

УДК 534

## АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИЯХ

АЛИФОВ А. А.

В реальных физических системах часто генерируются колебательные процессы, обусловленные комбинациями свободных, вынужденных, параметрических колебаний и автоколебаний. Отмеченные процессы в изолированных случаях изучены в разного рода физических системах достаточно подробно (например, [1–10]). Менее исследованы комбинации вынужденных колебаний и параметрических колебаний (В+П), вынужденных колебаний и автоколебаний (В+А), параметрических колебаний и автоколебаний (П+А), вынужденных, параметрических колебаний и автоколебаний (В+П+А). Среди этих процессов смешанного характера более изученными являются соответственно вторая и первая комбинации [4–11]. Третья комбинация исследована в [12–14]<sup>1</sup>, а четвертая – в [15]. Однако все перечисленные комбинации рассмотрены (кроме [12]) при условии идеальности источника энергии, поддерживающего колебания – без учета динамики взаимодействия между колебательной системой и источником энергии. Стройная теория колебательных систем, содержащих неидеальные источники энергии в случаях, не охватывающих указанные комбинации, изложена в [16], где показано существенное влияние свойств источника на динамику колебательных процессов. Последовательное изучение второй и третьей комбинаций при учете свойств источника энергии проведено в [17–25]. Для исследования указанных комбинаций в основу была положена автоколебательная система, рассмотренная в [26, 27]. На этой же основе были изучены также свойства автоколебательной системы при случайном параметрическом возмущении и случайном трении [28–30]. Заметим, что в работах [17, 18, 20–23] рассмотрен случай, когда воздействия зависят от свойств источника энергии, а в работах [19, 24, 25] – когда не зависят. В публикуемой работе, являющейся продолжением названных исследований, рассматривается автоколебательная система, взаимодействующая с источником энергии и находящаяся под воздействием гармонического и параметрического возмущений. Выводятся общие соотношения и сначала анализируются частные случаи для получения предварительной информации в относительно простых ситуациях и ее использования в достаточно общем, сложном случае, а также сравнения результатов в тех или иных случаях. Рассматриваются неавтономная и автономная системы (под автономной понимается система, в которой все три механизма возбуждения колебаний зависят от свойств одного и того же самого источника энергии, а под неавтономной – система, в которой периодическое и параметрическое воздействия не зависят от свойств источника, поддерживающего автоколебания), показываются их общие и отличительные особенности. Анализ результатов, полученных при рассмотрении неавтономной и автономной систем, показывает, что при исследовании подобных систем следует тщательно установить, существует ли непосредственная связь между внешними воздействиями и автоколебательной системой.

1. При отсутствии внешних сил в автоколебательной системе устанавливаются автоколебания с частотой, равной собственной частоте системы. Наличие нелинейной упругой связи вносит некоторую поправку к этой частоте, вследствие чего частота автоколебаний становится зависимой от амплитуды колебаний. Изолированное действие возмущающих сил при определенных условиях приводит к захватыванию частоты автоколебаний частотами этих воздействий, причем условия захватывания могут быть

<sup>1</sup> См. также Фролов К. В. Об автоколебаниях механических систем с изменяющимися во времени параметрами в случае источника энергии ограниченной мощности: Аннот. докл. III Всес. съезда по теор. и прикл. механике. М.: Наука, 1968, с. 305.

различными, т. е. в системе возможны как гармоническое, так и различного порядка суб- и ультрагармонические типы захватывания колебаний. Такие колебания исследованы, например, в [8] на основе уравнения Ван-дер-Поля с вынуждающей гармонической силой. При воздействии на автоколебательную систему параметрического возмущения, как показано в [22–25], колебания в области гармонического захватывания (резонанса) могут быть выраженными сильнее, чем в области субгармонического захватывания второго порядка (основной параметрический резонанс), что зависит от параметров автоколебательной системы. При совместном действии на автоколебательную систему внешней гармонической силы и параметрического возмущения применение приведенного традиционного разделения захватываемых колебаний на гармоническое, суб- и ультрагармонические разных порядков в общем случае оказывается неприемлемым, что может быть обосновано следующими соображениями. Обозначим через  $\omega$  частоту автоколебаний,  $\nu_g$  — частоту гармонической силы,  $\nu$  — частоту параметрического возмущения и проведем анализ на примере основных резонансов. Если на автоколебательную систему действует только гармоническая сила, то при  $\omega \approx \nu_g$  имеет место главный резонанс (гармоническое захватывание). При воздействии только параметрического возмущения и  $\omega \approx \frac{1}{2}\nu$  возбуждается основной параметрический резонанс (субгармоническое захватывание второго порядка). Таким образом, в случае обоих воздействий и указанных соотношений частот, опираясь только на первый случай, следовало бы применить выражение «гармоническое захватывание», а на второй — «субгармоническое захватывание второго порядка». Однако неприемлемо ни то, ни другое, поскольку в таком динамическом режиме частота автоколебаний захватывается (синхронизируется) как частотой гармонического воздействия, так и половинной частотой параметрического возмущения, которые также синхронизируются между собой. В общем случае, при воздействии на автоколебательную систему лишь гармонической силы, захватывание может иметь место при  $\omega \approx (n_1/n_2)\nu_g$ , параметрического возмущения — при  $\omega \approx (m_1/m_2)\nu$ , где  $n_1, n_2, m_1$  и  $m_2$  — взаимно простые, целые (небольшие) числа. Отсюда следует, что при возникновении резонансных (захватываемых) колебаний, обусловленных одновременным выполнением обоих соотношений, удовлетворяется равенство  $\nu_g = j\nu$ ,  $j = m_1 n_2 / m_2 n_1$ , которое для определенности назовем «условием синхронности резонансных частот внешнего и параметрического воздействий» (кратко «условием синчастотности порядка  $j$ »), а соответствующий этому условию резонанс — синчастотным резонансом (захватыванием). Это позволяет отличить данный случай от случая, когда резонанс может наступать также при выполнении соотношения  $\omega \approx (n_1/n_2)\nu_g$  и одновременном невыполнении соотношения  $\omega \approx (m_1/m_2)\nu$  или наоборот. Смысл отмеченного «резонанса» состоит в том, что в таких случаях доминирующую роль в решении (оно непериодическое) играет резонирующая гармоника (например, от действия параметрического возмущения), на которую накладываются другие, малые по сравнению с ней, но искажающие периодичность решения, гармоники (например, гармоника от действия гармонической силы, частота которой значительно отличается от частоты  $\omega$ ). Такие «резонансы» могут быть достаточно хорошо заметными при значительном нарушении условия синчастотности. Если это условие нарушится незначительно, то влияния «резонирующих» гармоник от действия гармонического и параметрического возмущений могут быть соизмеримыми и в системе возникнут колебания с медленно меняющейся амплитудой, период модуляции которой определится величиной этого нарушения. Как было отмечено, использование терминологии «гармоническое, суб- и ультрагармоническое захватывание» в общем случае неприемлемо, несмотря на то, что может быть приемлемо в частных случаях; например, при  $j=1$ ,  $\omega \approx \nu_g$  имеют место гармонические захватывания от действия обоих возмущений. Поэтому для краткости в дальнейшем будут

применяться выражения вида, например, «резонанс  $\omega \approx \nu_g$ » или «захватывание  $\omega \approx \nu_g$ » без указания какого-либо типа захватывания. Следует отметить, что, за исключением условия синхронности порядка  $1/2$  ( $j=1/2$ ), построение приближенных аналитических решений, отражающих резонансы, достаточно трудно и громоздко (такие случаи легче исследовать на аналоговой вычислительной машине). Поэтому ниже будет изучен лишь случай, когда  $j=1/2$ . Случай синхронности первого порядка ( $j=1$ ) также изучен, однако в силу громоздкости построений здесь не приводится.

Уравнения движения неавтономной системы записываются в виде

$$\begin{aligned} x'' + \omega^2 x &= \varepsilon m^{-1} [\lambda \sin \nu_g t - bx \cos \nu t + T(U) - kx' - \vartheta \operatorname{sgn} x' - f(x)] = \\ &= F(x, x', \varphi, t), \quad \varphi'' = \varepsilon I^{-1} [M(\varphi) - rT(U)] \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр,  $\lambda$  и  $\nu_g$  — соответственно амплитуда и частота гармонической силы,  $b$  и  $\nu$  — глубина модуляции и частота параметрического возмущения; согласно указанному примем  $\nu_g = j\nu$ ,  $j=1/2$ .

В случае автономной системы первое уравнение (1.1) заменяется уравнением

$$x'' + \omega^2 x = \varepsilon m^{-1} [\lambda \sin j_1 \varphi - bx \cos j_2 \varphi + T(U) - kx' - \vartheta \operatorname{sgn} x' - f(x)] \quad (1.2)$$

где  $j_1$  и  $j_2$  — постоянные числа, указывающие на то, что частоты гармонического и параметрического возмущений в общем случае могут находиться в некоторых соотношениях с частотой  $\varphi$  источника энергии. Другие обозначения соответствуют принятым в [26].

Нетрудно видеть, что первое уравнение (1.1) и (1.2) могут быть связаны посредством некоторого простого соотношения. Действительно, поскольку при усреднении и отбрасывании малых величин  $\varphi = \Omega t$  ( $\Omega$  — среднее значение  $\varphi$ ), то имеем  $\nu = j_2 \Omega$  и  $j_1 = j j_2$ . Для дальнейшего исследования за основу будем принимать (1.1). В полученных при изучении (1.1) соотношениях заменой  $\nu \rightarrow j_2 \Omega$  или, что то же самое,  $\nu r \rightarrow j_2 u$  ( $u = r\Omega$ ) можно легко переходить к соотношениям, имеющим место для уравнения (1.2). Исключение составляют критерии устойчивости стационарных движений, которые для каждого случая будут приведены в отдельности. Однако, несмотря на простоту замены  $\nu \rightarrow j_2 \Omega$ , эффекты, имеющие место в неавтономной и автономной системах, существенно отличаются друг от друга, что обусловлено в основном взаимодействием колебательной системы и источника энергии.

Рассмотрим движения, которые могут быть описаны следующими решениями (1.1) в первом приближении:

$$x = a \cos \psi, \quad \varphi = \Omega (\psi = 1/2 \nu t + \xi) \quad (1.3)$$

Для определения переменной амплитуды  $a$ , фазы  $\xi$  колебаний и скорости  $\Omega$  источника энергии составляем, пользуясь [32], систему уравнений

$$a' = \varepsilon A_1(a, \xi, \Omega), \quad \xi' = \omega^{-1/2} \nu + \varepsilon B_1(a, \xi), \quad \Omega' = \varepsilon C_1(a, \Omega) \quad (1.4)$$

Определим функции, стоящие в правых частях (1.4), таким образом, чтобы можно было исследовать поведение системы как в области резонанса, где расстройка частот  $\omega^{-1/2} \nu$  имеет порядок малости  $\varepsilon$ , так и для близких подходов к этой области из нерезонансной зоны; эти функции могут быть найдены из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \omega - \frac{\nu}{2} \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + 2\omega A_1 &= - \frac{1}{\pi m} \int_0^{2\pi} F[a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \Omega, 2(\psi - \xi)] \times \\ &\times \sin \psi \, d\psi \end{aligned}$$

$$\left(\omega - \frac{v}{2}\right) \frac{\partial A_1}{\partial \xi} - 2a\omega B_1 = \frac{1}{\pi m} \int_0^{2\pi} F[a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \Omega, 2(\psi - \xi)] \cos \psi d\psi$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi I_0} \int_0^{2\pi} [M(\Omega) - rT(r\Omega + a\omega \sin \psi)] d\psi$$
(1.5)

Вычисляя интегралы, разыскивая затем решения первых двух уравнений (1.5) в виде

$$A_1(a, \xi, u) = A_{10}(a, u) + A_{11} \cos \xi + A_{12}(a) \sin 2\xi$$

$$B_1(a, \xi) = B_{10}(a) + B_{11}(a) \sin \xi + B_{12} \cos 2\xi$$

и опуская промежуточные выкладки, получим окончательно:  
в случае  $u \geq a\omega$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r}{I} \left[ M\left(\frac{u}{r}\right) - rT(u) - \frac{3}{2} r\alpha_3 q u a^2 \omega^2 \right]$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\omega m} \left[ \frac{4\theta}{\pi} + (k - \alpha_1 q + 3\alpha_3 q u^2) a \omega + \frac{3}{4} \alpha_3 q a^3 \omega^3 \right] -$$

$$-\frac{\lambda}{m(\omega + 1/2 v)} \cos \xi + \frac{ab}{2m v} \sin 2\xi$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega - \frac{v}{2} + \frac{G_1(a)}{\omega m a} + \frac{\lambda}{a m (\omega + 1/2 v)} \sin \xi + \frac{b}{2m v} \cos 2\xi$$
(1.6.1)

в случае  $u < a\omega$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r}{I} \left[ M\left(\frac{u}{r}\right) - rT(u) - \frac{3}{2} r\alpha_3 q u a^2 \omega^2 - \frac{r q}{\pi} (3\pi - 2\psi_2) \right]$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\omega m} \left[ \frac{4\theta}{\pi} + (k - \alpha_1 q + 3\alpha_3 q u^2) a \omega + \frac{3}{4} \alpha_3 q a^3 \omega^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{4q}{\pi a \omega} (a^2 \omega^2 - u^2)^{1/2} \right] - \frac{\lambda}{m(\omega + 1/2 v)} \cos \xi + \frac{ab}{2m v} \sin 2\xi$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega - \frac{v}{2} + \frac{G_1(a)}{\omega m a} + \frac{\lambda}{a m (\omega + 1/2 v)} \sin \xi + \frac{b}{2m v} \cos 2\xi$$
(1.6.2)

$$\psi_2 = 2\pi - \arcsin u(a\omega)^{-1}, \quad G_1(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi$$

Заметим, что усреднение функции  $T(U)$  при  $U < 0$  выполнено с помощью процедуры, описанной в [27].

Приближенное решение для координаты  $x$ , удовлетворяющее принятой аппроксимации (1.3), с учетом несимметрии осцилляции (увод средней линии колебаний) в режиме вынужденных колебаний записывается в виде

$$x = F_0 \omega^{-2} + a \cos \psi, \quad F_0 = \frac{1}{2\pi m} \int_0^{2\pi} F[a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \Omega, 2(\psi - \xi)] d\psi =$$

$$= \frac{1}{m} \left[ T(u) + \frac{3}{2} \alpha_3 q u a^2 \omega^2 - G_0(a) \right], \quad G_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) d\psi$$

Если нелинейная упругая связь представима в виде  $f(x) = \gamma_3 x^3 + \gamma_5 x^5$ , то с учетом  $x = a \cos \psi$  получим  $G_0(a) = 0$ ,  $G_1(a) = \beta_1(a)/2$ ,  $\beta_1(a) = 1/4 a^3 \times (3\gamma_3 + 5/2 \gamma_5 a^2)$ .

Уравнения (1.6) пригодны для исследования как стационарных, так и нестационарных процессов. Для изучения автономной системы в этих уравнениях следует произвести замену  $v \rightarrow j_2 u/r$ , что позволит проанализировать динамику системы в резонансной и нерезонансной областях. Если в этих уравнениях принять, что расстройка частот имеет порядок  $\varepsilon$ , то получим с точностью до величин первого порядка малости уравнения резонансных режимов. В случае, когда расстройка частот соответствует близким подходам к резонансной области, эти уравнения дают возможность исследовать почти-периодические режимы движения. Ввиду их достаточной сложности качественных результатов о свойствах почти-периодических процессов получить не удастся. Однако, основываясь на результатах работ [18, 19, 22, 24, 25], можно сказать, что и в данном случае с увеличением расстройки по частоте резонансные периодические режимы движения непрерывно переходят в почти-периодические, которые затем при достаточно больших расстройках уступают свое место нерезонансным режимам. Вообще говоря, при частотах, не соответствующих областям резонансов, в системе происходят почти-периодические колебания. Как показывает анализ комбинаций В+А и П+А [18, 19, 22, 24, 25], с увеличением расстройки частот уменьшаются почти период и глубина модуляции амплитуды. При весьма больших расстройках колебания практически имеют амплитуду автоколебаний (строго, имеет место почти-периодический режим, однако глубина модуляции амплитуды весьма мала). Можно предположить, что в комбинации В+П+А также будут иметь место аналогичные результаты.

Исследуем стационарные движения. Для анализа их устойчивости составим линеаризованные уравнения в вариациях системы (1.6) и пользуемся критериями Рауса — Гурвица.

2. Применительно к неавтономной системе предварительно рассмотрим частный вариант решения, который предполагает отсутствие в системе автоколебательного механизма возбуждения колебаний. Поскольку связь между колебательной системой и источником энергии осуществляется благодаря силе трения  $T(U)$ , вызывающей автоколебания, то при  $T(U) = 0$  эта связь исчезает и задача приобретает такой же характер, как при идеальном источнике энергии. Рассмотрение данного частного варианта преследует цель получения предварительной информации о свойствах колебательной системы, подверженной воздействию параметрического и периодического возмущений (комбинация В+П), что позволяет несколько упростить дальнейший анализ и определить совместный вклад этих возмущений в свойства исследуемой системы. Кроме того, этот частный вариант решения представляет самостоятельный интерес, поскольку встречается на практике часто.

Полагая, что сила трения, вызывающая автоколебания отсутствует, т. е.  $T(U) = 0$ , получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{4\phi}{\pi} + ka\omega + \frac{4\lambda\omega}{v+2\omega} \cos \xi - \frac{ba\omega}{v} \sin 2\xi &= 0 \\ \omega - \frac{v}{2} + \frac{\beta_1(a)}{2\omega ma} + \frac{1}{ma} \left( \frac{2\lambda}{v+2\omega} \sin \xi + \frac{ba}{2v} \cos 2\xi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим кратко решения системы (2.1) при различных комбинациях возмущающих сил, демпфирований и характеристик нелинейной восстанавливающей силы.

*Случай 1.*  $\lambda = \beta_1 = 0$ . Выражения для определения амплитуды и фазы колебаний имеют вид

$$a = \frac{4\theta v \{kv \pm [b^2 - v^2 m^2 (2\omega - v)^{1/2}]\}}{\pi \omega [b^2 - 4v^2 k^2 - v^2 m^2 (2\omega - v)^2]}$$

$$\operatorname{tg} 2\xi = -(ka\omega + 4\theta\pi^{-1}) / [a\omega m (2\omega - v)]$$

или с точностью до  $\varepsilon$  ( $v \approx 2\omega$ )

$$a = \frac{8\theta \{2\omega k \pm [b^2 - 4\omega^2 m^2 (2\omega - v)^2]^{1/2}\}}{\pi [b^2 - 16\omega^2 k^2 - 4\omega^2 m^2 (2\omega - v)^2]}$$

Отсюда следует, что  $a \rightarrow \infty$ , если  $v \rightarrow 2\omega \pm (2\omega m)^{-1} (b^2 - 16\omega^2 k^2)^{1/2}$ .

Для устойчивости полученных решений необходимо выполнение неравенств  $D_1 > 0$ ,  $D_2 > 0$ , где

$$D_1 = \frac{k}{2m} + \frac{1}{2\omega a m} \left( a\omega k + \frac{4\theta}{\pi} \right), \quad D_2 = -\frac{2\theta}{\pi \omega^2 a^2 m^2} \left( a\omega k + \frac{4\theta}{\pi} \right)$$

Поскольку второе из этих неравенств не выполняется, то стационарное решение неустойчиво; в зависимости от начальных условий возможны решения, как возрастающие во времени, так и убывающие.

*Случай 2.*  $b = \beta_1 = 0$ . Амплитуда и фаза колебаний определяются из соотношений

$$a = \frac{-(4\theta k / \pi) \pm \{ (4\theta k / \pi)^2 - [k^2 + m^2 (2\omega - v)^2] [(4\theta / \pi)^2 - 16\omega^2 \lambda^2 (v + 2\omega)^{-2}] \}^{1/2}}{\omega [k^2 + m^2 (2\omega - v)^2]}$$

$$\operatorname{tg} \xi = [\omega a m (2\omega - v)] / (a\omega k + 4\theta\pi^{-1})$$

Подкоренное выражение с точностью до  $\varepsilon$  ( $v \approx 2\omega$ ) может быть записано в виде

$$\left( \frac{4\theta}{\pi} k \right)^2 - [m^2 (2\omega - v)^2 + k^2] \left[ \left( \frac{4\theta}{\pi} \right)^2 - \lambda^2 \right]$$

Если  $\theta \geq 1/4\pi\lambda$  и подкоренное выражение положительно, то  $a \leq 0$ , что противоречит условию  $a > 0$ . Если  $\theta < 1/4\pi\lambda$ , то амплитуда положительна и ее зависимость от частоты  $v$  по форме идентична зависимости  $a(v)$  при  $\theta = 0$ . Устойчивость стационарных решений обеспечивается, если удовлетворяются неравенства  $D_1 > 0$ ,  $D_3 > 0$ ,

$$D_3 = \frac{k}{4a\omega m^2} \left( a\omega k + \frac{4\theta}{\pi} \right) \left( \omega - \frac{v}{2} \right)^2$$

Так как эти неравенства выполняются, то решение устойчиво. Таким образом, демпфер сухого трения либо препятствует возбуждению резонансных колебаний ( $\theta \geq 1/4\pi\lambda$ ), либо ограничивает возникшие колебания ( $\theta < 1/4\pi\lambda$ ).

*Случай 3.*  $\theta = k = 0$ . Из первого уравнения (2.1) следует

$$\left( \frac{2\lambda}{v + 2\omega} - \frac{ba}{v} \sin \xi \right) \cos \xi = 0$$

Когда  $\cos \xi = 0$ ,  $\xi = 1/2\pi, 3/2\pi$ , то с учетом  $\cos \pi = \cos 3\pi = -1$  из второго уравнения (2.1) имеем

$$5\gamma_5 a^5 + 6\gamma_3 a^3 + \left[ 16\omega m \left( \omega - \frac{v}{2} \right) - \frac{8b\omega}{v} \right] a + \frac{32\lambda\omega}{v + 2\omega} \operatorname{sgn} \sin \xi = 0$$

или с точностью до  $\varepsilon$

$$5\gamma_5 a^5 + 6\gamma_3 a^3 + [8\omega m(2\omega - \nu) - 4b]a + 8\lambda \operatorname{sgn} \sin \xi = 0 \quad (2.2)$$

Поскольку при указанных значениях фазы  $\sin \xi = \pm 1$ , то в этих уравнениях записан  $\operatorname{sgn} \sin \xi$ . Из (2.2) получим соотношение, совпадающее при  $\lambda = \gamma_5 = 0$  с точностью до  $\varepsilon$  с соотношением, выведенным в [4], которое доставляет для нижней границы резонансной зоны выражение  $\nu_- = 2\omega - b(2\omega m)^{-1}$ . При  $\lambda \neq 0$  и  $\gamma_3 = \gamma_5 = 0$  имеем

$$a = 2\lambda \operatorname{sgn} \sin \xi / [b - 2\omega m(2\omega - \nu)] \quad (2.3)$$

откуда следует, что  $a \rightarrow \infty$ , если  $\nu \rightarrow \nu_-$ , т. е. как при отсутствии вынуждающей силы, так и при ее действии параметрический резонанс возбуждается при одной и той же частоте. Это ясно также физически, поскольку, если при отсутствии гармонической силы и  $\nu \rightarrow \nu_-$  параметрический резонанс начинает самовозбуждаться, то при ее действии это возбуждение усиливается, так как при  $\nu = \nu_-$  в системе ( $b = 0$ ) происходят вынужденные колебания с амплитудой (начальным условием), отличной от нуля. Заметим, что формула (2.3) при  $b = 0$  и малой расстройке совпадает с точностью до  $\varepsilon$  с известным выражением амплитуды вынужденных колебаний.

Если  $\cos \xi \neq 0$ , то на основе решения уравнения

$$\frac{2\lambda}{\nu + 2\omega} - \frac{ba}{\nu} \sin \xi = 0$$

совместно со вторым уравнением (2.1) определяем амплитуду колебаний. Если  $\gamma_3 \neq 0$  и  $\gamma_5 = 0$ , то

$$a^2 = -\frac{8\omega m}{3\gamma_3} \left( \omega - \frac{\nu}{2} + \frac{b}{2\nu m} \right) \quad (2.4)$$

Формула (2.4) при соответствующих обозначениях совпадает с точностью до  $\varepsilon$  с формулой, полученной в [4]. Поэтому отметим лишь, что амплитуда обращается в нуль при частоте (верхняя граница резонансной зоны свободной параметрической системы)  $\nu_+ = 2\omega + b(2\omega m)^{-1}$ , которая определяет при соответствующих условиях правую границу резонансной зоны в комбинации П+А.

Амплитуда колебаний при  $\gamma_3 \neq 0$ ,  $\gamma_5 \neq 0$  определяется по формуле

$$a^2 = \frac{3\gamma_3}{5\gamma_5} \left\{ -1 \pm \left[ 1 - \frac{80\gamma_5 \omega m}{9\gamma_3^2} \left( \omega - \frac{\nu}{2} + \frac{b}{2\nu m} \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (2.5)$$

которая для тривиальной амплитуды доставляет частоту  $\nu_+$ . Сравнивая (2.4) и (2.5), находим, что первое ( $a_1^2$ ) и второе ( $a_2^2$ ) выражения связаны соотношением

$$a_2^2 = \frac{3\gamma_3}{5\gamma_5} \left[ -1 \pm \left( 1 + \frac{10\gamma_5}{3\gamma_3} a_1^2 \right)^{1/2} \right]$$

После разложения подкоренного выражения в ряд ( $10\gamma_5 a_1^2 / 3\gamma_3 \ll 1$ ) и удержания первых трех членов разложения будем иметь при знаке плюс перед корнем (решение со знаком минус не представляет интереса) приближенную формулу  $a_2^2 \approx a_1^2 (1 - 5\gamma_5 a_1^2 / 6\gamma_3)$ , которая показывает, что если  $\gamma_3 > 0$ , то при  $\gamma_5 > 0$  амплитуда колебаний уменьшается, а при  $\gamma_5 < 0$  — увеличивается; если  $\gamma_3 < 0$ , то при  $\gamma_5 > 0$  амплитуда увеличивается, а при  $\gamma_5 < 0$  — уменьшается по сравнению со случаем, когда  $\gamma_5 = 0$ .

*Случай 4.* Влияние демпфирования существенно усложняет анализ решения. В этом случае явных выражений для определения амплитуды колебаний в зависимости от частоты  $\nu$  получить не удастся. Чтобы вывести амплитудно-частотную зависимость, сначала из первого уравнения (2.1) определяем  $\cos \xi$ , затем, полагая во втором уравнении  $\cos 2\xi =$

$=1-2\sin^2\xi$ , получаем квадратное уравнение относительно  $\sin\xi$ . Используя далее формулу  $\sin^2\xi+\cos^2\xi=1$ , находим амплитудно-частотное уравнение системы в неявном виде

$$F^2(a) - (1-R_{1v}^2) \left( \frac{2b\omega a}{v} R_{1v} - \frac{4\omega\lambda}{v+2\omega} \right)^2 = 0 \quad (2.6)$$

а также выражение для определения фазы

$$\operatorname{tg}\xi = R_{1v} \left( \frac{2b\omega a}{v} R_{1v} - \frac{4\omega\lambda}{v+2\omega} \right) / (\omega ak + 4\theta\pi^{-1})$$

$$F(a) = \omega ak + 4\theta\pi^{-1}, \quad R_{1v}(a, v) = v(\lambda \pm \sqrt{R_{2v}}) / ba(v+2\omega)$$

$$R_{2v}(a, v) = \lambda^2 - \kappa_1 a^2 + \kappa_2 a^4 + \kappa_3 a^6, \quad \kappa_1 = \frac{8bm\omega^2\lambda^2}{v\rho^2} \left( v - 2\omega - \frac{b}{vm} \right)$$

$$\kappa_2 = 6\gamma_3\omega b\lambda^2 / v\rho^2, \quad \kappa_3 = 5\gamma_5\omega b\lambda^2 / v\rho^2, \quad \rho = 4\omega\lambda(v+2\omega)^{-1}$$

Если найденная из (2.6) амплитуда соответствует положительному знаку перед корнем в выражении  $R_{1v}(a, v)$ , то для определения фазы функция  $R_{1v}(a, v)$  берется с положительным знаком перед корнем, если отрицательному — отрицательным. Следует отметить, что уравнение (2.6) при помощи алгебраических преобразований можно привести к канонической форме относительно амплитуды. Однако процедура приведения сопряжена с громоздкими и трудоемкими выкладками. С другой стороны, поскольку (2.6) иррациональное, то при приведении его к каноническому виду преобразованное уравнение может содержать лишние корни, не удовлетворяющие исходному уравнению, что требует дополнительной проверки путем подстановки их в (2.6). Из (2.6) видно, что порядок уравнения в канонической форме будет достаточно высоким. Поэтому в том или другом случае вычисления выполнимы при помощи ЦВМ. Корни определяются при выполнении условия  $R_{2v} \geq 0$ .

Рассмотрим устойчивость полученных решений на основании характеристического уравнения

$$\lambda^{\circ} + D_4\lambda^{\circ} + D_5 = 0, \quad D_4 = \frac{1}{2ma\omega} \left( 2ka\omega + \frac{4\theta}{\pi} \right) \quad (2.7)$$

$$D_5 = \frac{1}{m^2} \left( \frac{2bR_{1v}}{v} \cos\xi - k \right) \left[ \frac{\lambda \cos\xi}{a(2\omega+v)} - \frac{bR_{1v}}{v} \cos\xi \right] -$$

$$- \frac{1}{m^2} \left[ \frac{2\lambda R_{1v}}{2\omega+v} + \frac{ab}{v} (1-2R_{1v}^2) \right] \left[ \frac{a(3\gamma_3+5\gamma_5a^2)}{4\omega} - \frac{2\lambda R_{1v}}{a^2(2\omega+v)} \right]$$

$$\cos\xi = (ka\omega + 4\theta\pi^{-1}) \left( \frac{2b\omega a}{v} R_{1v} - \frac{4\omega\lambda}{v+2\omega} \right)^{-1}$$

Чтобы корни (2.7) имели отрицательные действительные части, необходимо выполнение неравенств  $D_4 > 0$  и  $D_5 > 0$ , из которых первое выполняется всегда, поскольку по условию  $a > 0$ ,  $k > 0$  и  $\theta > 0$ . Качественный анализ второго неравенства в общем случае достаточно сложен. При  $\theta = \gamma_5 = 0$  второе условие упрощается и с учетом (2.1) записывается в виде

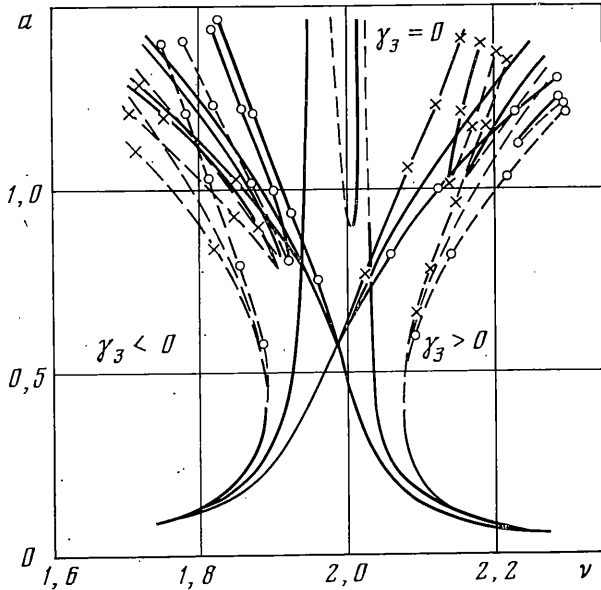
$$k^2 - \frac{b^2}{v^2} + 4m^2 \left( \omega - \frac{v}{2} \right)^2 + \frac{3\gamma_3 a}{\omega} \left[ 3ma \left( \omega - \frac{v}{2} \right) + \frac{15\gamma_3 a^3}{16\omega} + \frac{2\lambda R_{1v}}{v+2\omega} \right] > 0$$

откуда следует, что если  $\gamma_3 = 0$  и  $k^2 - b^2v^{-2} + m^2(2\omega - v)^2 > 0$ , то состояние равновесия устойчиво.



Зависимость амплитуды колебаний от частоты для различных характеристик нелинейной восстанавливающей силы представлена на фиг. 1. Вычисления проводились при значениях  $\omega$ ,  $b$  и  $k$ , приведенных в [21], а также  $\lambda \approx 0,2$  Н. Сплошными линиями показаны устойчивые участки, штриховыми — неустойчивые. Линии с крестиками при  $\gamma_3 \approx \pm 2$  Н·см<sup>-3</sup> соответствуют  $\gamma_5 \approx -0,2$  Н·см<sup>-5</sup>, с кружками —  $\gamma_5 \approx 0,2$  Н·см<sup>-5</sup>, без них —  $\gamma_5 = 0$ .

Рассмотрение стационарных режимов движения системы при наличии всех механизмов возбуждения колебаний приводит к следующим зависи-



Фиг. 1

ностям для определения амплитуды и фазы колебаний:

$$F_{11}^2(a, u) - (1 - R_{1v}^2) \left( \frac{2b\omega a}{v} R_{1v} - \frac{4\omega\lambda}{v+2\omega} \right)^2 = 0 \quad (2.8)$$

$$\operatorname{tg} \xi = R_{1v} \left( \frac{2b\omega a}{v} R_{1v} - \frac{4\omega\lambda}{v+2\omega} \right) / F_{11}(a, u)$$

$$F_{11}(a, u) = \sqrt[3]{\alpha_3 q [a^3 \omega^3 - 4(u_0^2 - u^2) a \omega + B]}$$

$$u_0^2 = (\alpha_1 q - k) / 3\alpha_3 q, \quad B = 16\delta / 3\alpha_3 q \lambda$$

Выражение функции  $R_{1v}(a, v)$  приведено в случае 4. При  $T(U) \equiv 0$  первое соотношение (2.8) совпадает с уравнением (2.6). Решения амплитудного уравнения (2.8) находятся для различных фиксированных значений скорости  $u$ . Для определения установившихся значений амплитуды при  $u < a\omega$  имеем то же самое уравнение (2.8) лишь с той разницей, что функция  $F_{11}^2(a, u)$  заменяется функцией

$$[F_{11}(a, u) + 4(a\omega\lambda)^{-1}(a^2\omega^2 - u^2)^{1/2}]^2 \quad (2.9)$$

Возможность использования функции (2.9) ограничена неравенством  $a\omega \geq u$ , что следует из условия ее вещественности. Для проведения расчетов на основе (2.9) начальное значение амплитуды выбирается из равенства  $a\omega = u$ . Вычисления на ЦВМ показали, что при  $u < a\omega$  корень амплитудного уравнения (2.8) с учетом (2.9) соответствует приближенному равенству  $a\omega \approx u$  и практически не зависит от частоты  $v$ . Это дало основание ограничиться при  $u < a\omega$  приближенной формулой  $a\omega \approx u$  и в дальнейших расчетах не пользоваться выражением (2.9).

Устойчивость установившихся движений обеспечивается выполнением неравенств

$$D_6 > 0, \quad D_8 > 0, \quad D_6 D_7 - D_8 > 0 \quad (2.10)$$

$$D_6 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$$

$$D_7 = b_{11} b_{33} + b_{11} b_{22} + b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21}$$

$$D_8 = b_{11} b_{23} b_{32} + b_{12} b_{21} b_{33} - b_{11} b_{22} b_{33} - b_{12} b_{23} b_{31}$$

Коэффициенты, входящие в выражения  $D_6$ ,  $D_7$  и  $D_8$ , в случае  $u \geq a\omega$  определяются так:

$$b_{11} = rI^{-1} [N - rq(3\alpha_3 u^2 - \alpha_1) - {}^3/2 r\alpha_3 q \omega^2 a^2]$$

$$b_{21} = -3m^{-1} \alpha_3 q u a, \quad b_{31} = 0, \quad b_{12} = -3I^{-1} r^2 \alpha_3 q u \omega^2 a \quad (2.11)$$

$$b_{22} = -(2m)^{-1} ({}^9/4 \alpha_3 q \omega^2 a^2 + k - \alpha_1 q + 3\alpha_3 q u^2) + bR_{1v} (m\nu)^{-1} \cos \xi$$

$$b_{32} = \frac{a}{4\omega m} (3\gamma_3 + 5\gamma_5 a^2) - \frac{2\lambda R_{1v}}{ma^2(2\omega + \nu)}$$

$$b_{23} = \frac{2\lambda R_{1v}}{m(2\omega + \nu)} + \frac{ab}{m\nu} (1 - 2R_{1v}^2)$$

$$b_{33} = \frac{2\lambda}{am(2\omega + \nu)} \cos \xi - \frac{2bR_{1v}}{m\nu} \cos \xi$$

$$N = \frac{d}{du} M \left( \frac{u}{r} \right), \quad \cos \xi = F_{11}(a, u) / \left( \frac{2b\omega a}{\nu} R_{1v} - \frac{4\omega\lambda}{\nu + 2\omega} \right)$$

Если  $u < a\omega$ , то

$$b_{11} = \frac{r}{I} \left[ N - rq(3\alpha_3 u^2 - \alpha_1) - \frac{3}{2} r\alpha_3 q \omega^2 a^2 - \frac{2rq}{\pi(a^2\omega^2 - u^2)^{1/2}} \right]$$

$$b_{21} = -\frac{3}{m} \alpha_3 q u a + \frac{2qu}{\pi m a \omega^2 (a^2\omega^2 - u^2)^{1/2}}$$

$$b_{12} = -\frac{3}{I} r^2 \alpha_3 q u a \omega^2 + \frac{2qu r^2}{\pi I a (a^2\omega^2 - u^2)^{1/2}} \quad (2.12)$$

$$b_{22} = -\frac{1}{2m} \left( \frac{9}{4} \alpha_3 q \omega^2 a^2 + k - \alpha_1 q + 3\alpha_3 q u^2 \right) +$$

$$+ \frac{bR_{1v}}{m\nu} \cos \xi - \frac{2qu^2}{\pi m a^2 \omega^2 (a^2\omega^2 - u^2)^{1/2}}$$

а  $b_{23}$ ,  $b_{32}$  и  $b_{33}$  находятся из (2.11).

При расчетах устойчивости необходимо учитывать соответствие между амплитудой и знаком корня в выражении функции  $R_{1v}(a, \nu)$ .

Если построены характеристики нагрузки, определяемые выражениями

$$S_+(u, \nu_\Phi) = rT(u) + {}^3/2 r\alpha_3 q u \omega^2 a^2 \quad \text{при } u \geq a\omega \quad (2.13)$$

$$S_-(u) \approx rT(u) + {}^3/2 r\alpha_3 q u^3 \quad \text{при } u < a\omega$$

то наглядную информацию доставляют геометрические критерии устойчивости

$$\Phi_\nu \frac{d}{du} \left[ M \left( \frac{u}{r} \right) - S_+(u, \nu_\Phi) \right] < 0 \quad \text{при } u \geq a\omega \quad (2.14)$$

$$(b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32}) \frac{d}{du} \left[ M \left( \frac{u}{r} \right) - S_-(u) \right] < 0 \quad \text{при } u < a\omega$$

$$\Phi_v = \frac{1}{4m^2\omega^2 a^2} \left\{ F_{11}^2 + 2F_{11} \left( \frac{3}{2} \alpha_3 q \omega^3 a^3 - \frac{4\theta}{\pi} \right) \left[ 1 + \frac{2\omega\lambda}{v+2\omega} \left( \frac{2b\omega a}{v} R_{1v} - \frac{4\omega\lambda}{v+2\omega} \right)^{-1} \right] \right\} + \frac{1}{a^2\omega^2} \left\{ \frac{a^3}{2\omega} (3\gamma_3 + 5\gamma_5 a^2) \left[ \frac{\beta_1}{2\omega} + ma \left( \omega - \frac{v}{2} \right) + \frac{\lambda R_{1v}}{v+2\omega} \right] + \left[ \frac{\beta_1}{2\omega} + ma \left( \omega - \frac{v}{2} \right) \right]^2 \right\} - \frac{b^2}{4v^2 m^2}$$

которые эквивалентны второму условию (2.11). Выполнение этих критериев в основном может обеспечить устойчивость стационарных движений. Значения скорости  $u$ , соответствующие стационарным движениям, определяются точками пересечения графиков характеристик  $M(u/r)$  и  $S(u)$ . Эквивалентный критерий в случае  $u < a\omega$  с учетом приближенного равенства  $a\omega \approx u$  представляется в виде

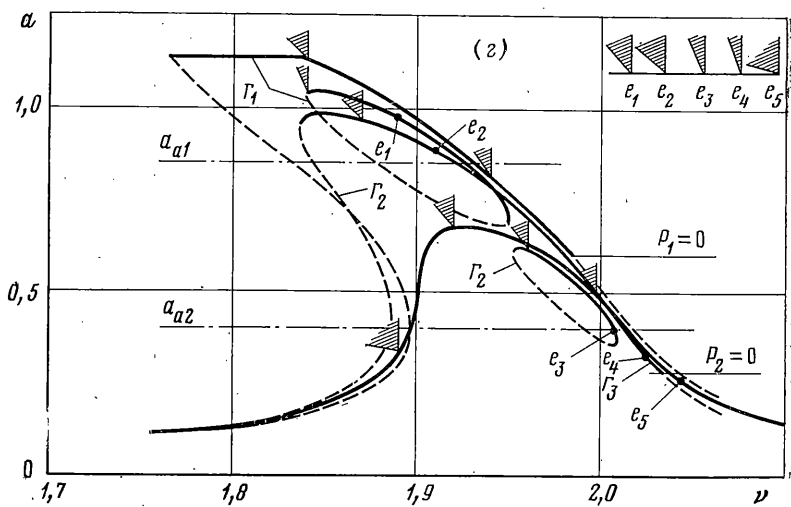
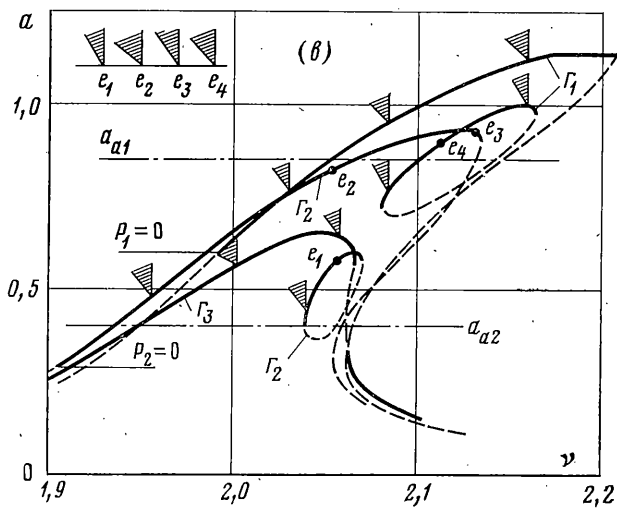
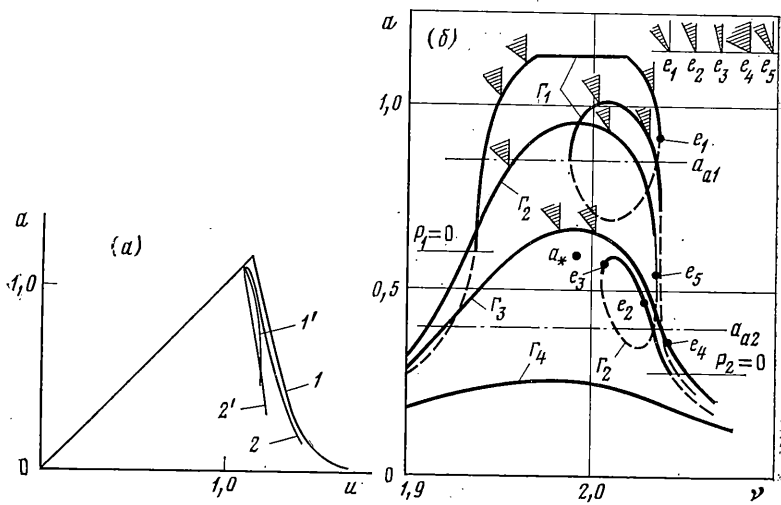
$$\frac{d}{du} \left[ M \left( \frac{u}{r} \right) - S_-(u) \right] < 0 \quad (2.15)$$

Заметим, что неравенство  $\Phi_v > 0$  вместе с неравенством

$$P = 4a\omega [a^2\omega^2 - 2(u_0^2 - u^2)] + B > 0 \quad (2.16)$$

определяет устойчивость движения системы с идеальным источником энергии. Если  $\theta = 0$  ( $B = 0$ ), то из (2.16) следует, что устойчивыми могут быть лишь амплитуды, подчиняющиеся условию  $a^2 >^{1/2} a_a^2$ , где  $a_a^2 = 4\omega^{-2}(u_0^2 - u^2)$  — амплитуда автоколебаний. Интересно, что условие (2.16) имеет место также в комбинациях В+А и П+А как в случае автономных, так и неавтономных систем. Видимо, данное условие является достаточно общим (фундаментальным), поскольку, например, в работах [8, 9, 13–15] при исследовании генератора Ван-дер-Поля с гармоническим и параметрическим воздействиями тоже получено условие  $a^2 >^{1/2} a_a^2$ , т. е. следует вывод: «для устойчивости резонансных колебаний необходимо, чтобы квадрат амплитуды этих колебаний был больше половины квадрата амплитуды автоколебаний». Это условие, вероятно, обусловлено природой автоколебательных систем. Данный результат имеет важное значение для практических применений. Следует отметить, что анализ неравенства  $\Phi_v > 0$  даже в относительно простом случае, когда  $\theta = \gamma_3 = \gamma_5 = 0$ , весьма затруднителен. Решая уравнения  $P = 0$ ,  $\Phi_v = 0$ , можно определить в плоскости  $(a, v)$  границы областей устойчивости.

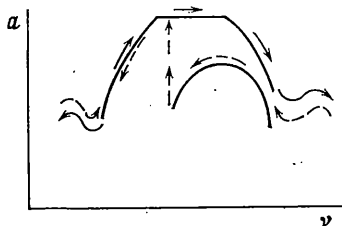
Сечения амплитудно-частотно-скоростного поля системы  $a(v, u)$  при различных  $v = \text{const}$ ,  $u = \text{const}$  ( $\theta = \gamma_5 = 0$ ) представлены на фиг. 2. Для расчетов использованы параметры, приведенные в [21], и дополнительно  $\lambda \approx 0,2$  Н [19],  $\gamma_3 = 0$  (фиг. 2, а, б),  $\gamma_3 \approx 2$  Н·см<sup>-3</sup> (фиг. 2, в),  $\gamma_3 \approx -2$  Н·см<sup>-3</sup> (фиг. 2, г). Размерности отложенных на координатных осях величин следующие:  $a$  [см],  $u$  [см·с<sup>-1</sup>],  $v$  [с<sup>-1</sup>]. На фиг. 2, а кривые 1 и 1' соответствуют  $v = 2,0$ , кривые 2 и 2' —  $v = 2,03$  (неустойчивые участки этих кривых не показаны). Жирными сплошными линиями представлены устойчивые участки амплитудных кривых, штриховыми — неустойчивые (для краткости на амплитудных кривых нанесены также заштрихованные секторы для крутизны  $N$  характеристики источника  $M(u/r)$ , в пределах которых имеет место устойчивость; на самом деле эти секторы должны быть указаны на кривой нагрузки  $S(u, v_\Phi)$ ), тонкими сплошными линиями — участки, которые устойчивы при неидеальном (в пределах определенных секторов, аналогичных показанным для точек  $e_1$  и  $e_5$ ) и неустойчивы при идеальном источнике энергии. Кривые  $\Gamma_1$  соответствуют  $u = 1,14$ , кривые  $\Gamma_2$  —  $u = 1,2$ , кривая  $\Gamma_3$  —  $u = 1,26$ , кривая  $\Gamma_4$  —  $u = 1,35$ , штрихпунктирные линии — амплитудам ( $a_{a1}$  при  $u = 1,14$ ,  $a_{a2}$  при  $u = 1,2$ ) автоколебаний. Линии  $P_1 = 0$  ( $u = 1,14$ ) и  $P_2 = 0$  ( $u = 1,2$ ) нанесены на основании соотношения (2.16) при  $P = 0$ . В зависимости от изменения параметра  $\Phi$  ( $u = \text{const}$ ) происходит изменение резонансной кривой и при некотором значении его получается однозначное решение (на фиг. 2, б точка  $a_*$  соответствует  $\Phi_* \approx 0,0402$  при  $u = 1,14$ ). Как видно, при частотах, когда существуют несколько решений, два решения устойчивы, а другие — неустойчивы (неустойчивы также тривиальные решения, которые не показаны). Таким образом, совместное влияние периодического и параметрического возмущений



Фиг. 2

приводит к тому, что в резонансной области появляются два резонансных устойчивых решения, реализация которых зависит от начальных условий, определяемых областями притягивания к соответствующим решениям [31].

В системе возможно проявление нестационарных переходов, обусловленных квазистационарным изменением либо частоты  $\nu$ , либо скорости  $u$ ; существуют также ситуации, когда нестационарные переходы могут осуществляться при одновременном изменении и частоты, и скорости. Протекания этих переходов в случае идеального источника энергии и неидеального источника весьма различны. На фиг. 3 показан ( $\theta = \gamma_3 = \gamma_5 = 0$ ), например, случай, когда  $u = \text{const}$  (идеальный источник энергии) и изменяется частота; сплошные стрелки соответствуют увеличению  $\nu$ , штриховые — уменьшению, волнообразные стрелки представляют переход к почти-периодическим колебаниям. На фиг. 4, а показан случай, когда  $\nu = \text{const}$  и изменяется характеристика источника энергии, т. е. скорость  $u$ . При пологих характеристиках типа  $M_1$  и увеличении скорости  $u$  нестационарные переходы происходят сначала из точки  $E_1$  в точку  $Q_1$ , затем — из точки  $E_2$  в точку  $Q_2$ , при уменьшении скорости — из точки  $E_3$  в точку  $Q_4$ , поскольку при достаточно пологих характеристиках точка  $Q_3$  неустойчивая (качественно подобные явления имеют место при автоколебаниях, а также при комбинациях В+А и П+А). При крутых характеристиках типа  $M_2$

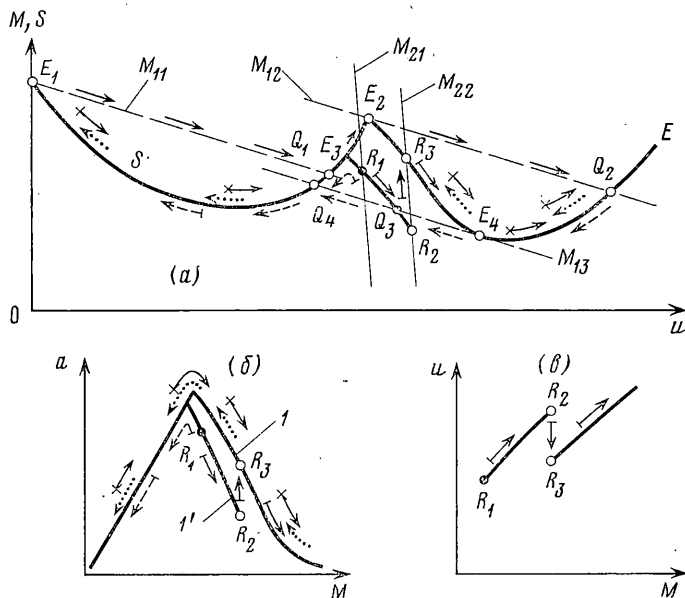


Фиг. 3

могут быть в зависимости от начальных условий два случая: переходы отсутствуют, и как при увеличении (стрелки с крестиками), так и при уменьшении (пунктирные стрелки) скорости  $u$  реализуются большие амплитуды (ветвь  $E_2E$ , кривая 1 на фиг. 4, б); если при пологих характеристиках  $M_{21}$  в системе реализован режим с малой амплитудой, соответствующей точке  $R_1$  (ветвь  $E_3R_2$ , кривая 1' на фиг. 4, б), то при увеличении скорости (сплошные стрелки с чертой) переход осуществляется из точки  $R_2$  в точку  $R_3$  (скорость  $u$  уменьшится и, чем круче  $M$ , тем в меньшей степени это уменьшение будет заметным (фиг. 4, в)); при уменьшении скорости (штриховые стрелки с чертой) переход отсутствует<sup>2</sup>. Заметим, что в зависимости от выбранной частоты  $\nu = \text{const}$  переходы могут осуществляться по-разному, поскольку резонансные области при различных  $u = \text{const}$  включают в общем случае различные множества частоты  $\nu$  (множество  $\nu$  при одной  $u_1 = \text{const}$  может быть подмножеством  $\nu$  при другой  $u_2 = \text{const}$ ). При этом существуют такие случаи, когда при  $\nu = \text{const}$  и квазистационарном управлении характеристикой источника энергии в системе сначала генерируются резонансные колебания, которые по мере изменения  $\nu$  уступают свое место почти-периодическим колебаниям, и наоборот. Если источник энергии неидеален и изменяется частота  $\nu$ , то осуществление нестационарных переходов принципиально отличается от показанного на фиг. 3, т. е. когда источник энергии идеален. Однако этот случай имеет некоторые особенности, присущие случаю, представленному на фиг. 4 (пологие характеристики). С целью анализа обратимся к фиг. 5, на которой для простоты схематически показано изменение зависимостей  $a(\nu)$ ,  $u(\nu)$  (фиг. 5, а, б), некоторое фиксированное (неизменное) положение характеристики источника энергии  $M_1$  и кривые нагрузки  $S(u, \nu)$  (фиг. 5, в). Пусть кривая  $S_-$  соответствует частоте  $\nu_-$ , кривая  $S_m$  — частоте  $\nu_m$ , кривая  $S_+$  — частоте  $\nu_+$  и начальное состояние системы характеризуется изображающей точкой  $E_-$ . Тогда при квазистационарном увеличении частоты кривая нагрузки начнет квазистационарно изменяться в направлении к  $S_m$  (при изменении частоты изменяется амплитуда и как следствие нагрузка согласно (2.13), однако изменение нагрузки для  $u < a\omega$  и  $u \geq a\omega$  происходит неодинаково; для  $u < a\omega$  нагрузка изменяется вдоль линии  $E_3E_m$ , для  $u \geq a\omega$  — в целом), а изображающая точка — в направлении к точке  $E_4$  вдоль характеристики  $M_1$ . Когда частота достигнет значения  $\nu_1$  и кривая нагрузки займет положение  $S_1$ , из точки  $E_4$  осуществится переход (сплошные стрелки) в новое состояние, характеризуемое точкой  $E_2$  (амплитуда скачком увеличится, скорость  $u$  уменьшится, фиг. 5, а, б). Последующее изменение частоты приведет к тому, что при  $\nu = \nu_m$  кривая нагрузки займет положение  $S_m$ , откуда начнется ее движение в обратном направлении при дальнейшем увеличении  $\nu$ . Затем при  $\nu = \nu_2$  (кривая  $S_2$ ) совершится переход (штриховые стрелки) из

<sup>2</sup> Это же явление имеет место в случае идеального источника энергии (характеристика  $M$  вертикальна).

точки  $E_3$  в точку  $E_4$  (амплитуда скачком уменьшится, скорость  $u$  увеличится, фиг. 5, а, б), после чего по мере увеличения  $\nu$  кривая нагрузки продолжит движение в сторону кривой  $S_+$ , а изображающая точка — точки  $E_+$ . Аналогичные эффекты будут наблюдаться также при уменьшении частоты. Следует отметить, что эти явления могут происходить только тогда, когда характеристика источника энергии окажется пологой и расположится внутри области, ограниченной положениями характеристики  $M_i$  и  $M_s$ . При изменении  $\nu$  и положении характеристики, например  $M_2$ , изображающая точка будет двигаться на участке  $E_1E_6$  вдоль характеристики прямо и обратно, а в системе будут генерироваться динамические состояния, соответствующие движению изображающей точки; может быть также случай, когда система из точки типа  $E_4$  совершит переход в точку типа  $E_3$  и останется там, не осуществляя переход в точку типа  $E_5$ . При граничных характеристиках переходы могут и осуществляться и не осуществляться. Это зависит от величин случайных



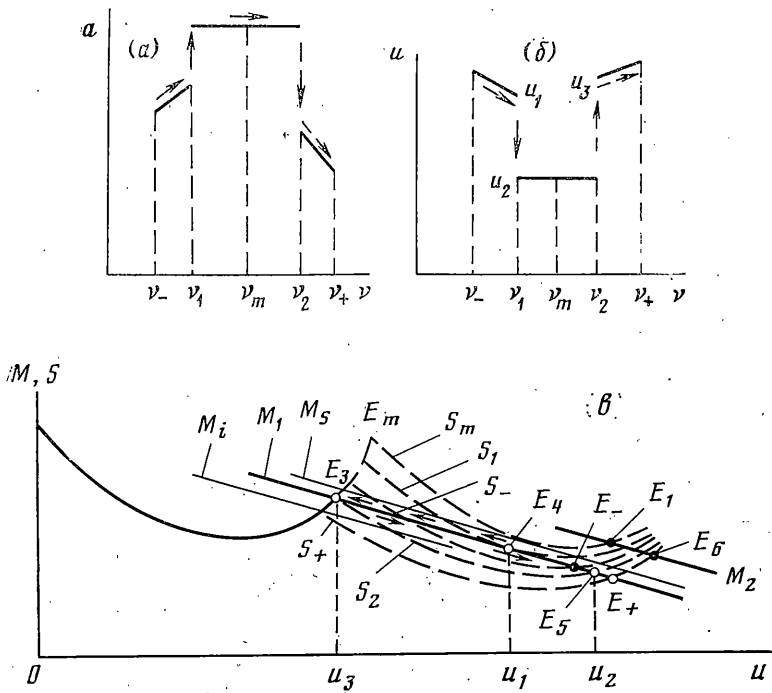
Фиг. 4.

возмущений, которые могут привести как к отрыву кривой  $S(u, \nu)$  от кривой  $M(u/r)$ , так и его отсутствию. Заметим, что поскольку ширина зоны захватывания по частоте  $\nu$  при различных  $u$  различна, то при изменении  $\nu$  периодические колебания могут переходить в почти-периодические и наоборот (как непрерывно, так и скачкообразно). Если одновременно изменяются частота  $\nu$  и скорость  $u$ , то протекание переходов будет определяться соотношением скоростей изменения их. При  $\dot{\nu} \neq 0$ ,  $\dot{u} \neq 0$  проявятся подобные эффекты<sup>3</sup>.

Отметим, наконец, что амплитудная кривая может принимать множество форм, определяемых параметрами системы (для краткости не приводятся).

3. Для изучения автономной системы пользуемся соотношениями (1.6), (2.8) и (2.9), однако всюду вместо  $\nu$  подставляется  $j_2 u/r$ . При  $u < a\omega$  стационарные амплитуды определяются приближенным выражением  $a\omega \approx u$ . Уместно отметить, что данная приближенная зависимость имеет место также при автоколебаниях [27], при комбинациях В+А [17–19], П+А [20–25] как для автономных, так и неавтономных систем; решение, определяемое этим равенством, устойчиво при идеальном источнике энергии всегда, а при неидеальном источнике — в случае выполнения неравенства (2.15). Однако она справедлива тогда, когда внешние силы малы, что требуется для применения приближенного аналитического метода. Если внешние воздействия имеют большой уровень, то целесообразно использование ЭВМ (в работах [18, 22, 25] приведены границы применимости выражения  $a\omega \approx u$ , определенные с помощью АВМ).

<sup>3</sup> Аналогичные явления имеют место в комбинациях В+А и П+А.



Фиг. 5

Для устойчивости стационарных движений необходимо выполнение условий (2.10). При  $u \geq a\omega$  имеем

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= rI^{-1} [N - rq(3\alpha_3 u^2 - \alpha_1) - \frac{3}{2} \alpha_3 q \omega^2 a^2] \\
 b_{21} &= -\frac{3}{m} \alpha_3 q u a + \frac{\lambda j_2 \cos \xi}{2mr(\omega + j_2 u/2r)^2} - \frac{abr \sin 2\xi}{2mj_2 u^2} \\
 b_{31} &= -\frac{j_2}{2r} - \frac{\lambda j_2 \sin \xi}{2mra(\omega + j_2 u/2r)^2} - \frac{br \cos 2\xi}{2mj_2 u^2} \\
 b_{12} &= -\frac{r^2}{I} 3\alpha_3 q u a \omega^2 \\
 b_{22} &= -\frac{1}{2m} \left( \frac{9}{4} \alpha_3 q \omega^2 a^2 + k - \alpha_1 q + 3\alpha_3 q u^2 \right) + \frac{br}{2mj_2 u} \sin 2\xi \\
 b_{32} &= \frac{a}{4\omega m} (3\gamma_3 + 5\gamma_5 a^2) - \frac{\lambda \sin \xi}{a^2 m (\omega + j_2 u/2r)} \\
 b_{23} &= \frac{\lambda \sin \xi}{m(\omega + j_2 u/2r)} + \frac{abr}{mj_2 u} \cos 2\xi \\
 b_{33} &= \frac{\lambda \cos \xi}{am(\omega + j_2 u/2r)} - \frac{br}{mj_2 u} \sin 2\xi
 \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты  $b_{21}$  и  $b_{31}$  вычислены с учетом того, что знаменатели дробей, входящих в выражения этих коэффициентов, зависят от  $u$ . Поскольку в области резонанса  $\omega \approx j_2 u/2r$ , то при такой приближенной замене и вычислении этих коэффициентов все слагаемые (кроме первых) в их выражениях обращаются в нуль. Исходя из этого можно принять:  $b_{21} \approx -3\alpha_3 q u a m^{-1}$ ,  $b_{31} \approx -j_2/2r$ .

Такая приближенность облегчает расчеты и не вносит существенных погрешностей в определение областей устойчивости. В работах [17, 18, 20-22] использовано аналогичное приближение, однако оно заложено в самом начале, т.е. когда

исходные дифференциальные уравнения приводятся к стандартной форме при помощи соответствующих замен переменных. В случае  $u < a\omega$  коэффициенты  $b_{31}$ ,  $b_{32}$ ,  $b_{23}$  и  $b_{33}$  находятся из (3.1), а другие определяются так:

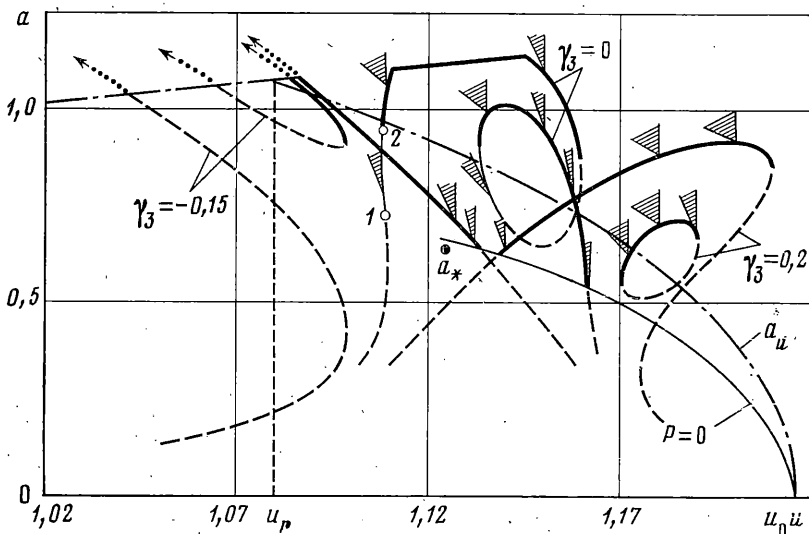
$$b_{11} = -\frac{r}{I} \left[ N - rq(3\alpha_3 u^2 - \alpha_1) - \frac{3}{2} r\alpha_3 q\omega^2 a^2 - \frac{2rq}{\pi(a^2\omega^2 - u^2)^{1/2}} \right]$$

$$b_{21} = -\frac{3}{m} \alpha_3 qua + \frac{\lambda j_2 \cos \xi}{2mr(\omega + j_2 u/2r)^2} - \frac{abr \sin 2\xi}{2mj_2 u^2} + \frac{2qu}{\pi ta\omega^2(a^2\omega^2 - u^2)^{1/2}}$$

$$b_{12} = -\frac{3}{I} \alpha_3 qr^2 \omega^2 ua + \frac{2qur^2}{\pi Ia(a^2\omega^2 - u^2)^{1/2}}$$

$$b_{22} = -\frac{1}{2m} \left( \frac{9}{4} \alpha_3 q\omega^2 a^2 + k - \alpha_1 q + 3\alpha_3 qu^2 \right) + \frac{br}{2mj_2 u} \sin 2\xi - \frac{2qu^2}{\pi ta^2\omega^2(a^2\omega^2 - u^2)^{1/2}}$$

Эквивалентные второму условию (2.10) условия имеют вид неравенств (2.14) и (2.15) с той лишь разницей, что в выражении  $\Phi_v$  осуществляется замена  $v \rightarrow j_2 u/r$ , при этом  $\Phi_v \rightarrow \Phi_u$ . Кроме того, нагрузка в (2.13) становится функцией



Фиг. 6

только скорости  $u$ . В случае идеального источника энергии устойчивость движения определяется неравенствами (2.16) и  $\Phi_u > 0$ , а границы областей устойчивости — уравнениями  $\Phi_u = 0$ ,  $P = 0$ .

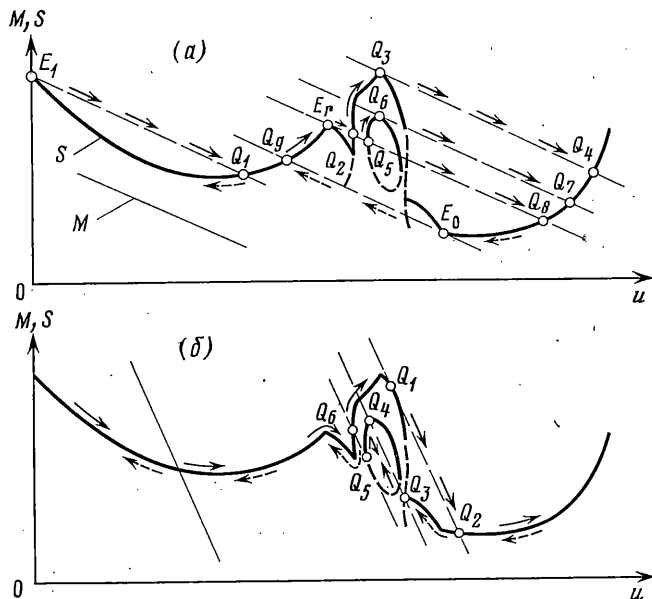
Амплитудные кривые системы, построенные с использованием параметров, приведенных в [21], и дополнительно  $\lambda \approx 0,2$  Н [19] при  $j_2 = 1$ ,  $\gamma_3 = 0$ ,  $\gamma_3 \approx 2$  Н·см<sup>-3</sup>,  $\gamma_3 \approx -1,5$  Н·см<sup>-3</sup>,  $\Phi = \gamma_5 = 0$  представлены на фиг. 6 (имеются тривиальные решения, которые неустойчивы). Размерности величин следующие:  $a$  [см],  $u$  [см·с<sup>-1</sup>]. Штрихпунктирная линия соответствует автоколебаниям. Пунктирные линии при  $\gamma_3 < 0$ , имеющие продолжение, что показано стрелками, не являются решениями, поскольку при  $u < a\omega$  выполняется приближенное равенство  $a\omega \approx u$  (при больших  $a$  возможен неограниченный рост  $x$ ). Жирными сплошными линиями показаны устойчивые решения, штриховыми — неустойчивые решения как при идеальном, так и при неидеальном источнике энергии (реализация в областях двузначности устойчивых решений зависит от начальных условий); сплошной тонкой линией показан участок 1—2, который не реализуется при идеальном источнике и может быть реализован при неидеальном. В случае неидеального источника энергии движения устойчивы в пределах заштрихованных секторов, внутри которых располагаются значения  $N$  характеристики  $M(u/r)$ . Амплитудная кривая претерпевает изменения в зависимости от параметра  $\Phi$  демфера сухого трения и при  $\Phi = \Phi_*$  появляется единственность решения; точка  $a_*$  соответствует предельному значению  $\Phi_* \approx 0,0438$  при  $u = 1,125$  ( $\gamma_3 = 0$ ). Уместно отметить, что появление единственности решения (стягивание амплитудной кривой в точку) при предельном значении параметра  $\Phi_*$  является общим свойством, которое имеет место как при автоколебаниях, так и при комбинациях В+А и П+А (автономная и неавтономная системы); при  $\Phi > \Phi_*$  дейст-



вительных решений амплитудных уравнений не существует, т. е. с помощью демпфера сухого трения возможно устранение нежелательных колебаний.

Кривая  $a(u)$  в зависимости от параметров системы может принимать различные формы, которые здесь не приводятся.

При квазистационарном изменении скорости  $u$  осуществляются нестационарные переходы, которые могут происходить как при идеальном, так и неидеальном источнике энергии, при линейной и нелинейной характеристиках восстанавливающей силы (при линейной восстанавливающей силе и идеальном источнике энергии в случае комбинаций А+В и А+П также переходы отсутствуют). В соответствии с фиг. 6<sup>4</sup> ( $\vartheta = \gamma_3 = 0$ ) на фиг. 7 показано протекание (в силу зависимости нагрузки от амплитуды



Фиг. 7

ды график ее в области резонанса аналогичен графику амплитудной кривой) этих переходов при неидеальном источнике энергии (для построения графика нагрузки в областях почти-периодических колебаний использовано ее среднее значение за почти период). При пологих характеристиках и увеличении скорости (фиг. 7, а) нестационарный переход произойдет из окрестности точки  $E_T$  в точку  $Q_2$  (если она устойчивая при данной характеристике, то в системе возникнут резонансные колебания с большой амплитудой), затем — из точки  $Q_2$  в точку  $Q_1$ . Если точка  $Q_2$  неустойчивая, то переход из окрестности  $E_T$  осуществится в точку  $Q_5$  (если она будет устойчивой, то возникнут резонансные колебания с малой амплитудой), затем — из точки  $Q_5$  в точку  $Q_7$ <sup>4</sup>. При неустойчивой точке  $Q_5$  переход будет происходить из окрестности точки  $E_T$  прямо в точку  $Q_6$ ; поскольку точки  $Q_4$ ,  $Q_7$  и  $Q_8$  соответствуют восходящей ветви характеристики силы трения  $T(U)$ , то в этих точках колебания практически будут отсутствовать (если эти точки будут близки к точке  $E_0$  и амплитуда гармонической силы будет значительной, то проявятся существенные колебания). При уменьшении скорости переход произойдет из окрестности точки  $E_0$  в точку  $Q_8$ ; резонансные колебания не будут реализованы. При крутых характеристиках источника энергии имеет место картина, представленная на фиг. 7, б. При увеличении скорости реализуются большие амплитуды вплоть до точки  $Q_1$ ; при уменьшении скорости переход осуществится из окрестности точки  $Q_3$  в точку  $Q_4$ , где возникнут резонансные колебания с малой амплитудой, затем — из точки  $Q_5$  в точку  $Q_6$ , где возбудятся резонансные колебания с большой амплитудой. При идеальном источнике энергии (характеристика  $M(u/r)$  вертикальна) наблюдается картина переходов, аналогичная представленной на фиг. 3 (отличие в том, что горизонтальный участок заменяется наклонным). Как видно, при пологих и крутых характеристиках источника энергии переходы осуществляются по-разному — в зависимости от свойств источника резонансные колебания могут быть реализованы или нет.

<sup>4</sup> Переход из точки  $Q_6$  в точку  $Q_7$  может легко наблюдаться, если начальные условия выбрать такими, чтобы был реализован режим с малой амплитудой, например соответствующий точке  $Q_5$ .

Заметим, наконец, что в зависимости от параметров системы, свойств источника энергии, начальных условий в целом указанные явления могут составить богатое многообразие (проанализированы некоторые варианты, которые для краткости не приводятся).

Таким образом, полученные результаты показывают принципиальные различия явлений, имеющих место в случаях неавтономности и автономности системы, идеальности и неидеальности источника энергии, поддерживающего колебательные процессы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации в технике. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
3. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 437 с.
4. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М.—Л.: Гостехиздат, 1952. 272 с.
5. Бологин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
6. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
7. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мусель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. 392 с.
8. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
9. Тондл А. Автоколебания механических систем. М.: Мир, 1979. 429 с.
10. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. М.: Мир, 1973. 334 с.
11. Бологин В. В. Об одной механической модели, описывающей взаимодействие параметрических и вынужденных колебаний.— Тр. Моск. энерг. ин-та, 1959, № 32, с. 54—66.
12. Frolov K. V. Parametric and autoparametric oscillations of some nonlinear mechanical system.— In: Proc. 4th conference on nonlinear oscillations. Prague: Acad. Sci., 1968, p. 10—12.
13. Кононенко В. О., Ковальчук П. С. Воздействие параметрического возбуждения на автоколебательную систему.— Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 6, с. 3—10.
14. Tondl A. On the interaction between self-excited and parametric vibrations.— In: Monogr. and mem. nat. Res. Inst. Mach. Design. Bechovice, CSSR, 1973, No. 25. 128 p.
15. Кононенко В. О., Ковальчук П. С. Воздействие внешней гармонической силы на автоколебательную систему с изменяющимся параметром.— Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 10, с. 3—12.
16. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 256 с.
17. Алифов А. А. О связанных колебаниях в автоколебательной системе с ограниченным возбуждением.— В кн.: Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах. М.: Наука, 1977, с. 294—297.
18. Алифов А. А., Гойzman Л. В. О влиянии периодического возмущения на автоколебательную систему с ограниченным возбуждением.— В кн.: Моделирование динамических процессов транспортных систем. М.: Транспорт, 1979. с. 123—132.
19. Алифов А. А., Гусев В. П., Чернявский И. Т. Моделирование автоколебательной системы с источником энергии и периодическим воздействием.— В кн.: Исследование динамики машин на ЭВМ. М.: Наука, 1980, с. 33—40.
20. Алифов А. А. О параметрическом резонансе в автоколебательной системе, взаимодействующей с источником энергии.— В кн.: Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах. М.: Наука, 1977, с. 298—302.
21. Алифов А. А., Фролов К. В. Автопараметрические колебания в системе с сухим трением и с ограниченным возбуждением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4, с. 68—78.
22. Алифов А. А., Фролов К. В. Исследование автоколебаний при трении в условиях параметрического возбуждения и ограниченной мощности источника энергии.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 29—39.
23. Алифов А. А., Глузарев К. К., Фролов К. В. К теории колебаний элементов машин, содержащих источники энергии ограниченной мощности.— В кн.: Механика машин. Вып. 57, М.: Наука, 1980, с. 52—57.
24. Алифов А. А., Фролов К. В. О воздействии параметрического возмущения на автоколебательную систему с источником энергии.— Прикл. механика, 1981, т. 17, вып. 1, с. 106—113.
25. Алифов А. А., Гусев В. П., Чернявский И. Т. О моделировании автоколебательной системы с параметрическим воздействием и ограниченным возбуждением.— В кн.: Исследование динамики машин на ЭВМ. М.: Наука, 1980, с. 24—33.
26. Алифов А. А. Об автоколебательной системе, взаимодействующей с источником энергии.— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1, с. 36—42.
27. Алифов А. А. Об автоколебаниях в системе с ограниченным возбуждением.— Машиноведение, 1979, № 1, с. 8—14.
28. Алифов А. А., Соловьев А. А., Фролов К. В. Автоколебательная система со слу-

чайным параметрическим возбуждением и источником энергии ограниченной мощности.— В кн.: Проблемы нелинейных колебаний механических систем. Киев: Наук. думка, 1978, с. 4–5.

29. Алифов А. А., Луценко В. И., Соловьев А. А., Чернявский И. Т. Моделирование автоколебательной системы при случайных возмущениях и неидеальном источнике энергии.— В кн.: Исследование динамических систем на ЭВМ. М.: Наука, 1982, с. 36–43.
30. Алифов А. А., Гусев В. П., Соловьев А. А., Чернявский И. Т. О свойствах автоколебательной системы при случайном изменении жесткости.— В кн.: Исследование динамических систем на ЭВМ. М.: Наука, 1982, с. 43–49.
31. Алифов А. А., Гойхман Л. В. О моделировании автоколебательной системы с источником энергии, находящейся под воздействием периодического и параметрического возмущений.— В кн.: Колебания и устойчивость динамических систем. М.: Транспорт, 1980, с. 3–14.
32. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

Москва

Поступила в редакцию  
20.X.1980