УДК 531.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВИНТОВЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА

СТРЕЛКОВА Н. А.

Проводится обобщение задачи оптимального по быстродействию кинематического разворота твердого тела [1] на случай произвольного пространственного движения твердого тела.

1. Кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела, как известно, заключается в том, что связанной с телом системе координат E сообщаются угловая и поступательная скорости, назначение которых – изменить таким образом относительное положение базиса E, чтобы вызвать его совпадение с опорной системой координат I.

Движение базиса E относительно опорного базиса I зададим кватернионами $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$, которые характеризуют ориентацию и поступательное перемещение твердого тела. Тогда кинематические уравнения винтового движения примут следующий вид [2]:

$$2\boldsymbol{\lambda}^{\cdot}=\boldsymbol{\lambda}\circ u,\quad 2\boldsymbol{\mu}^{\cdot}=\boldsymbol{\lambda}\circ v+\boldsymbol{\mu}\circ u \tag{1.1}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t, $(\circ)$ – знак кватернионного умножения, $\boldsymbol{\lambda}=\lambda_0\mathbf{1}+\lambda_1\mathbf{i}_1+\lambda_2\mathbf{i}_2+\lambda_3\mathbf{i}_3$, $\boldsymbol{\mu}=\mu_0\mathbf{1}+\mu_1\mathbf{i}_1+\mu_2\mathbf{i}_2+\mu_3\mathbf{i}_3$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – орты гиперкомплексного пространства [1], $\lambda_i(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ – параметры Родрига – Гамильтона, для которых справедливо соотношение $\lambda_0{}^2+\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_3{}^2=1$, $\mu_i(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ – компоненты кватерниона $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}_1+u_2\mathbf{i}_2+u_3\mathbf{i}_3$, $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}_1+v_2\mathbf{i}_2+v_3\mathbf{i}_3$, u_i, $v_i(i=1,\ 2,\ 3)$ – проекции соответственно угловой и поступательной скоростей на оси связанной системы координат E.

Начальное положение твердого тела задают кватернионы

$$\boldsymbol{\lambda}^0(\lambda_{00},\ \lambda_{10},\ \lambda_{20},\ \lambda_{30}),\quad \boldsymbol{\mu}^0(\mu_{00},\ \mu_{10},\ \mu_{20},\ \mu_{30}),\quad t=0 \tag{1.2}$$

а совпадение связанной и опорной систем координат (конечное положение твердого тела) определяют кватернионы

$$\boldsymbol{\lambda}^k(\pm1,\ 0,\ 0,\ 0),\quad \boldsymbol{\mu}^k(0,\ 0,\ 0,\ 0),\quad t=T \tag{1.3}$$

На угловую и поступательную скорости наложены условия

$$\|\mathbf{u}\|=u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2\leqslant a^2,\quad \|\mathbf{v}\|=v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2\leqslant b^2 \tag{1.4}$$

Требуется найти управляющие функции u_i, v_i $(i=1,\ 2,\ 3)$, удовлетворяющие ограничениям (1.4) и минимизирующие время винтового перемещения твердого тела из начального положения (1.2) в конечное (1.3).

2. Определение оптимальных управлений проведем с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина [3]. Составим функцию Гамильтона

$$\begin{gathered}2\mathbf{H}=\psi_0(-\lambda_1u_1-\lambda_2u_2-\lambda_3u_3)+\psi_1(\lambda_0u_1+\lambda_2u_3-\lambda_3u_2)+\psi_2(\lambda_0u_2+\lambda_3u_1-\lambda_1u_3)+\\+\psi_3(\lambda_0u_3+\lambda_1u_2-\lambda_2u_1)+\varphi_0(-\lambda_1v_1-\lambda_2v_2-\lambda_3v_3-\mu_1u_1-\mu_2u_2-\mu_3u_3)+\\+\varphi_1(\lambda_0v_1+\lambda_2v_3-\lambda_3v_2+\mu_0u_1+\mu_2u_3-\mu_3u_2)+\varphi_2(\lambda_0v_2+\lambda_3v_1-\lambda_1v_3+\mu_0u_2+\mu_3u_1-\mu_1u_3)+\\+\varphi_3(\lambda_0v_3+\lambda_1v_2-\lambda_2v_1+\mu_0u_3+\mu_1u_2-\mu_2u_1)\end{gathered} \tag{2.1}$$

Сопряженные переменные удовлетворяют системе уравнений

$$2\boldsymbol{\psi}^{\cdot}=\boldsymbol{\psi}\circ\mathbf{u}+\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{v},\quad 2\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}=\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{u} \tag{2.2}$$

Из анализа систем (1.1), (2.2) следует, что

$$\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{D}\circ\boldsymbol{\lambda}.\quad \boldsymbol{\psi}=\mathbf{C}\circ\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{D}\circ\boldsymbol{\mu} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ – постоянные кватернионы.

Действительно $\mathbf{D}=\boldsymbol{\varphi}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}$, $2\mathbf{D}^{\cdot}=\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{u}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}+\boldsymbol{\varphi}\circ\bar{\mathbf{u}}\circ\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{u}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}-\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{u}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}=0$, $\mathbf{C}=\boldsymbol{\psi}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}-\boldsymbol{\varphi}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\mu}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}$, $2\mathbf{C}^{\cdot}=\boldsymbol{\psi}\circ\mathbf{u}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}+\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{v}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}-\boldsymbol{\psi}\circ\mathbf{u}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}-\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{u}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\mu}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}+\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{u}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\mu}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}-\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{v}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}-\boldsymbol{\varphi}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{u}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}+\boldsymbol{\varphi}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{u}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}=0$ (здесь черта означает сопряженный кватернион).

Преобразуем функцию Гамильтона (2.1) к виду

$$2\mathbf{H}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{q},\quad \mathbf{p}=\operatorname{vect}(\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\psi}+\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\boldsymbol{\varphi}),\quad \mathbf{q}=\operatorname{vect}(\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\varphi}) \tag{2.4}$$

с учетом (2.3) вектора $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ можно представить иначе:

$$\mathbf{p}=\operatorname{vect}(\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\mathbf{C}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}+\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{D}\circ\boldsymbol{\mu}+\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{D}\circ\boldsymbol{\lambda}),\quad \mathbf{q}=\operatorname{vect}(\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\mathbf{D}\circ\boldsymbol{\lambda}) \tag{2.5}$$

Система уравнений (1.1) имеет интеграл

$$\lambda_0\mu_0+\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=0 \tag{2.6}$$

но тогда выполняется равенство

$$\lambda\circ\bar{\mu}=-\mu\circ\bar{\lambda}, \quad \operatorname{sqal}(\bar{\lambda}\circ D\circ\mu+\bar{\mu}\circ D\circ\lambda)=0 \tag{2.7}$$

Кроме того $\operatorname{sqal}(\bar{\lambda}\circ D\circ\lambda)=\operatorname{sqal} D$, $\operatorname{sqal}(\bar{\lambda}\circ C\circ\lambda)=\operatorname{sqal} C$. Отсюда выражение (2.5) примет вид

$$p=\bar{\lambda}\circ c\circ\lambda+\bar{\lambda}\circ d\circ\mu+\bar{\mu}\circ d\circ\lambda, \quad q=\bar{\lambda}\circ d\circ\lambda, \quad c=\operatorname{vect} C, \quad d=\operatorname{vect} D \tag{2.8}$$

Из условия максимума H (2.4) следует, что

$$u=p, \quad \|p\|=a^2, \quad v=q, \quad \|q\|=b^2 \tag{2.9}$$

Найдем $\|q\|=\|\bar{\lambda}\circ d\circ\lambda\|=\|d\|$, $\|p\|=(\bar{\lambda}\circ c\circ\lambda+\bar{\lambda}\circ d\circ\mu+\bar{\mu}\circ d\circ\lambda)\circ(\bar{\lambda}\circ\bar{c}\circ\lambda+\bar{\mu}\circ\bar{d}\circ\lambda+\bar{\lambda}\circ\bar{d}\circ\mu)=$ $=\|c\|+\bar{\lambda}\circ c\circ\lambda\circ\bar{\mu}\circ\bar{d}\circ\lambda+\bar{\lambda}\circ c\circ\bar{d}\circ\mu+\bar{\lambda}\circ d\circ\mu\circ\bar{\lambda}\circ\bar{c}\circ\lambda+\|d\|\,\|\mu\|+\bar{\lambda}\circ d\circ\mu\circ\bar{\lambda}\circ\bar{d}\circ\mu+\bar{\mu}\circ d\circ\bar{c}\circ\lambda+\bar{\mu}\circ d\circ\lambda\circ\bar{\mu}\circ\bar{d}\circ\lambda+$ $+\|d\|\,\|\mu\|=\|c\|+2\|d\|\,\|\mu\|-2\|d\|\,\|\mu\|=\|c\|$, так как справедливо равенство (2.7), $\bar{\lambda}\circ d\circ\mu\circ\bar{\lambda}\circ$ $\circ\bar{d}\circ\mu+\bar{\mu}\circ d\circ\lambda\circ\bar{\mu}\circ\bar{d}\circ\lambda=2\operatorname{sqal}(\bar{\mu}\circ d\circ\lambda\circ\bar{\mu}\circ\bar{d}\circ\lambda)=-2\operatorname{sqal}(\bar{\mu}\circ d\circ\mu\circ\bar{\lambda}\circ\bar{d}\circ\lambda)=-2\|\mu\|\,\|d\|$, $\bar{\lambda}\circ c\circ\bar{d}\circ\mu+$ $+\bar{\mu}\circ d\circ\bar{c}\circ\lambda=\operatorname{sqal}(\bar{\mu}\circ d\circ\bar{c}\circ\lambda+\bar{\lambda}\circ c\circ\bar{d}\circ\mu)=\operatorname{sqal}(\lambda\circ\bar{\mu}\circ d\circ\bar{c}-\lambda\circ\bar{\mu}\circ c\circ\bar{d})=0$.

Таким образом, оптимальные управления определятся в функции фазовых координат следующими соотношениями:

$$v=\bar{\lambda}\circ d\circ\lambda, \quad \|d\|=b^2, \quad u=\bar{\lambda}\circ c\circ\lambda+\bar{\lambda}\circ d\circ\mu+\bar{\mu}\circ d\circ\lambda, \quad \|c\|=a^2 \tag{2.10}$$

Подставив (2.10) в кватернионные уравнения движения (1.1), получим

$$2\dot{\lambda}=c\circ\lambda+d\circ\mu+\lambda\circ\bar{\mu}\circ d\circ\lambda, \quad 2\dot{\mu}=-\lambda\circ\bar{\mu}\circ(c\circ\lambda+d\circ\mu)+(1+\|\mu\|)\,d\circ\lambda \tag{2.11}$$

где кватернионы c, d должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия (1.2), (1.3).

3. Для решения системы (2.11) найдем $2(\lambda\circ\bar{\mu})'=\lambda\circ u\circ\bar{\mu}+\lambda\circ\bar{v}\circ\bar{\lambda}+\lambda\circ\bar{u}\circ\mu=\lambda\circ\bar{v}\circ\bar{\lambda}$.

Воспользуемся равенством (2.10), тогда $2(\lambda\circ\bar{\mu})'=\bar{d}$, отсюда

$$2\lambda\circ\bar{\mu}=-dt+2\lambda^0\circ\mu^0 \tag{3.1}$$

Так как $\|d\|=b^2$, $\mu^k=0$, $\lambda^k\circ\bar{\mu}^k=0$, то

$$T_1=\frac{2}{b}\sqrt{\|\mu^0\|}=\frac{2}{b}\sqrt{\mu_{00}^2+\mu_{10}^2+\mu_{20}^2+\mu_{30}^2} \tag{3.2}$$

T_1 определяет время поступательного перемещения твердого тела (при $t=T_1$ начала связанной и опорной систем координат совпадают).

Из (3.1) найдем $d=b\lambda^0\circ\bar{\mu}^0/\sqrt{\|\mu^0\|}$.

Нетрудно показать, что значение d не зависит от того, в какой момент времени брать текущие кватернионы, т. е.

$$d=b\lambda^0\circ\bar{\mu}^0/\sqrt{\|\mu^0\|}=b\bar{\lambda}\circ\mu/\sqrt{\|\mu\|} \tag{3.3}$$

Подставив (3.3) в (2.10), определим

$$v=b\bar{\mu}\circ\lambda/\sqrt{\|\mu\|} \tag{3.4}$$

Подставляя найденное значение v в (2.10) и в первое уравнение системы (2.11), получим

$$2\dot{\lambda}=c\circ\lambda, \quad u=\bar{\lambda}\circ c\circ\lambda, \quad \|c\|=a^2 \tag{3.5}$$

Но тогда [1]:

$$u_i=-a\lambda_{i0}\operatorname{sign}\lambda_{00}/\sqrt{1-\lambda_{00}^2}, \qquad (i=1,2,3) \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.5), (3.6) следует, что оптимальная по быстродействию ориентация твердого тела не зависит от его поступательного движения.

Найдем время кинематической ориентации твердого тела

$$T_2=2\arccos|\lambda_{00}|/a \tag{3.7}$$

4. Окончательные выражения для оптимальных управлений имеют следующий вид:

$$u_i=\begin{cases} -a\lambda_{i0}\operatorname{sign}\lambda_{00}/\sqrt{1-\lambda_{00}^2}, & \text{если } t\in[0,T_2] \\ 0, \text{ если } t\in[T_2,T_1] \text{ при } T_2<T_1 & \left(|\lambda_{00}|<\cos\dfrac{a}{b}\sqrt{\|\mu^0\|}\right)\end{cases} \quad (i=1,2,3) \tag{4.1}$$

$$\mathbf{v}=\begin{cases} b\bar{\mu}\circ\lambda/\sqrt{\|\mu\|}, & \text{если } t\in[0,T_1] \\ 0, \text{ если } t\in[T_1,T_2] \text{ при } T_1<T_2 & \left(|\lambda_{00}|<\cos\dfrac{a}{b}\sqrt{\|\mu^0\|}\right)\end{cases} \tag{4.2}$$

Время винтового перемещения твердого тела определяется равенством

$$T=\max(T_1,\ T_2) \tag{4.3}$$

Из соотношений (4.1), (4.2), (3.1), (3.5) найдем траектории оптимального по быстродействию винтового движения твердого тела

$$\lambda_0(t)=\lambda_{00}\cos{}^1\!/_2at+\sin{}^1\!/_2at\operatorname{sign}\lambda_{00}\sqrt{1-\lambda_{00}^2},\quad t\in[0,\ T_2] \tag{4.4}$$

$$\lambda_i(t)=\lambda_{i0}\left(\cos\frac{a}{2}t-\sin\frac{a}{2}t\frac{|\lambda_{00}|}{\sqrt{1-\lambda_{00}^2}}\right)\quad (i=1,2,3),\quad t\in[0,T_2]$$

$$\mu(t)=(1-bt/2\sqrt{\|\mu^0\|})\mu^0\circ\bar{\lambda}^0\circ\lambda,\quad t\in[0,\ T_1]$$

Замечание. Пусть $\mathbf{r}=y_1\mathbf{i}_1+y_2\mathbf{i}_2+y_3\mathbf{i}_3$ – радиус-вектор, проведенный из начала опорной системы координат I в полюс связанной системы координат E, y_i ($i=1,\ 2,\ 3$) – проекции $\mathbf{r}$ на оси связанной системы координат.

Воспользуемся формулой [2]: $r=2\bar{\lambda}\circ\mu$ и перейдем от кватернионных координат λ_i, μ_i к переменным λ_i, y_i. Тогда

$$T_1=2/b\sqrt{\|\mathbf{y}^0\|}=2/b\sqrt{y_{10}^2+y_{20}^2+y_{30}^2}$$

$$v_i=-by_i(t)\,/\sqrt{y_1^2(t)+y_2^2(t)+y_3^2(t)},\quad (i=1,\ 2,\ 3),\quad t\in[0,\ T_1]$$

$$\mathbf{y}(t)=(1-bt/2\sqrt{\|y^0\|})\bar{\lambda}(t)\circ\lambda^0\circ\mathbf{y}^0\circ\bar{\lambda}^0\circ\lambda(t)$$

$\lambda(t)$, $\bar{\lambda}(t)$ определяются равенством (4.4).

5. Рассмотрим оптимальное по быстродействию управление винтовым перемещением твердого тела по вращающейся системе координат при условиях (1.2) – (1.4). Решение данной задачи представляет интерес при исследовании кинематической стыковки космических аппаратов.

Пусть опорная система координат I совершает вращение с угловой скоростью ω ($\omega=0\mathbf{i}_1+\omega\mathbf{i}_2+0\mathbf{i}_3$) относительно инерциального пространства. Тогда, учитывая результаты работы [4] и проводя исследование, аналогичное пп. 2 – 4, нетрудно показать, что время оптимального по быстродействию винтового перемещения твердого тела определяется равенством

$$T=\max[T_1,\ \min(T_2,\ T_3)] \tag{5.1}$$

Величины T_2, T_3 находятся из уравнений

$$\lambda_{00}\cos\beta(T_2)-\lambda_{20}\sin\beta(T_2)=\cos\frac{a}{2}T_2$$

$$\beta(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\omega(\tau)\,d\tau \tag{5.2}$$

$$\lambda_{00}\cos\beta(T_3)+\lambda_{20}\sin\beta(T_3)=-\cos\frac{a}{2}T_3$$

Оптимальные управления имеют следующий вид:

$$u_1=\frac{a}{\sin\alpha(T_2)}[-\lambda_{10}\cos\beta(T_2)+\lambda_{30}\sin\beta(T_2)]$$

$$u_2=\frac{a}{\sin\alpha(T_2)}\left[\lambda_{00}\sin\beta(T_2)-\lambda_{20}\cos\beta(T_2)\right] \qquad (5.3)$$

$$u_3=\frac{a}{\sin\alpha(T_2)}\left[-\lambda_{30}\cos\beta(T_2)-\lambda_{10}\sin\beta(T_2)\right]$$

при $T_2<T_3$, $t\in[0,\ T_2]$

$$u_1=\frac{a}{\sin\alpha(T_3)}\left[\lambda_{10}\cos\beta(T_3)+\lambda_{30}\sin\beta(T_3)\right]$$

$$u_2=\frac{a}{\sin\alpha(T_3)}\left[\lambda_{00}\sin\beta(T_3)+\lambda_{20}\cos\beta(T_3)\right] \qquad (5.4)$$

$$u_3=\frac{a}{\sin\alpha(T_3)}\left[\lambda_{30}\cos\beta(T_3)-\lambda_{10}\sin\beta(T_3)\right]$$

при $T_3<T_2$, $t\in[0,\ T_3]$

$$u_1=u_2=u_3=0 \quad \text{при} \quad \min(T_2,\ T_3)<T_1, \quad t\in[\min(T_2,\ T_3),\ T_1] \qquad (5.5)$$

где $\alpha(t)={}^1/_2at$, $\beta=\beta(t)$ задается соотношением (5.2)

$$\mathbf{v}=\begin{cases} b\overline{\boldsymbol{\mu}}(t)\circ\boldsymbol{\lambda}(t)/\sqrt{\|\boldsymbol{\mu}(t)\|} & \text{при } t\in[0,T_1] \\ 0 \ \text{при} \ T_1<\min(T_2,T_3), & t\in[T_1,\min(T_2,T_3)] \end{cases} \qquad (5.6)$$

где $\boldsymbol{\lambda}(t)$, $\boldsymbol{\mu}(t)$ – решения системы уравнений $2\boldsymbol{\lambda}^\bullet=\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{u}-\boldsymbol{\omega}\circ\boldsymbol{\lambda}$, $2\boldsymbol{\mu}^\bullet=\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{u}+\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{v}-\boldsymbol{\omega}\circ\boldsymbol{\mu}$ при управлениях (5.3) – (5.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. *Челноков Ю. Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 32—39.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
4. *Маланин В. В., Князева Н. А.* Трехосная ориентация спутника.— Проблемы механики управляемого движения: Сб. статей. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 1975, вып. 7, с. 94—107.

Пермь

Поступила в редакцию
7.VII.1980