УДК 531.39

О ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

БОЛОТИНА Н. Е., ВИЛЬКЕ В. Г.

Рассматриваются продольные деформации вязкоупругого стержня и его поступательно-вращательное движение в центральном ньютоновском поле сил. Найдены все стационарные вращения стержня и исследована их устойчивость.

Все финитные движения вязкоупругого стержня имеют в качестве предельных движений стационарные вращения вокруг притягивающего центра [1].

Пусть $OXYZ$ – инерциальная система координат с началом в притягивающем центре. Однородный упругий стержень, заключенный в невесомую цилиндрическую оболочку, движется под действием силы притяжения по закону Ньютона к точке O. Стационарные точки гамильтониана системы на многообразии, определяемом интегралом момента количества движения относительно точки O, являются стационарными вращениями деформированного стержня как твердого тела вокруг притягивающего центра. Конфигурации системы, отвечающие стационарным движениям, могут быть найдены как стационарные точки измененной потенциальной энергии [1, 2]. Имеем

$$H=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\mathbf{R}^{\cdot 2}\rho\,ds-\int_{-l}^{l}\mu\rho(\mathbf{R}^2)^{-1/2}ds+\frac{a^2}{2}\int_{-l}^{l}u'^2\,ds\qquad\left({}^{\cdot}=\frac{\partial}{\partial t},\ {}'=\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

$$\mathbf{G}=G\mathbf{e}_2=\int_{-l}^{l}[\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{\cdot}]\rho\,ds,\qquad \mathbf{R}(s,t)=\mathbf{R}_0(t)+\mathbf{e}(t)[s+u(s,t)]$$

$$W[\mathbf{R}]=\frac{G^2}{2}\left(\int_{-l}^{l}[\mathbf{R}\times\mathbf{e}_2]^2\rho\,ds\right)^{-1}-\int_{-l}^{l}\left[\frac{\mu\rho}{(\mathbf{R}^2)^{1/2}}-\frac{a^2u'^2}{2}\right]ds$$

Здесь $\mathbf{R}(s,t)$ – радиус-вектор точки стержня, $\mathbf{e}(t)$ – единичный вектор вдоль стержня, $\mathbf{R}_0(t)$ – радиус-вектор центра масс стержня, $u(s,t)$ – продольное смещение сечения стержня с координатой s, ρ – линейная плотность материала стержня, μ – гравитационная постоянная, a^2 – произведение модуля упругости Юнга на площадь поперечного сечения стержня, $\mathbf{e}_2$ – единичный вектор по оси OY, $\mathbf{G}$ – вектор момента количества движения, направленный по оси OY неподвижной системы координат, H – полная энергия системы, W – измененная потенциальная энергия.

Теорема об изменении энергии записывается в виде

$$\frac{dH}{dt}=-2D[u^{\cdot}],\qquad D[u^{\cdot}]=\int_{-l}^{l}du^{\cdot\prime 2}\,ds\qquad(d>0)\tag{1}$$

где $D[u^{\cdot}]$ – диссипативный функционал. Для описания процесса продольных деформаций стержня принята модель линейной теории вязкоупругости.

Конфигурационным пространством системы является пространство $R^3\times S^2\times V$, где $\mathbf{R}_0\in R^3$, $\mathbf{e}\in S^2$, $u\in V$ и

$$V=\left\{u:u\in W_2{}^1([-l,l]),\quad\int_{-l}^{l}u(s,t)\,ds=0\right\}$$

Стационарные движения, точнее конфигурации стержня при стационарных движениях, удовлетворяют условию

$$\delta W[\mathbf{R}]=-G^2\left(\int_{-l}^{l}[\mathbf{R}\times\mathbf{e}_2]^2\rho\,ds\right)^{-2}\int_{-l}^{l}(\mathbf{R}\times\mathbf{e}_2)(\delta\mathbf{R}\times\mathbf{e}_2)\rho\,ds+$$
$$+\int_{-l}^{l}\mu\rho(\mathbf{R}^2)^{-3/2}(\mathbf{R},\delta\mathbf{R})\,ds-a^2\int_{-l}^{l}u''\delta u\,ds\tag{2}$$

Стержень имеет длину $2l$ и на его концах выполняются условия $u'(l, t) = u'(-l, t) = 0$ по причине отсутствия внешних сил.

Если в соотношении (2) положить $\delta R = \delta\alpha \times R$ (среди возможных перемещений есть вращения системы как целого вокруг точки O), то, учитывая равенство нулю работы гравитационных и упругих сил, придем к равенству

$$\int_{-l}^{l} (R\times e_2)\,[(\delta\alpha\times R)\times e_2]\,\rho\, ds = 0, \qquad \forall \delta\alpha \in R^3$$

или

$$\int_{-l}^{l} xy\rho\, ds = \int_{-l}^{l} zy\rho\, ds = 0, \qquad R = (x(s), y(s), z(s)) \tag{3}$$

Соотношения (3) означают, что ось OY является главной осью инерции деформированного стержня в стационарном движении.

Полагая $\delta R = e_2$, получим из (2)

$$\int_{-l}^{l} \mu (R^2)^{-3/2} y\rho\, ds = 0 \tag{4}$$

Из условия (4) следует, что существует точка стержня, принадлежащая плоскости OXZ (функция $y(s)$ должна менять знак). Выберем ось OZ так, чтобы она проходила через эту точку. Тогда $R = Z^* e_3 + v(s) e$, где $v(s)$ – координата вдоль деформированного стержня, $s \in [-l, l]$ и $v(s^*) = 0$. Величина s^* соответствует точке стержня, лежащей на оси OZ, а Z^* – ее координата. Из соотношения (3) найдем

$$\int_{-l}^{l} xy\rho\, ds = \gamma_1\gamma_2 \int_{-l}^{l} v^2\rho\, ds = 0, \qquad e = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

Отсюда следует, что конфигурация стержня удовлетворяет либо условию $\gamma_1 = 0$ (стержень лежит в плоскости OYZ), либо условию $\gamma_2 = 0$ (стержень лежит в плоскости OXZ).

Найдем стационарные конфигурации деформированного стержня. Пусть центр масс стержня имеет координаты $R_0(0, Y, Z)$ и справедливы условия $|Y| \ll Z$, $l \ll Z$ $(Z > 0)$. Разложим измененную потенциальную энергию $W[R]$ в ряд по степеням Y/Z и v/Z $(v = s + u(s))$ и ограничимся в этом разложении членами до второго порядка малости включительно. Получим

$$W_2[Z, Y, e, v] = \frac{G^2}{2mZ^2}\left(1 - \frac{1-\gamma_2^2}{mZ^2}\int_{-l}^{l} \rho v^2\, ds\right) -$$
$$- \int_{-l}^{l} \frac{\mu\rho}{Z}\left(1 - \frac{Y^2+v^2}{2Z^2} + \frac{3\gamma_3^2 v^2}{2Z^2}\right) ds + \frac{a^2}{2}\int_{-l}^{l} (v'-1)^2\, ds, \qquad m = \int_{-l}^{l} \rho\, ds \tag{5}$$

Стационарные точки функционала (5) на многообразии

$$M = \left\{ (Z, Y, e, v) : Z, Y \in R^1,\ e \in S^2,\ v \in W_2^1([-l, l]),\ \int_{-l}^{l} v(s)\, ds = 0 \right\}$$

определяют стационарные конфигурации стержня. Решим задачу на условный экстремум W_2 на M. Имеем

$$\Phi[Z, Y, e, v] = W_2 + \lambda_1 \int_{-l}^{l} v\, ds + \frac{1}{2}\lambda_2 e^2$$

$$\Phi_Z = -\frac{G^2}{m}\left[\frac{1}{Z^3} - \frac{2(1-\gamma_2^2)}{mZ^5}\int_{-l}^{l} \rho v^2\, ds\right] + \tag{6}$$

$$+\int_{-l}^{l}\mu\rho\left[\frac{1}{Z^2}-\frac{3(Y^2+v^2)}{2Z^4}+\frac{9\gamma_3^2v^2}{2Z^4}\right]ds=0,\qquad \Phi_Y=\mu mZ^{-3}Y=0$$

$$\Phi_{\gamma_1}=\lambda_2\gamma_1=0,\qquad \Phi_{\gamma_2}=\lambda_2\gamma_2+G^2m^{-2}Z^{-4}\int_{-l}^{l}\rho v^2\,ds\,\gamma_2=0$$

$$\Phi_{\gamma_3}=\lambda_2\gamma_3-3\mu\rho Z^{-3}\int_{-l}^{l}v^2\,ds\,\gamma_3=0$$

$$\Phi_v=-G^2(1-\gamma_2^2)\rho m^{-2}Z^{-4}v+\mu\rho Z^{-3}(1-3\gamma_2^2)v-a^2v''+\lambda_1=0$$

Из соотношений (6) следует, что имеется три стационарных конфигурации, для которых $Y=0$ и

$$\gamma_1=1,\quad \gamma_2=\gamma_3=0,\quad \lambda_2=0,\quad \gamma_2=1,\quad \gamma_1=\gamma_3=0$$

$$\lambda_2=-G^2m^{-2}Z_2^{-4}\int_{-l}^{l}\rho v_2^2\,ds,\quad \gamma_3=1,\quad \gamma_1=\gamma_2=0,\quad \lambda_2=3\mu Z_3^{-3}\int_{-l}^{l}\rho v_3^2\,ds \tag{7}$$

Проинтегрируем последнее уравнение (6) по s от $-l$ до l и, учитывая граничные условия $v'(-l)=v'(l)=1$ (отсутствие внешних сил на концах стержня), получим $\lambda_1=0$.

В первом случае ($\gamma_1=1$) стержень расположен вдоль оси OX. Координата Z_1 и функция $v_1(s)$ удовлетворяют уравнениям

$$G^2m^{-1}Z_1^{-3}\left(1-2m^{-1}Z_1^{-2}\int_{-l}^{l}\rho v_1^2\,ds\right)-\int_{-l}^{l}\mu\rho Z_1^{-2}\left(1-\frac{3}{2}v_1^2Z_1^{-2}\right)ds=0$$

$$a^2v_1''=\mu\rho Z_1^{-3}v_1-G^2\rho m^{-2}Z_1^{-4}v_1 \tag{8}$$

Поскольку решение второго уравнения (8) должно удовлетворять граничным условиям $v_1'(-l)=v_1'(l)=1$, то функция $v_1(s)$ оказывается нечетной. Полагая $v(s)=s+u(s)$ и пренебрегая $u(s)$ по сравнению с s в правой части, придем к уравнению $u_1''=B_1s$, $B_1=a^{-2}(\mu\rho Z_1^{-3}-G^2\rho m^{-2}Z_1^{-4})$, решение которого имеет вид $u_1(s)=B_1(^1/_6s^3-{}^1/_2sl^2)$.

Величина Z_1 определяется из первого уравнения (8), в котором $v_1(s)$ можно принять равным s. Неучтенные при этом члены будут иметь более высокий порядок малости. Имеем

$$\mu mZ_1^{-2}(1-{}^1/_2l^2Z_1^{-2})=G^2m^{-1}Z_1^{-3}(1-{}^2/_3l^2Z_1^{-2}) \tag{9}$$

Приближенное решение уравнения (9) имеет вид $Z_1=Z_0+\Delta Z_1$, $Z_0=G^2\mu^{-1}m^{-2}$, $\Delta Z_1=-{}^1/_6l^2Z_0^{-1}$.

Значение измененной потенциальной энергии в стационарной точке при $\gamma_1=1$ будет равно

$$W_1\approx-\mu m/(2Z_0) \tag{10}$$

Во втором случае, когда $\gamma_2=1$, получим уравнения

$$\mu mZ_2^{-2}-G^2m^{-1}Z_2^{-3}-\frac{3}{2}\mu\rho Z_2^{-4}\int_{-l}^{l}v_2^2\,ds=0$$

$$a^2v_2''=\mu\rho Z_2^{-3}v_2$$

приближенные решения которых имеют вид

$$v_2=s+B_2(^1/_6s^3-{}^1/_2sl^2),\quad B_2=\mu\rho a^{-2}Z_2^{-3},\quad Z_2=Z_0+\Delta Z_2,\quad \Delta Z_2={}^1/_2l^2Z_0^{-1} \tag{11}$$

Измененная потенциальная энергия на решении (11) определяется выражением

$$W_2\approx-\frac{\mu m}{2Z_0}+\frac{\mu ml^2}{Z_0^3}\left(\frac{1}{6}+\frac{\mu ml}{30Z_0^3a^2}\right) \tag{12}$$

Для третьего решения (7) справедливы уравнения

$$\mu m Z_3^{-2}+3\mu\rho Z_3^{-4}\int_{-l}^{l} v_3^2\, ds-G^2m^{-1}Z_3^{-3}+2G^2m^{-2}Z_3^{-5}\rho\int_{-l}^{l} v_3^2\, ds=0$$

$$a^2v_3''=-(G^2m^{-2}Z_3^{-4}\rho+2\mu\rho Z_3^{-3})v_3$$

Аналогично первым двум случаям найдем

$$v_3=s+B_3({}^1/_6s^3-{}^1/_2sl^2),\quad B_3=-a^2\rho(G^2m^{-2}Z_3^{-4}-2\mu Z_3^{-3}),\quad Z_3=Z_0+\Delta Z_3$$

$$\Delta Z_3=-{}^5/_3l^2Z_0^{-1},\qquad W_3\approx-\frac{\mu m}{2Z_0}+\frac{\mu ml^2}{Z_0^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\mu ml}{10Z_0^3a^2}\right)\tag{13}$$

Величина $\mu mlZ_0^{-3}a^{-2}$, выражающая отношение гравитационной силы μmZ_0^{-3} и упругой силы $a^2Z_0l^{-1}$, предполагается много меньшей единицы. Тогда из сравнения выражений (10), (12) и (13) следуют неравенства $W_3<W_1<W_2$.

Покажем, что измененная потенциальная энергия в окрестности стационарных точек, отвечающих $\gamma_1=1$ и $\gamma_2=1$, может принимать отрицательные значения. Вторая вариация функционала Φ, когда варьируется только величина γ_3, имеет вид

$$\delta^2\Phi_1=-3\mu\rho Z_1^{-3}(\delta\gamma_3)^2\int_{-l}^{l} v_1^2\, ds$$

$$\delta^2\Phi_2=\left(\lambda_2-3\mu\rho Z_2^{-3}\int_{-l}^{l} v_2^2\, ds\right)(\delta\gamma_3)^2,\qquad \lambda_2=-G^2\rho m^{-2}Z_2^{-4}\int_{-l}^{l} v_2^2\, ds$$

Вариация $\delta^2\Phi_1$ соответствует решению с $\gamma_1=1$ и $\delta^2\Phi_1<0$, а вариация $\delta^2\Phi_2$ соответствует решению с $\gamma_2=1$ и $\delta^2\Phi_2<0$. Учитывая диссипацию энергии и соотношение (1), приходим к выводу, что стационарные решения с $\gamma_1=1$ и с $\gamma_2=1$ неустойчивы.

Стационарное вращение с $\gamma_3=1$ соответствует минимуму измененной потенциальной энергии и при наличии диссипативных сил асимптотически устойчиво [1]. В самом деле, вторая вариация функционала Φ на стационарном решении с $\gamma_3=1$ равна

$$\delta^2\Phi_3=a_{11}(\delta Z)^2+a_{22}(\delta Y)^2+a_{33}(\delta\gamma_1)^2+a_{44}(\delta\gamma_2)^2+a_{55}\int_{-l}^{l}(\delta v)^2\, ds+$$
$$+a^2\int_{-l}^{l}(\delta v')^2\, ds+a_{15}\delta Z\int_{-l}^{l} v_3\delta v\, ds\tag{14}$$

$$a_{11}=3G^2m^{-1}Z_3^{-4}-(10G^2m^{-2}Z_3^{-6}+12\mu Z_3^{-5})\rho\int_{-l}^{l} v_3^2\, ds-2\mu mZ_3^{-3}\approx\mu mZ_0^{-3}$$

$$a_{22}=\mu mZ_3^{-3},\qquad a_{33}=\lambda_2=3\mu\rho Z_3^{-3}\int_{-l}^{l} v_3^2\, ds,\qquad a_{44}=\lambda_2+G^2m^{-2}Z_3^{-4}\int_{-l}^{l}\rho v_3^2\, ds$$

$$a_{55}=-(G^2m^{-2}Z_3^{-4}+2\mu Z_3^{-3})\rho\approx-3\mu\rho Z_0^{-3},\qquad a_{15}=4G^2\rho m^{-2}Z_3^{-5}+6\mu\rho Z_3^{-4}\approx10\mu\rho Z_0^{-4}$$

Заметим, что для этого решения $\delta\gamma_3=0$. Поскольку коэффициенты a_{22}, a_{33}, a_{44} положительны, вариация (14) будет неотрицательна, если справедливо неравенство

$$a_{11}(\delta Z)^2+a_{15}\delta Z\int_{-l}^{l} v_3\delta v\, ds+a_{55}\int_{-l}^{l}(\delta v)^2ds+a^2\int_{-l}^{l}(\delta v')^2\, ds\geqslant c[(\delta Z)^2+\|\delta v\|_{2,1}^2],\quad c>0,$$
$$\|\delta v\|_{2,1}^2=\int_{-l}^{l}[(\delta v)^2+(\delta v')^2]ds\tag{15}$$

Воспользуемся неравенством

$$-a_{15}\int_{-l}^{l}(\delta Zv_3)\delta v\, ds\leqslant\frac{a_{15}}{2Z_0}\int_{-l}^{l} v_3^2\, ds(\delta Z)^2+\frac{Z_0a_{15}}{2}\int_{-l}^{l}(\delta v)^2\, ds$$

и заметим, что левая часть неравенства (15) больше выражения

$$b_{11}(\delta Z)^2 + \left(a_{55} - \frac{Z_0 a_{15}}{2}\right)\int_{-l}^{l} (\delta v)^2\, ds + a^2 \int_{-l}^{l} (\delta v')^2\, ds, \qquad b_{11} = a_{11} - \frac{a_{15}}{2Z_0}\int_{-l}^{l} v_3^2\, ds$$

Коэффициент $b_{11}>0$, и остается показать, что справедливо неравенство

$$a^2 \int_{-l}^{l} (\delta v')^2\, ds - b \int_{-l}^{l} (\delta v)^2\, ds \geqslant c_1 \|\delta v\|^2_{2,1}, \qquad c_1>0 \tag{16}$$

$$\text{при} \quad \int_{-l}^{l} \delta v\, ds = 0 \quad \text{и} \quad \delta v'(l) = \delta v'(-l) = 0$$

Здесь $b=8\mu\rho Z_0^{-3}$. Найдем стационарные точки квадратичного функционала $-{}^1/_2 \|w\|_{2,0}^2$ на сфере

$$S_1 = \{w : \|w\|_{2,1} = 1\} \quad \text{при} \quad \int_{-l}^{l} w\, ds = 0, \qquad w'(l) = w'(-l) = 0$$

Имеем

$$F[w] = -\frac{1}{2}\|w\|^2_{2,0} + \frac{1}{2}\varkappa \|w\|^2_{2,1} + \nu \int_{-l}^{l} w\, ds, \qquad \|w\|^2_{2,0} = \int_{-l}^{l} w^2\, ds$$

$$\delta F[w] = \int_{-l}^{l} [-\varkappa w'' + (\varkappa - 1) w + \nu]\delta w\, ds = 0$$

Стационарные точки функционала удовлетворяют уравнению

$$w'' + (1-\varkappa)\varkappa^{-1} w - \varkappa^{-1}\nu = 0 \tag{17}$$

Интегрирование уравнения (17) по s от $-l$ до l и учет граничных условий приводит к $\nu=0$. Решением уравнения (17) являются функции

$$\varphi_n = [l(\pi^2 n^2 l^{-2} + 1)]^{-1/2} \cos\frac{\pi n s}{l},$$

$$\psi_m = \left[l\left(\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi m}{l}\right)^2 + l \right]^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\frac{s}{l}$$

Стационарные значения функционала $-\|w\|_{2,0}^2$ на S_1 равны.

Минимум достигается при $m=0$ для функции ψ_0 и справедливо неравенство $-\|w\|^2_{2,0} \geqslant [\pi^2 (2l)^{-2} + 1]^{-1} \|w\|^2_{2,1}$. Представим левую часть неравенства (16) в виде

$$a^2 \|\delta v\|^2_{2,1} - (b+a^2)\|\delta v\|^2_{2,0} \geqslant \left(a^2 - \frac{a^2+b}{1+2^{-2}\pi^2 l^{-2}}\right)\|\delta v\|^2_{2,1}$$

Таким образом, неравенство (16) будет справедливо, если

$$a^2 Z_0 l^{-1} > 16 \mu m \pi^{-2} Z_0^{-2}$$

Величина $a^2 Z_0 l^{-1}$ есть упругая сила при деформации $Z_0 l^{-1}$, а $\mu m Z_0^{-2}$ – гравитационная сила. Справедливость неравенства (18) означает, что гравитационные силы не могут разорвать стержень. Следовательно, при выполнении условия (18) вторая вариация $\delta^2 \Phi_3$ неотрицательна.

Заметим, что почти все финитные движения вязкоупругого стержня будут иметь стационарное движение с $\gamma_3=1$ в качестве своего предельного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вильке В. Г.* О движении упругой планеты в центральном поле сил.– Космич. исследования, 1979, т. 17, № 3, с. 364–370.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных вращений.– ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, с. 922–933.

Москва

Поступила в редакцию 24.IV.1980