия и моменты.

Рассмотрим решение нескольких задач. Проводилось сравнение с результатом, полученным в [8]. Исследовалась изотропная цилиндрическая оболочка под действием всестороннего давления и заделанная с двух сторон при  $\omega = 0,04$ ,  $q = 0,554$  (в обозначениях [8]). График изменения толщины оболочки  $h(s)$  приведен на фиг. 2, где штрихами обозначено решение из [8].

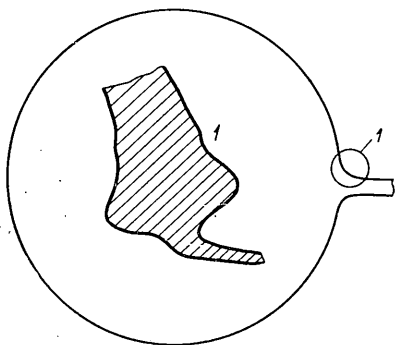
Зависимость толщины в сечении у заделки (сплошная линия) и в сечении у оси симметрии (штриховая линия) от числа итераций представлена на фиг. 3. Характерно, что в тех точках, где отсутствуют моментные напряжения, уже после первой итерации получается приемлемое решение. Толщина отличается меньше чем на 2% от толщины, полученной после 30-й итерации.

Рассматривалась оболочка [9], состыкованная из трех частей: цилиндра, части гиперboloида, сферы (фиг. 4), нагруженная внутренним давлением  $p$ . Граничные условия: условия симметрии на правом краю,  $T_1 \neq T_1^z$ ,  $M_1 = 0$  — на левом. Точки сопряжения оболочек выбирались так, чтобы обеспечить непрерывность  $dr/ds$ . Задача решалась при следующих значениях параметров:  $R_1 = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м,  $R_2 = 3 \cdot 10^{-2}$  м,  $R_3 = 0,64$  м,  $l_1 = 0,4$  м,  $p = 34,3$  МПа,  $\nu = 0,3$ ,  $E = 2,06 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma] = 981$  МПа,  $T_1^z = pR_1/2$ , где  $R_1$ ,  $l_1$  — радиус и длина цилиндра,  $R_2$ ,  $R_3$  — радиусы гиперboloида и сферы.

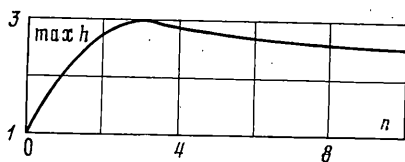
Получены следующие результаты:  $h_1 = 0,455 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_3 = 1,121 \cdot 10^{-2}$  м,  $\max h = 2,393 \cdot 10^{-2}$  м. Толщины в сечениях гиперboloида показаны в центре на фиг. 4.

В сечениях сферы и цилиндра решение было определено после первой итерации. График изменения  $\max h$  (в одном из сечений гиперboloида) от числа итераций представлен на фиг. 5. Из него следует, что удовлетворительное решение было получено после седьмой итерации.

В рассмотренных примерах число пересчетов конструкции находилось в разумных пределах при высокой степени точности удовлетворения усло-



Фиг. 4



Фиг. 5

виям прочности. Счет же напряжений по известным усилиям и моментам требует незначительных по сравнению с расчетом конструкции вычислительных затрат. Этим и объясняется эффективность предлагаемой схемы решения по объему вычислений.

На основе опыта решения и анализа итерационного процесса класс задач, для которого может быть использован данный подход, можно описать следующим образом: вариационные задачи, конечно-мерные задачи с глобальными переменными, задачи с локальными переменными и нелокальными переменными, в которых существует один равнопрочный проект и совпадает с оптимальным проектом относительно основного критерия (обычно веса или объема).

В процессе развития подхода и накопления опыта решения задач возможно уточнение области его эффективного применения.

Ввиду того что определение функций инвариантов представляет собой сложную задачу, в качестве функции  $\phi$ : в примерах использовались усилия и моменты. Но, видимо, это возможно только в том случае, если усилия и моменты относительно слабо меняются при изменении варьируемых параметров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В. В.* Оптимальное проектирование пластинок и оболочек.— Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 722—735.
2. *Fleury C. and Geradin M.* Optimality criteria and mathematical programming in structural weight optimization — *Comput. struct.*, 1978, V. 8, No. 1, p. 7—17.
3. *Левин Г. М., Танаев В. С.* Декомпозиционные методы оптимизации проектных решений. Минск: Наука и техника, 1978. 240 с.
4. *Калинин И. Н., Ленкин И. Б.* Оптимизация оболочек кусочно-постоянной толщины при ограничениях по прочности.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1978, № 6, с. 89—94.
5. *Соломенко Н. С., Абрамян К. Г., Сорокин В. В.* Прочность и устойчивость пластин и оболочек судового корпуса. Л.: Судостроение, 1967. 488 с.
6. *Лизин В. Т., Пяткин В. А.* Проектирование тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1976. 408 с.
7. *Громницкий В. С., Калинин И. Н.* Численное сравнение эффективности критериев оптимальности в задачах строительной механики.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1978, № 4, с. 149—154.
8. *Иванов Г. В.* О вычислении оптимальной переменной толщины оболочки.— В кн.: *Проблемы механики твердого деформируемого тела.* Л.: Судостроение, 1970, с. 171—176.
9. *Без Л. П.* Оптимальное распределение материала в осесимметричной тонкостенной конструкции из условий прочности с учетом изменения свойств материала.— В кн.: *Материалы Всес. школы-семинара «Автоматизированное оптимальное проектирование инженерных объектов и технологических процессов».* Т. 2. Горьковский ун-т, 1974, с. 23—27.

Горький

Поступила в редакцию  
23.XII.1980