УДК 531.386

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЗОНАНСНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ФИЛАТОВ О. П., ХАПАЕВ М. М.

Рассматривается устойчивость резонансных движений гироскопа с неконтактным подвесом, описываемых трехчастотной системой, и гироскопа в кардановом подвесе без предположения о малости скорости изменения фазовых расстроек [1] в окрестности исследуемых на устойчивость стационарных решений. Оказывается, что для систем, обладающих достаточной диссипацией и некоторыми свойствами резонансных членов, можно оценить малые знаменатели вне достаточно малой окрестности стационарного решения. Исследование стационарных резонансных движений в многочастотных системах на устойчивость без дополнительной информации о синхронизации фазовых переменных, сводящей систему к одночастотной, было предложено в [2]. Этот подход основан на втором обобщенном методе Ляпунова [3].

1. Систему дифференциальных уравнений, описывающих одну из моделей гироскопа с неконтактным подвесом на вибрирующем основании [4], можно записать, опустив осциллирующие члены, в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\mu[X_{10}(\theta,l)+X_{11}(\theta,l,\rho,\alpha)],\qquad \frac{dl}{d\tau}=\mu[X_{20}(\theta,l)+X_{21}(\theta,l,\rho,\alpha)]$$
$$\frac{d\rho}{d\tau}=\mu Y_{11}(\theta,l,\rho,\alpha),\qquad \frac{d\sigma}{d\tau}=\mu Y_{21}(\theta,l,\rho,\alpha),\qquad \frac{d\alpha}{d\tau}=\lambda(\theta,l)+\mu\Phi_1(\theta,l,\rho,\alpha) \tag{1.1}$$

Здесь углы ρ и σ определяют положение вектора кинетического момента, l – величина кинетического момента, θ – угол между осью динамической симметрии ротора и вектором кинетического момента, $\alpha=\gamma-\psi-\varphi$, γ – угол вынужденного гармонического движения основания кожуха с частотой ω, углы Эйлера φ, ψ и θ характеризуют повороты ротора относительно системы координат, связанной с вектором кинетического момента, μ – малый параметр, пропорциональный квадрату смещения центра масс ротора относительно сферической поверхности ротора. Выпишем функции, входящие в правую часть системы (1.1), сохраняя обозначения статьи [4]

$$X_{10}=-\frac{\sin\theta}{2l}\left\{-\frac{1}{2}[(1+\cos\theta)\operatorname{Im}w(il-i\nu)-\right.$$
$$\left.-(1-\cos\theta)\operatorname{Im}w(il+i\nu)-2\operatorname{Im}(i\nu)]\cos^2\beta+2\cos\theta\operatorname{Im}w(il)\sin^2\beta\right\}$$
$$X_{20}=-\frac{1}{4}[(1-\cos\theta)^2\operatorname{Im}w(il+i\nu)+(1+\cos\theta)^2\operatorname{Im}w(il-i\nu)]\cos^2\beta-$$
$$-\sin^2\theta\operatorname{Im}w(il)\sin^2\beta$$
$$X_{11}=-\frac{\sin\theta}{2l}(A\sin\alpha+B\cos\alpha)\sin\rho\cos\beta,$$
$$X_{21}=\frac{1+\cos\theta}{2}(A\sin\alpha+B\cos\alpha)\sin\rho\cos\beta \tag{1.2}$$
$$Y_{11}=\frac{1+\cos\theta}{2l}(A\sin\alpha+B\cos\alpha)\cos\rho\cos\beta,$$
$$Y_{21}=\frac{1+\cos\theta}{2l}(A\cos\alpha-B\sin\alpha)\operatorname{ctg}\rho\cos\beta$$

$$\lambda=\frac{l\varkappa\cos\theta}{1+\varkappa}-l+\omega,\qquad \nu=\frac{l\varkappa\cos\theta}{1+\varkappa},\qquad A=\frac{1}{2}b\operatorname{Re}w(i\omega),\qquad B=\frac{1}{2}b\operatorname{Im}w(i\omega)$$

Здесь $w(x)=x^2q_0a(x)[q_0a(x)+x^2b(x)]^{-1}$, $a(x)$, $b(x)$ – полиномы с постоянными коэффициентами относительно x, $q_0=\mathrm{const}$, $i^2=-1$, $\beta=\mathrm{const}$ – угол между вектором дебаланса и экваториальной плоскостью центрального эллипсоида инерции ротора, $\varkappa=I_3/I_1-1$, I_1 и I_3 – экваториальный и полярный моменты инерции ротора. Переменные θ, l, ρ и σ медленные. Что касается фазовой расстройки α, то в окрестности точки $\theta=\theta_0=0$, $l=l_0=\omega(1+\varkappa)$, скорость изменения α определяется положением медленных переменных θ и l относительно (θ_0, l_0). Основная задача при исследовании на устойчивость точки (θ_0, l_0) состоит в построении области $H(\varepsilon)$ в произвольной ε-окрестности указанной точки, такой, что, с одной стороны, траектории системы (1.1) с начальными условиями по переменным θ и l из некоторой области допустимых возмущений $G(\varepsilon)$ в процессе эволюции при удалении от стационарного решения обязательно попадут в область $H(\varepsilon)$, с другой стороны, в области $H(\varepsilon)$ можно оценить малый знаменатель $\lambda(\theta, l)$ так, чтобы использовать достаточно большую скорость изменения α в этой области для доказательства устойчивости.

2. Будем исследовать на устойчивость точку

$$\theta=\theta_0, \quad l=l_0, \quad \rho=\rho_0=\frac{1}{2}\pi, \quad \sigma=\sigma_0\in[-\pi, \pi] \tag{2.1}$$

в силу системы (1.1) по переменным θ и l на бесконечном интервале, по ρ и σ, ввиду отсутствия диссипации в уравнениях для них – на отрезке $[0, O(\mu^{-1})]$. Резонансную кривую, проходящую через точку (θ_0, l_0), обозначим

$$S=\left\{(\theta, l): \omega-l+\frac{l\varkappa\cos\theta}{1+\varkappa}=0\right\} \tag{2.2}$$

Наряду с (1.1) рассмотрим не содержащую резонансных членов систему

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\mu X_{10}(\theta, l), \quad \frac{dl}{d\tau}=\mu X_{20}(\theta, l) \tag{2.3}$$

В работе [5] при исследовании нерезонансной гироскопической системы показано, что при выполнении неравенств

$$\begin{gathered} M_0\equiv\frac{1}{2}\operatorname{Im} w(i\nu_0)\cos^2\beta+\operatorname{Im} w(il_0)\sin^2\beta>0 \\ N_0\equiv\frac{\partial}{\partial l}\operatorname{Im} w\left(\frac{il_0}{1+\varkappa}\right)>0, \quad \nu_0=\frac{l_0\varkappa\cos\theta}{1+\varkappa} \end{gathered} \tag{2.4}$$

система (2.3) имеет асимптотически устойчивое решение $\theta=\theta_0$, $l=l_0$. Пусть задано $\varepsilon>0$. Зафиксируем некоторое Δ, такое, что $0<\Delta<\varepsilon$, и обозначим $c=\varepsilon-\Delta$. Построим функцию

$$u(\theta, l, \varepsilon)=l-l_0\exp\left(-\int_{-\theta_1}^{\theta}\frac{1+\cos z}{\sin z}dz\right) \quad \text{при} \quad \theta<0$$

$$u(\theta, l, \varepsilon)=l-l_0\exp\left(-\int_{\theta_1}^{\theta}\frac{1+\cos z}{\sin z}dz\right) \quad \text{при} \quad \theta>0$$

$$u(\theta, l, \varepsilon)=-1 \quad \text{при} \quad \theta=0$$

где $\theta_1=0{,}5(\varepsilon-\Delta)$. В качестве обобщенной функции Ляпунова [2, 3] для системы (1.1) возьмем функцию Ляпунова системы (2.3) в виде $v(\theta, l)=(\theta-\theta_0)^2+(l-l_0)^2$.

Ее производная в силу системы (2.3)

$$\frac{dv}{d\tau}=-\mu\frac{M_0}{l_0}(\theta-\theta_0)^2-2\mu\cos^2\beta\frac{\partial}{\partial l}\operatorname{Im} w\left(\frac{il_0}{1+\varkappa}\right)(l-l_0)^2+\mu o((\theta-\theta_0)^2, (l-l_0)^2)$$

согласно условиям (2.4) отрицательно-определенная в области $B(\varepsilon_0)=\{(\theta, l): (\theta-\theta_0)^2+(l-l_0)^2<\varepsilon_0^2\}$, где ε_0 достаточно мало. Далее считаем $\varepsilon<\varepsilon_0$, при помощи функций $u(\theta, l, \varepsilon)$ и $v(\theta, l, \varepsilon)$ построим области

$$G(\varepsilon)=\{(\theta, l): u(\theta, l, \varepsilon)<0, \ v(\theta, l)<c^2\}, \qquad Q(\varepsilon)=\{(\theta, l): u(\theta, l, \varepsilon)<0, \ v(\theta, l)<\varepsilon^2\}$$

Будем фиксировать начальные значения по θ и l для системы (1.1) в области $G(\varepsilon)$. Градиент функции $u(\theta, l)$ в точках кривой $u(\theta, l)=0$ запишется в виде

$$\nabla u|_{u(\theta, l)=0}=\left(l\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}, 1\right) \tag{2.5}$$

Из (2.5) и (1.2) следует равенство

$$\nabla u(X_{10}+X_{11}, X_{20}+X_{21})\,|_{u(\theta,l)=0}=l\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}X_{10}+X_{20} \tag{2.6}$$

Правую часть (2.6) с учетом (1.2) можно переписать в виде

$$l\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}X_{10}+X_{20}=-(1+\cos\theta)\left[\frac{1}{2}\operatorname{Im} w(i\nu_0)\cos^2\beta+\operatorname{Im} w(il_0)\sin^2\beta\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial l}\operatorname{Im} w\left(\frac{il_0}{1+\varkappa}\right)\cos^2\beta\delta l+o(\delta\theta,\delta l) \tag{2.7}$$

где $\delta l=l-l_0$, $\delta\theta=\theta-\theta_0$. Из (2.7) следует, что при выполнении первого неравенства в (2.4), при достаточно малом δl (можно считать, что при $|\delta l|<\varepsilon_0$), выполняется неравенство

$$\nabla u(X_{10}+X_{11}, X_{20}+X_{21})\,|_{u(\theta,l)=0}<0 \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что любое решение системы (1.1) с начальными условиями $(\theta(0), l(0))\in G(\varepsilon)$ может покинуть окрестность $B(\varepsilon)$ по переменным θ и l только через область $H(\varepsilon)=(B\cap Q)\setminus G$. Из расположения резонансной кривой (2.2) в области $B(\varepsilon)$ и вида $\lambda(\theta, l)$ в (1.2) следует, что комбинационная частота $\lambda(\theta, l)$ в области $H(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda(\theta,l)|\geqslant\left|\left(\frac{\varkappa}{1+\varkappa}-1\right)(\varepsilon-\Delta)\right|+o(\delta\theta,\delta l) \tag{2.9}$$

Из асимптотической устойчивости системы (2.3), а также неравенств (2.8) и оценки (2.9), которая гарантирует осциллятивность резонансных членов вне некоторой окрестности резонансной кривой, используя методику доказательства теоремы 1 [3, гл. I], получим оценку малого параметра μ_0, такую, что любое решение системы (1.1) с начальными условиями $(\theta(0), l(0))\in G(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $[\theta(\tau)-\theta_0]^2+[l(\tau)-l_0]^2\leqslant\varepsilon^2$ при $t\geqslant 0$ и $\mu\leqslant\mu_0$. Таким образом доказана устойчивость на бесконечном интервале точки (θ_0, l_0) в силу системы (1.1).

3. Конкретный вид системы (1.1) позволяет провести исследование на устойчивость по переменным ρ и σ следующим образом: рассмотреть устойчивость по переменным θ, l и ρ, а затем по переменным θ, l, ρ и σ. Для исследования по θ, l и ρ воспользуемся интегральным тождеством, которое легко может быть получено из второго и третьего уравнений системы (1.1)

$$l(\tau)\cos\rho(\tau)-l(0)\cos\rho(0)=\mu\int_0^\tau X_{20}[\theta(t), l(t)]\cos\rho(t)\,dt \tag{3.1}$$

Из (3.1) в силу устойчивости точки (θ_0, l_0) следует устойчивость по переменной ρ на интервале $[0, O(\mu^{-1})]$. Устойчивость точки $\sigma_0\in[-\pi, \pi]$ следует непосредственно из оценки правой части четвертого уравнения системы (1.1), записанного в интегральном виде, с учетом устойчивости θ, l и ρ. Отметим, что устойчивость точки (2.1) в силу системы (1.1) доказана без предположения об устойчивости фазовой расстройки α в некоторой точке $\alpha=\alpha_0$. Условия устойчивости резонансного решения (2.1) совпадают с условиями устойчивости (2.4), полученными в [5], при исследовании устойчивости нерезонансного решения. Таким образом, если хотя бы одно из условий (первое или третье) в (3.4) работы [4] не выполняется, может иметь место неустойчивость (на бесконечном интервале) по α, ρ.

Полученные результаты являются обоснованием существования широкого класса резонансных движений в трехчастотной системе. Следует отметить, что условие устойчивости таких движений содержит только физические параметры системы (не содержит фаз), что делает возможным проверку этих условий и выбор оптимальных параметров системы с точки зрения устойчивости. Отметим также, что уравнения системы (1.1) получены в [4] путем усреднения по быстрым переменным в уравнениях движения гироскопа с неконтактным подвесом по траекториям соответствующей порождающей системы. Это усреднение требует обоснования, так как оно проводится в окрестности точки $\theta=0$, где некоторые слагаемые в правых частях уравнений неограничены $(\sim(\sin\theta)^{-1})$. Дополнительное исследование этого вопроса показывает, что результат усреднения является тем не менее правильным, несмотря на указанную особенность. В реальной системе величина μ является фиксированной и не может, вообще говоря, быть выбрана сколь угодно малой в зависимости от ε. В малой окрестности точки резонанса $(\varepsilon=O(\mu))$ комбинационная частота перестает осциллировать, она становится медленной переменной наряду с θ, l, ρ, σ. В этом случае с учетом поведения резонансной фазы движение описывается результатами [4].

4. В работе [6] при исследовании существенно нелинейной гироскопической системы были получены достаточные условия устойчивости резонансных движений, обусловленные синхронизацией углов нутационных и вынужденных колебаний гироскопа в кардановом подвесе. При этом амплитуда стационарных, нутационных колебаний a могла быть порядка единицы, что и приводило к существенной нелинейности системы.

Рассмотрим другой крайний случай нутационных колебаний в окрестности $a=0$. Покажем, что при действии на гироскоп гармонических возмущений с частотой Ω, при которой возникает резонансное соотношение между собственной частотой $\omega(a)$ нутационных колебаний и частотой Ω при достаточно малых значениях амплитуды внешних колебаний, обеспечивается устойчивость внутреннего кольца карданова подвеса гироскопа относительно внешнего. Исходная система уравнений имеет вид [6]:

$$\frac{d\alpha}{d\tau}=m[l-\sin\beta+\mu f\sin(\Omega\tau+\delta)]$$

$$\frac{d^2\beta}{d\tau^2}=(l-\sin\beta)\cos\beta+\mu\left[g\sin\Omega\tau-\xi\frac{d\beta}{d\tau}+f\cos\beta\sin(\Omega\tau+\delta)\right] \tag{4.1}$$

Здесь α – угол прецессии, β – угол нутации, μ – малый параметр, m, l, f, δ, g, ξ – постоянные. Отметим, что значение l определяется начальными условиями. Второе уравнение системы (4.1) запишем в амплитудно-фазовых переменных без осциллирующих членов

$$\frac{da}{d\tau}=\frac{\mu}{\Delta(a)}[A_{1s}(a)\cos\theta-\xi J(a)+A_{2s}\cos(\theta-\delta)] \tag{4.2}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau}=s\omega(a)-\Omega-\frac{\mu}{\Delta(a)}[A_{3s}(a)\sin\theta+A_{4s}(a)\sin(\theta-\delta)]\quad (s=1,2,\ldots)$$

сохраняя обозначения [6]. Если в начальный момент времени внутреннее кольцо неподвижно ($\mu=0$, $l=\sin\beta$), то $a=0$ и $\Delta(a)=0$. Пусть после приложения возмущений возникает резонансное соотношение $s\omega(0)-\Omega=0$. Правая часть системы (4.2) имеет сингулярность. Поэтому воспользуемся для исследования на устойчивость точки $a=0$ методом обобщенных функций Ляпунова, где существование самой обобщенной функции Ляпунова и ее производной предполагается в кольцевой области, окружающей точку резонанса или особенности [2, 3]. Обобщенную функцию Ляпунова системы (4.2) возьмем в виде $v=a^2$. Будем рассматривать поведение системы (4.2) по переменной a в интервале $[a_1, a_2]$, где a_1, a_2 – произвольные достаточно малые положительные числа. Комбинационная частота $s\omega(a)$ монотонно убывает [6] на отрезке $[0, 1-|l|]$, поэтому

$$|s\omega(a)-\Omega|\geqslant|s\omega(a_1)-\Omega|,\qquad \omega(a)=\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{(1+a)^2-l^2}}{K(k)},\qquad k^2=\frac{4a}{(1+a)^2-l^2} \tag{4.3}$$

$K(k)$ – полный эллиптический интеграл. Из (4.3) и неравенства $J(a)>0$ следует, согласно теореме 1 работы [3], что при всех достаточно малых μ любое решение системы (4.2) с начальными условиями $0\leqslant a(0)\leqslant a_1$ удовлетворяет неравенству $0\leqslant a(\tau)\leqslant a_2$ при $t\geqslant 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* О резонансе в существенно нелинейной системе.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1, с. 131–144.
2. *Хапаев М. М.* Обобщение второго метода Ляпунова и исследование некоторых резонансных задач.– Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 1, с. 46–49.
3. *Хапаев М. М.* Проблема устойчивости в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.– Успехи матем. наук, 1980, т. 35, № 1 (211), с. 127–170.
4. *Мартыненко Ю. Г., Савченко Т. А.* Резонансные движения гироскопа с неконтактным подвесом на вибрирующем основании.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6, с. 16–23.
5. *Мартыненко Ю. Г.* Движение несбалансированного гироскопа с неконтактным подвесом.– Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4, с. 13–19.
6. *Климов Д. М., Филиппов В. А.* О резонансе в существенно нелинейной гироскопической системе.– Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6, с. 42–54.

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.1980