МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1982

УДК 531.8

УПРАВЛЕНИЕ ШАГАЮЩИМ АППАРАТОМ С ПОЧТИ НЕВЕСОМЫМИ НОГАМИ. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ. II

ЛАРИН В. Б., НАУМЕНКО К. И.

Приводится дискретный вариант задачи [1] управления сингулярно-возмущенной периодической системой. Шагающий аппарат рассматривается как дискретная управляемая система, и по аналогии с непрерывным случаем вводится малый параметр ε таким образом, что при $\varepsilon\to0$ получается дискретная стратегия управления аппаратом с невесомыми ногами. Отмечаются особенности, связанные с поведением погранслоя в дискретной сингулярно-возмущенной задаче. Рассмотрены примеры.

1. Описанная в [1] математическая модель шагающего аппарата с почти невесомыми ногами должна быть модифицирована, если в систему стабилизации включена ЦВМ. Как отмечено в [2], при использовании ЦВМ для реализации алгоритма стабилизации аппарата его движение в течение шага целесообразно описывать не дифференциальным уравнением, а соответствующим разностным соотношением. Пусть на каждом шаге аппарата интервал непрерывного управления $((i-1)\tau_+\leqslant t<i\tau)$ разбивается на $h-1$ равных промежутков, на которых управляющее воздействие постоянно. Тогда разностным аналогом уравнения (1.2) работы [1] будет уравнение

$$\mathbf{x}((k+1)\delta)=\Phi((k+1)\delta,k\delta)\mathbf{x}(k\delta)+\int\limits_{k\delta}^{(k+1)\delta}\Phi((k+1)\delta,s)B(s)\,ds\,\mathbf{u}(k\delta) \tag{1.1}$$

где $k=0, 1,\ldots,h-2$; $\delta=\tau/(h-1)$, $\Phi(t, s)$ — матрица, определяемая из решения дифференциального уравнения

$$\Phi^\cdot(t, s)=A(t)\Phi(t, s),\quad \Phi(s, s)=E \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) матрицы $A(t)$ и $B(t)$ те же, что и в уравнении (1.2) [1]. Обозначив

$$\Psi(k)=\Phi((k+1)\delta,k\delta),\qquad \Gamma(k)=\int\limits_{k\delta}^{(k+1)\delta}\Phi((k+1)\delta,s)B(s)\,ds$$

и опуская (для удобства записи) δ в обозначении аргумента, запишем разностное уравнение (1.1) в виде

$$\mathbf{x}(k+1)=\Psi(k)\mathbf{x}(k)+\Gamma(k)\mathbf{u}(k) \tag{1.3}$$

Присоединим к этому уравнению уравнение (1.1) из [1] [1] и положим

$$\mathbf{x}(h-1)=\mathbf{x}(\tau_-),\quad \mathbf{x}(h)=\mathbf{x}(\tau_+),\quad \Psi(h-1)=N,\quad \Gamma(h-1)=0$$

[1] Отметим, что это разностное уравнение описывает процесс смены опорных ног, и поэтому продолжительность интервала между моментами $h-1$ и h в реальном масштабе времени равна нулю.

Тогда уравнение (1.3) описывает поведение вектора x в течение всего шага аппарата. Вследствие периодичности матриц, определяющих уравнение (1.1), на каждом шаге аппарата это разностное уравнение имеет вид (1.3) с периодическими матрицами $\Psi(k)$, $\Gamma(k)$ с периодом h.

Построение дискретной математической модели аппарата с почти невесомыми ногами аналогично описанной в [1] непрерывной модели. Вводим векторы $\mathbf{q}(k)$ и $\mathbf{v}(k)$, которые описывают динамику «весомого» корпуса и «легких» ног аппарата, и малый параметр ε, определяющий соотношение масс ног и корпуса. Заметим, что структура разностных уравнений (1.3) аналогична структуре дифференциальных уравнений в непрерывном варианте задачи в том смысле, что матрицы $\Psi(k)$ и $\Gamma(k)$ вследствие структуры матриц $A(t)$ и $B(t)$ имеют вид

$$\Psi(k)=\begin{Vmatrix} \Psi_1(k) & \varepsilon\Psi_2(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \Psi_{10}(k)+\varepsilon\Psi_{11}(k) & \varepsilon\Psi_2(k) \\ \Psi_{30}(k)+\varepsilon\Psi_{31}(k) & \Psi_{40}(k)+\varepsilon\Psi_{41}(k) \end{Vmatrix}$$

$$\Gamma(k)=\begin{Vmatrix} \Gamma_1(k) & \Gamma_2(k) \\ \Gamma_3(k) & \Gamma_4(k) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \Gamma_{10}(k)+\varepsilon\Gamma_{11}(k) & \Gamma_{20}(k)+\varepsilon\Gamma_{21}(k) \\ \Gamma_{30}(k)+\varepsilon\Gamma_{31}(k) & \varepsilon^{-1}\Gamma_{40}(k)+\Gamma_{41}(k) \end{Vmatrix}$$

Таким образом, на первом шаге аппарата ($i=1$) разностное уравнение (1.3) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} q(k+1)=\Psi_1(k)\mathbf{q}(k)+\varepsilon\Psi_2(k)\mathbf{v}(k)+\Gamma_1(k)\mathbf{u}_1(k)+\Gamma_2(k)\mathbf{u}_2(k) \\ \mathbf{v}(k+1)=\Psi_3(k)\mathbf{q}(k)+\Psi_4(k)\mathbf{v}(k)+\Gamma_3(k)\mathbf{u}_1(k)+\Gamma_4(k)\mathbf{u}_2(k) \\ k=0,\ 1,\dots,h-2,\quad \mathbf{q}(h)=N_1\mathbf{q}(h-1)+N_2\mathbf{v}(h-1) \\ N_1=N_{10}+\varepsilon N_{11},\quad N_2=N_{20}+\varepsilon N_{21} \\ \mathbf{v}(h)=N_3\mathbf{q}(h-1)+N_4\mathbf{v}(h-1) \\ N_3=N_{30}+\varepsilon N_{31},\quad N_4=N_{40}+\varepsilon N_{41} \end{gathered} \tag{1.4}$$

В уравнениях (1.4) учтены только два члена разложения, поскольку предполагается построить решение (с точностью до ε) задачи стабилизации аппарата с почти невесомыми ногами, используя в качестве первого приближения решение задачи стабилизации аппарата с невесомыми ногами. Заметим, что дискретную математическую модель аппарата с невесомыми ногами получим, пренебрегая влиянием динамики ног на движение корпуса аппарата ($\varepsilon\to 0$).

В [2] этому предельному случаю соответствует укороченный вариант уравнений (1.4)

$$\begin{gathered} \mathbf{q}(k+1)=\Psi_{10}(k)\mathbf{q}(k)+\Gamma_{10}(k)\mathbf{u}_1(k) \\ \mathbf{q}(h)=N_{10}\mathbf{q}(h-1)+N_{20}\mathbf{v}(h-1),\quad N_{20}=\|M\quad 0\| \end{gathered}$$

а система стабилизации аппарата с невесомыми ногами синтезируется в соответствии с критерием качества

$$I_1=\sum_{\substack{k=0\\ k\neq ih-1}}^{\infty}[\mathbf{q}'(k)Q_1(k)\mathbf{q}(k)+\mathbf{u}_1'(k)R_1(k)\mathbf{u}_1(k)]+\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{v}_1'(ih-1)C_1\mathbf{v}_1(ih-1)$$

в котором матрицы $Q_1(k)=Q'_1(k)\geqslant 0$, $R_1(k)=R_1'(k)>0$ периодические с периодом h, матрица $C_1=C_1'>0$ постоянная, а вектор $\mathbf{v}_1(k)$ содержит компоненты вектора $\mathbf{v}(k)$, соответствующие обобщенным координатам легких ног аппарата.

Оптимальный закон управления аппаратом с невесомыми ногами имеет вид

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_1(k)=-R_1^{-1}(k)\Gamma_{10}'(k)P(k+1)\mathbf{q}(k+1)= \\ =-R_1^{-1}(k)\Gamma_{10}'(k)P(k+1)[E+D_1(k)P(k+1)]^{-1}\Psi_1(k)\mathbf{q}(k) \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{v}_1(ih-1)=-[C_1+M'P(h)M]^{-1}M'P(h)N_1\mathbf{q}(ih-1) \tag{1.6}$$

В этих соотношениях симметрическая, неотрицательно-определенная и периодическая с периодом h матрица $P(k)$ удовлетворяет матричному разностному уравнению

$$P(k)=\Psi_1'(k)P(k+1)[E+D_1(k)P(k+1)]^{-1}\Psi_1(k)+Q_1(k)$$
$$D_1(k)=\Gamma_{10}(k)R_1^{-1}(k)\Gamma_{10}'(k), \quad k\neq ih-1 \tag{1.7}$$
$$\Psi_1(ih-1)=N_{10}, \quad D_1(ih-1)=MC_1^{-1}M', \quad Q_1(ih-1)=0$$

Перейдем к модели аппарата с почти невесомыми ногами. Систему стабилизации будем синтезировать в соответствии с критерием качества

$$I=\sum_{\substack{k=0\\k\neq ih-1}}^{\infty}[\mathbf{x}'(k)Q(k)\mathbf{x}(k)+\mathbf{u}'(k)R(k)\mathbf{u}(k)]+\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{x}'(ih-1)C\mathbf{x}(ih-1) \tag{1.8}$$

в котором периодические с периодом h матрицы $Q(k)=Q'(k)\geqslant0$, $R(k)=R'(k)>0$ и постоянную симметрическую матрицу C по аналогии с [1] задаем в виде

$$Q(k)=\begin{Vmatrix} Q_1(k) & \varepsilon Q_2(k)\\ \varepsilon Q_2'(k) & \varepsilon Q_3(k)\end{Vmatrix}, \quad R(k)=\begin{Vmatrix} R_1(k) & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}R_2(k)\end{Vmatrix}$$
$$C=\operatorname{diag}\{0, C_*\}=\operatorname{diag}\{0, C_1, C_2\}, \quad C_2=C_2'>0$$

Закон управления системой, описываемой разностными уравнениями (1.4), который обеспечивает минимум функционалу (1.8), имеет вид

$$\mathbf{u}(k)=-R^{-1}(k)\Gamma'(k)S(k+1)\mathbf{x}(k+1)=$$
$$=-R^{-1}(k)\Gamma'(k)S(k+1)[E+D(k)S(k+1)]^{-1}\Psi(k)\mathbf{x}(k) \tag{1.9}$$

где симметрическая, неотрицательно-определенная и периодическая с периодом h матрица $S(k)$ удовлетворяет матричному разностному уравнению

$$S(k)=\Psi'(k)S(k+1)[E+D(k)S(k+1)]^{-1}\Psi(k)+Q(k) \tag{1.10}$$
$$D(k)=\Gamma(k)R^{-1}(k)\Gamma'(k), \quad k\neq ih-1, \quad D(ih-1)=0, \quad Q(ih-1)=C$$

причем матрица $D(k)$ с точностью до членов порядка ε имеет вид

$$D(k)=\begin{Vmatrix} D_1(k)+\varepsilon D_{11}(k) & D_2(k)+\varepsilon D_{21}(k)\\ D_2'(k)+\varepsilon D_{21}'(k) & \varepsilon^{-1}D_3(k)+D_{30}(k)+\varepsilon D_{31}(k)\end{Vmatrix}$$

2. Перейдем к построению первого приближения решения разностного уравнения (1.10). Для исследования поведения матрицы S в течение периода запишем, следуя [2, 3], соотношение, связывающее значения матриц $S(h-k)$ и $S(h)$

$$S(h-k)=\Psi'(h-k, k)S(h)\times$$
$$\times[E+D(h-k, k)S(h)]^{-1}\Psi(h-k, k)+Q(h-k, k) \tag{2.1}$$

и разностное уравнение, описывающее поведение фазового вектора в замкнутой системе

$$\mathbf{x}(h)=A(h-k, k)\mathbf{x}(h-k)=[E+D(h-k, k)S(h)]^{-1}\Psi(h-k, k)\mathbf{x}(h-k) \tag{2.2}$$

Матрицы, определяющие эти соотношения, задаются рекуррентными формулами [2]

$$\Psi(h-k, t+1)=\Psi(h-k+t)T(h-k, t)\Psi(h-k, t)$$

[2] Отметим, что принятые здесь обозначения отличаются от [2, 3]. Так, в [2, § 3, гл. 3] матрицы $\Phi_{h-k}(t)=\Psi(h-k, t)$, $U_{h-k}(t)=D(h-k, t)$ и $R_{h-k}(t)=-Q(h-k, t)$, а $A(h-k, t)=\Psi(h-k, t)$, $M(h-k, t)=D(h-k, t)$ и $R(h-k, t)=Q(h-k, t)$ в [3].

$$D(h-k,\ t+1)=D(h-k+t)+\Psi(h-k+t)\,T(h-k,\ t)\,D(h-k,\ t)\,\Psi'(h-k+t)$$

$$Q(h-k,\ t+1)=Q(h-k,\ t)+\Psi'(h-k,\ t)\,Q(h-k+t)\,T(h-k,\ t)\,\Psi(h-k,\ t) \tag{2.3}$$

$$T(h-k,\ t)=[E+D(h-k,\ t)\,Q(h-k+t)]^{-1}$$

с начальными значениями $\Psi(h-k,\ 1)=\Psi(h-k)$, $D(h-k,\ 1)=D(h-k)$ и $Q(h-k,\ 1)=Q(h-k)$.

Поскольку произведение матриц $D(h-k,\ t)Q(h-k+t)$ при $t<k-1$ не содержит слагаемых с множителем ε^{-1}, то в вычислениях при помощи рекуррентных формул (2.3) матриц $\Psi(h-k,\ k)$, $D(h-k,\ k)$ и $Q(h-k,\ k)$ затруднения, обусловленные операцией обращения матриц, содержащих сингулярно-возмущенные слагаемые, возникают только при вычислении матрицы $T(h-k,\ k-1)$. Обозначим

$$D(h-k,\ k-1)=\begin{Vmatrix} D_{1*}(k) & D_{2*}(k) \\ D_{2*}'(k) & D_{3*}(k) \end{Vmatrix}$$

где из рекуррентных формул (2.3) с точностью до членов порядка ε

$$D_{1*}(k)=D_1(h-k,\ k-1)+\varepsilon D_{11}(h-k,\ k-1)$$

$$D_{2*}(k)=D_2(h-k,\ k-1)+\varepsilon D_{21}(h-k,\ k-1)$$

$$D_{3*}(k)=\varepsilon^{-1}D_3(h-k,\ k-1)+D_{30}(h-k,\ k-1)+\varepsilon D_{31}(h-k,\ k-1)$$

Тогда

$$T(h-k,\ k-1)=\begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & C_* \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E & -D_{2*}(k)D_*(k) \\ 0 & D_*(k) \end{Vmatrix},\quad D_*(k)=[C_*^{-1}+D_{3*}(k)]^{-1}$$

$$Q(h-1)\,T(h-k,\ k-1)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_*(k) \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

$$T(h-k,\ k-1)\,D(h-k,\ k-1)=\begin{Vmatrix} D_{1*}(k)-D_{2*}(k)D_*(k)D_{2*}'(k) & D_{2*}(k)D_*(k)C_*^{-1} \\ C_*^{-1}D_*(k)D_{2*}'(k) & C_*^{-1}D_*(k)D_{3*}(k) \end{Vmatrix}$$

Принимая во внимание структуру матрицы B, будем полагать, что ранг симметрической матрицы $D_3(k)$ равен половине ее размерности (числу обобщенных координат, описывающих динамику легких ног аппарата). Тогда матрица $D_3(h-k,\ k-1)$ при $k\geqslant 3$ будет невырожденной (это справедливо, по крайней мере, при достаточно малом интервале квантования δ) и с точностью до двух членов разложения, что связано с последующим умножением на матрицу, имеющую слагаемые с множителем ε^{-1}

$$D_*(k)=\varepsilon D_3^{-1}(h-k,\ k-1)-\varepsilon^2 D_3^{-1}(h-k,\ k-1)\times$$
$$\times[C_*^{-1}+D_{30}(h-k,\ k-1)]D_3^{-1}(h-k,\ k-1) \tag{2.5}$$

При $k=2$ результат обращения этой матрицы, вследствие вырожденности матрицы $D_3(h-2)$, содержит еще и конечные слагаемые (см. п. 3). Таким образом, при $k\geqslant 2$ из рекуррентных формул (2.3) и соотношений (2.4) и (2.5) с точностью до членов порядка ε имеем

$$\Psi(h-k,k)=\begin{Vmatrix} \Psi_1(h-k,k)+\varepsilon\Psi_{11}(h-k,\ k) & \varepsilon\Psi_2(h-k,\ k) \\ \Psi_3(h-k,k)+\varepsilon\Psi_{31}(h-k,\ k) & \varepsilon\Psi_4(h-k,\ k) \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

$$D(h-k,k)=\begin{Vmatrix} D_1(h-k,k)+\varepsilon D_{11}(h-k,k) & D_2(h-k,k)+\varepsilon D_{21}(h-k,k) \\ D_2'(h-k,\ k)+\varepsilon D_{21}'(h-k,k) & D_3(h-k,\ k)+\varepsilon D_{31}(h-k,k) \end{Vmatrix}$$

$$Q(h-k,k)=\begin{Vmatrix} Q_1(h-k,k)+\varepsilon Q_{11}(h-k,k) & \varepsilon Q_2(h-k,\ k) \\ \varepsilon Q_2'(h-k,k) & \varepsilon Q_3(h-k,\ k) \end{Vmatrix}$$

причем матрицы с единицей в индексе совпадают с матрицами, определяющими соотношение, аналогичное (2.1) и связывающее значения матриц $P(h-k)$ и $P(h)$ при решении уравнения (1.7). Соотношения (2.6) позволяют исследовать структуру последовательности матриц $S(h-k)$. Как и в [1], можно предположить, что матрица $S(0)$ будет иметь структуру

$$S(0)=\left\| \begin{matrix} S_1(0)+\varepsilon S_{11}(0) & \varepsilon S_2(0) \\ \varepsilon S_2'(0) & \varepsilon S_3(0) \end{matrix} \right\| \tag{2.7}$$

Такая структура матрицы $S(k)$ будет сохраняться до момента $h-3$ (включительно). Для матрицы $S(h-1)$ из уравнения (1.10) и условия периодичности $S(h)=S(0)$ получим

$$S(h-1)=\left\| \begin{matrix} N'_{10}S_1(h)N_{10}+\varepsilon S_{11}(h-1) & N'_{10}S_1(h)N_{20}+\varepsilon S_{21}(h-1) \\ N'_{20}S_1(h)N_{10}+\varepsilon S'_{21}(h-1) & N'_{20}S_1(h)N_{20}+C_*+\varepsilon S_{31}(h-1) \end{matrix} \right\| \tag{2.8}$$

Структура матрицы $S(h-2)$ будет рассмотрена в п. 3.

Исследуем предельный переход ($\varepsilon\to 0$) в задаче управления аппаратом с почти невесомыми ногами. Если положить $S_1(h)=P(h)$, то из соотношений (2.1) и (2.6) следует совпадение при $k=0, 1, 2,\dots, h-3, h$ в первом приближении последовательностей матриц $S_1(k)$ и $P(k)$, т. е. в эти моменты векторы $\mathbf{u}_1(k)$, определяемые формулами (1.5) и (1.9), при $\varepsilon\to 0$ совпадают. В дискретные моменты $h-2$ и $h-1$ совпадение матриц $S_1(k)$ и $P(k)$ не наблюдается (см. пример 1), но в эти моменты при $\varepsilon\to 0$ рассматриваемая дискретная задача синтеза системы стабилизации аппарата с почти невесомыми ногами вырождается в соответствующую задачу для аппарата с невесомыми ногами в том смысле, что в пределе стратегия управления $\mathbf{u}_1(h-2)$ и вектор $\mathbf{v}_1(h-1)$ определяются соотношениями (1.5) и (1.6).

Действительно, из разностного уравнения (2.2) можно получить

$$\mathbf{x}(h-3)=\Psi^{-1}(h-3,2)\,[E+D(h-3,2)S(h-1)]\,\mathbf{x}(h-1)$$

Так как матрица $D_3(h-3,2)$ является матрицей полного ранга, то последние компоненты вектора $S(h-1)x(h-1)$ должны быть величинами порядка ε (число этих компонент равно размерности матрицы $D_3(h-3,2)$). Поэтому

$$N_{20}'S_1(h)\,[N_{10}\mathbf{q}(h-1)+N_{20}\mathbf{v}(h-1)]+C_*\mathbf{v}(h-1)=0(\varepsilon)$$

и при $\varepsilon\to 0$ получим

$$\mathbf{v}(h-1)=-[C_*+N_{20}'S_1(h)N_{20}]^{-1}N_{20}'S_1(h)N_{10}\mathbf{q}(h-1) \tag{2.9}$$

откуда с учетом структуры матриц N_2 и C_* следует соотношение (1.6). Из равенств (2.8), (2.9) и (1.7) при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$S(h-1)\,\mathbf{x}(h-1)=\left\| \begin{matrix} P(h-1) \\ 0 \end{matrix} \right\| \mathbf{q}(h-1)$$

т. е. стратегии управления $\mathbf{u}_1(h-2)$, определяемые формулами (1.5) и (1.9), совпадают.

Возвратимся к принятому предположению о невырожденности матрицы $D_3(h-k, k-1)$. Ранг этой матрицы в некотором смысле зависит от «степени» управляемости системы (1.3), т. е. равен (см. [4]) рангу матрицы

$$\|\Gamma_{40}(h-2)\quad \Psi_{40}(h-3)\Gamma_{40}(h-3)\quad \Psi_{40}(h-3)\Psi_{40}(h-4)\Gamma_{40}(h-4)\dots$$
$$\dots\Psi_{40}(h-3)\Psi_{40}(h-4)\dots\Psi_{40}(h-k)\Gamma_{40}(h-k)\|$$

и определяет длительность переходного процесса в сформированной дискретной системе в том смысле, что момент стабилизации структуры матрицы $S(h-k)$ (совпадение со структурой (2.7)) наблюдается только после того, как матрица $D_3(h-k, k-1)$ становится матрицей полного ранга.

3. Рассмотрим вычислительные особенности построения первого приближения. Характер изменения матрицы $S_1(k)$ позволяет предположить,

что в качестве первого приближения решения алгебраического уравнения

$$S(h)=\Psi'(0,h)S(h)[E+D(0,h)S(h)]^{-1}\Psi(0,h)+Q(0,h)$$

порождающего, согласно соотношению (2.1), периодическое решение уравнения (1.10), можно положить

$$S^{(1)}(h)=\begin{Vmatrix} P(h) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

Тогда из разностного уравнения (2.2) и соотношений (2.6) получим матрицу, определяющую в замкнутой системе связь между векторами $\mathbf{x}(i+h)$ и $\mathbf{x}(i)$:

$$A(0,h)=\begin{Vmatrix} A_1(0,h)+\varepsilon A_{11}(0,h) & \varepsilon A_2(0,h) \\ A_3(0,h)+\varepsilon A_{31}(0,h) & \varepsilon A_4(0,h) \end{Vmatrix} \tag{3.2}$$

собственные значения которой являются мультипликаторами [5] рассматриваемой периодической системы. Так как собственные значения матрицы $A_1(0,h)$ являются мультипликаторами замкнутой системы уравнений, описывающих движение аппарата с невесомыми ногами, и лежат внутри единичного круга, то при достаточно малом ε собственные значения матрицы $A(0,h)$ также лежат внутри единичного круга. Следовательно, приближение (3.1) может быть уточнено методом [6] и в результате этой процедуры будет получена матрица $S(h)=S(0)$ в виде (2.7).

Определим последовательность матриц $S(h-k)$. Матрица $S(h-1)$ вычисляется при помощи соотношения (1.10) и имеет вид (2.8). Поскольку вычисление матрицы $S(h-2)$ по формуле (1.10) связано как с обращением матрицы, содержащей сингулярно-возмущенные слагаемые, так и с требованием определения матрицы $S(h-1)$ с точностью до членов порядка ε^2, то для определения матрицы $S(h-2)$ будем пользоватся формулой (2.1). В этом случае вычислительные затруднения (см. соотношения (2.4) при $k=2$) сводятся только к операции обращения симметрической матрицы $\varepsilon^{-1}D_3(h-2)+C_*^{-1}+D_{30}(h-2)+\varepsilon D_{31}(h-2)$, в которой ранг матрицы $D_3(h-2)$ равен половине ее размерности. Элементарными преобразованиями обращение этой матрицы сводится к обращению симметрической матрицы следующей структуры:

$$\begin{Vmatrix} G_1+\varepsilon G_{11} & G_2+\varepsilon G_{21} \\ G_2'+\varepsilon G_{21}' & \varepsilon^{-1}G_3+G_{30} \end{Vmatrix}$$

в которой G_1 и G_3 — матрицы полного ранга. Результат обращения этой матрицы с точностью до двух членов разложения имеет вид

$$\begin{Vmatrix} G_1^{-1}+\varepsilon B_{11} & \varepsilon B_{21}+\varepsilon^2 B_{22} \\ \varepsilon B_{21}'+\varepsilon^2 B_{22}' & \varepsilon G_3^{-1}+\varepsilon^2 B_{32} \end{Vmatrix}$$

$$B_{11}=-G_1^{-1}G_{11}G_1^{-1},\quad B_{21}=-G_1^{-1}G_2G_3^{-1},\quad B_{32}=-G_3^{-1}(G_{30}-G_2'G_1^{-1}G_2)G_3^{-1}$$

$$B_{22}=B_{11}G_1B_{21}+B_{21}G_3B_{32}-G_1^{-1}G_{21}G_3^{-1}$$

откуда следует, что при $k=2$ структура матриц, определяющих уравнение (2.1), отличается от представлений (2.6).

Применение соотношения (1.10) для определения матрицы $S(h-3)$ вызывает те же затруднения, что и определение матрицы $S(h-2)$, при помощи этого соотношения. Поэтому для вычисления матрицы $S(h-3)$ целесообразно также использовать соотношение (2.1).

Последующее определение матриц $S(h-k)$ производится с использованием алгоритма (1.10) без каких-либо затруднений.

4. *Пример 1.* Рассматриваемый пример не описывает какого-либо шагающего аппарата и приводится для пояснения структуры матриц $S(h-1)$ и $S(h-2)$.

Пусть $h=3$ и в уравнениях (1.3) и функционале (1.8):

$$\Psi(0)=\Psi(1)=\begin{Vmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & b & 0\end{Vmatrix},\quad \Psi(2)=N=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & n_1 & 0\\ 0 & 0 & n_2\end{Vmatrix}$$

$$|a|>1,\quad \Gamma(0)=\Gamma(1)=\frac{1}{\varepsilon}\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix},\quad R_2(0)=R_2(1)=1,\quad C_*=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & c\end{Vmatrix}\quad Q(0)=Q(1)=0$$

Для «укороченной» модели имеем: $\Psi_1(0)=\Psi_1(1)=a$, $N_{10}=1$, $\Gamma_{10}(0)=\Gamma_{10}(1)=0$, $M=1$, $Q_1(0)=Q_1(1)=0$, $C_1=1$. Закон управления для этой модели имеет вид (1.5) и (1.6), периодическое решение уравнения (1.7):

$$P(0)=P(3)=\gamma=a^4-1,\quad P(2)=\gamma/a^4,\quad P(1)=\gamma/a^2$$

а мультипликатор системы $A_1(0,3)=1/a^2$. Выбирая в качестве начального приближения $S(3)$ в виде (3.1) и воспользовавшись (1.10), для последовательности матриц $S(k)$ имеем

$$S(3)=\begin{Vmatrix}\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\quad S(2)=\begin{Vmatrix}\gamma & \gamma & 0\\ \gamma & \gamma+1 & 0\\ 0 & 0 & c\end{Vmatrix},\quad S(1)=\begin{Vmatrix}a^2\gamma & 0 & a\gamma\\ 0 & \dfrac{\varepsilon b^2 c}{c+\varepsilon} & 0\\ a\gamma & 0 & 1+\gamma\end{Vmatrix}$$

$$S(0)=\begin{Vmatrix}\dfrac{a^4\gamma(1+\varepsilon)}{a^4+\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon a^2 b\gamma}{a^4+\varepsilon} & 0\\ \dfrac{\varepsilon a^2 b\gamma}{a^4+\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon a^4 b^2}{a^4+\varepsilon} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\varepsilon b^2 c}{c+\varepsilon}\end{Vmatrix}$$

а матрица (3.2) равна

$$A(0,3)=\begin{Vmatrix}\dfrac{a^2(1+\varepsilon)}{a^4+\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon b}{a^4+\varepsilon} & 0\\ a^2\left(1-\dfrac{n_1\gamma}{a^4+\varepsilon}\right) & \dfrac{\varepsilon b n_1}{a^4+\varepsilon} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\varepsilon b n_2}{c+\varepsilon}\end{Vmatrix}$$

Матрицы $S(3)$ и $S(0)$ отличаются на величину порядка ε. Эта невязка может быть уменьшена при помощи алгоритма [6], поскольку собственные значения матрицы $A(0,3)$ лежат внутри единичного круга (при достаточно малом ε).

Отметим, что структура матриц $S(2)$ и $S(1)$ не совпадает с представлением (2.7) и при $\varepsilon\to 0$ $S_1(2)=\gamma$ и $S_1(1)=a^2\gamma$ не совпадают с $P(2)$ и $P(1)$, однако при $\varepsilon\to 0$ наблюдается сходимость стратегии управления системой к стратегии, соответствующей укороченному варианту задачи ($\varepsilon=0$). Так, при $\varepsilon=0$, согласно (1.5) и (1.6), $u(0)=u(1)=u(2)=0$, $v_1(2)=-\gamma(1+\gamma)^{-1}q(2)$. При $\varepsilon\neq 0$ из (1.9) имеем

$$u(0)=-\frac{\varepsilon}{1+\gamma+\varepsilon}\|a^2\gamma\ \ b(1+\gamma)\ \ 0\|x(0)$$

$$u(1)=-\frac{\varepsilon bc}{c+\varepsilon}\|0\ \ 1\ \ 0\|x(1),\qquad u(2)=0$$

$$v_1(2)=-\frac{\gamma}{1+\gamma+\varepsilon}q(2)+\frac{\varepsilon b}{1+\gamma+\varepsilon}v_1(0)$$

Пример 2. Опишем построение решения дискретного варианта задачи сохранения позы двуногого аппарата, рассмотренного в примере [1], которое сводится к определению периодической последовательности матриц $S(k)$, удовлетворяющей уравнению (1.10).

Исходные данные: при $k \neq h-1$, $\Psi(k)=e^{A\delta}$

$$\Gamma(k)=A^{-1}(e^{A\delta}-E)B, \qquad R(k)=\mathrm{diag}\{r_1, \varepsilon^{-1}r_2\}, \qquad Q_k=0$$

$$D(k)=U=A^{-1}(e^{A\delta}-E)BR^{-1}B'(e^{A'\delta}-E)(A')^{-1}$$

В частности, если в примере [1] принять $\rho=0$, $r=h$, т. е.

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & \varepsilon a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^2 & 0 & -a^2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B=\frac{1}{mh^2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{Vmatrix}, \quad \Psi(k)=\begin{Vmatrix} \Psi_1(k) & \varepsilon\Psi_2(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) \end{Vmatrix}$$

то для матрицы $\Psi(k)$ имеем

$$\Psi_1(k)=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} a_+c_+ + a_-c_- & \dfrac{1}{\alpha}(a_+s_+ + a_-s_-) \\ \alpha(a_+s_+ - a_-s_-) & a_+c_+ + a_-c_- \end{Vmatrix}$$

$$\Psi_2(k)=\Psi_3(k)=\frac{1}{2\sigma^2}\begin{Vmatrix} c_+ - c_- & \dfrac{1}{\alpha}(s_+ - s_-) \\ \alpha(s_+ + s_-) & c_+ - c_- \end{Vmatrix}$$

$$\Psi_4(k)=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} a_-c_+ + a_+c_- & \dfrac{1}{\alpha}(a_-s_+ + a_+s_-) \\ \alpha(a_-s_+ - a_+s_-) & a_-c_+ + a_+c_- \end{Vmatrix},$$

$$a_\pm=(\sigma^2 \mp 1)/\sigma^2, \quad c_+=\mathrm{ch}\,\alpha\delta, \quad c_-=\cos\alpha\delta, \quad s_+=\mathrm{sh}\,\alpha\delta, \quad s_-=\sin\alpha\delta, \quad \alpha=a\sigma$$

$$\sigma=\sqrt[4]{1+\varepsilon}, \qquad k=h-1, \qquad \Psi(h-1)=N, \qquad \Gamma(h-1)=0$$

$$R(h-1)=0 \qquad Q(h-1)=C=\mathrm{diag}\{0, 0, c_1, c_2\}, \qquad D(h-1)=0$$

Матрицу, порождающую первое приближение периодического решения уравнения (1.10), получим положив в (3.1)

$$P(h)=\frac{2a^2c_1\,\mathrm{sh}\,a\tau}{a^4e^{a\tau}+2c_1d_1\,\mathrm{sh}\,a\tau\,\mathrm{th}\,{}^1/{}_2a\delta}\begin{Vmatrix} a^2 & a \\ a & 1 \end{Vmatrix}$$

Эта матрица является элементом последовательности $P(k)$ — периодического решения уравнения (1.7).

Матрицу $S(h-1)$ вычисляем при помощи соотношения (1.10). Для определения матрицы $S(h-2)$ будем пользоваться формулой (2.1), в которой, согласно выражениям (2.3): $\Psi(h-2,2)=NT_1e^{A\delta}$, $D(h-2,2)=NT_1UN'$, $Q(h-2,2)=e^{A'\delta}CT_1e^{A\delta}$, $T_1=(E+UC)^{-1}$.

Для упрощения процедуры обращения при вычислении матриц T_1 и T_1U преобразуем их: $T_1=E-T_1UC$, $T_1U=A^{-1}(e^{A\delta}-E)B[E+R^{-1}B'(e^{A'\delta}-E)(A')^{-1}CA^{-1}(e^{A\delta}-E)B]^{-1}R^{-1}B'(e^{A'\delta}-E)(A')^{-1}$.

Теперь процедура обращения матрицы, содержащей члены с множителями ε^{-1}, существенно упрощается, так как матрица, находящаяся в квадратных скобках в выражении для T_1U, двумерная и имеет вид, обусловленный конкретным видом матриц B и R:

$$E+\begin{Vmatrix} a_{11} & \dfrac{1}{\varepsilon}a_{12} \\ a_{21} & \dfrac{1}{\varepsilon}a_{22} \end{Vmatrix}$$

Вычисление матрицы $S(h-3)$ также производится по формуле (2.1), в которой матрицы $\Psi(h-3,3)=NT_2e^{2A\delta}$, $D(h-3,3)=NT_2(U+e^{A\delta}Ue^{A'\delta})N'$, $Q(h-3,3)=e^{2A'\delta}CT_2e^{2A\delta}$, $T_2=[E+(U+e^{A\delta}Ue^{A'\delta})C]^{-1}$ определяются при помощи соотношений (2.4) и (2.5).

Дальнейшее вычисление последовательности матриц $S(h-4),\ldots,$ выполняется непосредственно по формуле (1.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ларин В. Б., Науменко К. И.* Управление шагающим аппаратом с почти невесомыми ногами. Непрерывный вариант. I.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 52–62.
2. *Ларин В. Б.* Управление шагающими аппаратами.– Киев: Наук. думка, 1980. 168 с.
3. *Науменко К. И.* Управление горизонтальным движением шагающего аппарата при неполной информации. Математическая физика: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1980, вып. 28, с. 29–33.
4. *Науменко К. И.* Сингулярная задача периодической оптимизации дискретных стохастических систем.– В кн.: Прикладные методы исследования физико-механических процессов. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1979, с. 132–146.
5. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.
6. *Hewer G. A.* An iterative technique for the computation of the steady-state gains for the discrete optimal regulator.– IEEE Trans. Autom. Contr., 1971, v. AC-16, No. 4, p. 382–384.

Киев

Поступила в редакцию
6.VII.1981