

УДК 624.07:534.1

## ДЕФОРМАЦИИ ПРОТЯЖЕННЫХ УПРУГИХ ТЕЛ НА ОРБИТЕ

ЛОМАЧЕНКО А. И., МАМАЛЫГА В. М.

В настоящее время большое внимание уделяется изучению перспектив создания крупногабаритных космических конструкций, размеры которых могут достигать нескольких сотен и тысяч метров. Существует ряд проектов таких конструкций различного назначения: солнечные электростанции космического базирования [1, 2], неограниченно наращиваемый космический радиотелескоп [3], крупногабаритные аппараты для глобальных систем связи и исследования природных ресурсов Земли [4]. Исключительно важным вопросом при создании системы управления движением таких «гибких» аппаратов в силу их значительной протяженности является изучение динамики конструкции, в частности — анализ деформаций и колебаний элементов конструкции.

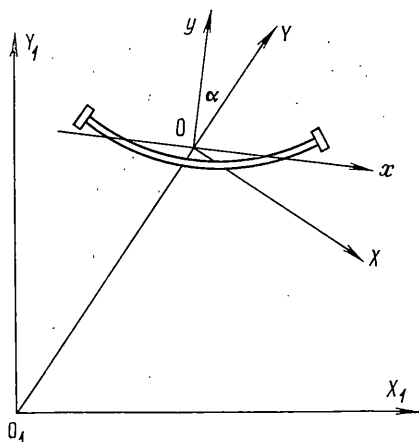
В данной статье найдены деформации протяженных конструкций в виде упругой балки с грузами на концах и пластины, вызванные действием гравитационных сил на околоземной орбите. Определены частоты колебаний упругой балки, ориентированной в плоскости орбиты.

1. Рассматривается конструкция в виде упругой балки с закрепленными грузами на концах. Для описания ее движения на круговой околоземной орбите введем следующие прямоугольные системы координат: инерциальную систему  $O_1X_1Y_1Z_1$ , орбитальную  $OXYZ$  и связанную  $Oxyz$ . Начало системы координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  совпадает с центром Земли, оси  $O_1X_1$  и  $O_1Y_1$  лежат в плоскости орбиты. Полус орбитальной системы координат  $OXYZ$  совпадает с центром масс деформированной конструкции, ось  $OX$  ориентирована вдоль вектора скорости движения точки  $O$ , направление оси  $OY$  совпадает с направлением вектора  $O_1O=R$ . Оси связанной системы координат  $Oxyz$  совпадают с главными центральными осями инерции деформированной конструкции. Введенные системы координат изображены на фиг. 1 (оси  $O_1Z_1$ ,  $OZ$  и  $Oz$  не показаны). Движение балки изучается в плоскости орбиты.

Пусть центр масс деформированной конструкции движется по орбите с постоянной угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Далее будет показано, что при определенных весьма неограничительных условиях это предположение выполняется.

Деформация балки изучается в рамках линейной теории тонких прямолинейных стержней. Упругие смещения принимаются малыми и направлены перпендикулярно упругой оси недеформированного стержня  $Ox$ .

Здесь приняты следующие обозначения:  $\rho_0(x)$  — линейная плотность балки,  $E$  — модуль Юнга материала балки,  $I(x)$  — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через центр инерции



Фиг. 1

сечения перпендикулярно плоскости изгиба,  $l$  — половина длины балки,  $\alpha(t)$  — угол поворота связанной системы координат относительно орбитальной (угол тангажа),  $m$  — масса каждой из материальных точек, расположенных на концах балки,  $\mu$  — гравитационная постоянная Земли.

Выведем уравнения движения рассматриваемой системы. Обозначим через  $\mathbf{r}(t, s)$  радиус-вектор, проведенный из центра Земли к точке  $S$  упругой линии балки, абсцисса которой в связанной системе координат равна  $s$ ,  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  — вектор абсолютной угловой скорости вращения связанной системы координат. В связанной системе координат  $Oxyz$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, s) &= (R \sin \alpha(t) + s, R \cos \alpha(t) + u(t, s), 0) \\ \boldsymbol{\Omega}(t) &= (0, 0, -\omega + \alpha_t(t)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $R$  — расстояние  $O_1O$ ,  $u(t, s)$  — ордината точки упругой линии балки с абсциссой  $s$  в момент времени  $t$ , а нижний индекс  $t$  здесь и в дальнейшем обозначает производную по времени, вычисленную в связанной системе координат.

Абсолютное ускорение точки  $S$  определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{W}(t, s) = \mathbf{r}_{tt}(t, s) + 2\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}_t(t, s) - |\boldsymbol{\Omega}(t)|^2 \mathbf{r}(t, s) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}(t)}{dt} \times \mathbf{r}(t, s) \quad (1.2)$$

Возьмем на упругой линии балки произвольную точку  $P$ , радиус-вектор которой равен  $\mathbf{r}(t, x)$ , и разобьем систему на две подсистемы плоскостью, перпендикулярной упругой линии и проходящей через  $P$ . Подсистемы, расположенные слева и справа от указанного сечения, будем обозначать символами  $B$  и  $C$  соответственно. Главный момент сил, действующих на элементы подсистемы  $C$ , относительно точки  $P$  для тонкого стержня равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0(t, x) &= \int_x^l \rho(s) [\mathbf{r}(t, s) - \mathbf{r}(t, x)] \times \mathbf{W}(t, s) ds \\ \rho(s) &= \rho_0(s) + m\delta(s-l) + m\delta(s+l) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Вектор  $\mathbf{M}_0(t, x)$  имеет ненулевую проекцию только на ось  $Oz$ . Обозначим ее через  $M_0(t, x)$ .

По известной теореме механики главный момент сил, приложенный к системе, равен главному моменту внешних сил. К подсистеме  $C$  приложены гравитационные силы и упругие силы, действующие в разделяющем сечении со стороны подсистемы  $B$ . Момент гравитационных сил относительно точки  $P$  равен

$$\mathbf{M}_1(t, x) = -\mu \int_x^l \rho(s) [\mathbf{r}(t, s) - \mathbf{r}(t, x)] \times \frac{\mathbf{r}(t, s)}{r^3(t, s)} ds \quad (1.4)$$

Вектор  $\mathbf{M}_1(t, x)$  имеет ненулевую проекцию только на ось  $Oz$ . Обозначим ее через  $M_1(t, x)$ .

Момент сил упругости относительно оси, проходящей через точку  $P$  перпендикулярно плоскости изгиба, равен [5]:

$$M_2(t, x) = -EI(x) u_{xx}(t, x) \quad (1.5)$$

Здесь и в дальнейшем нижний индекс  $x$  означает частную производную по пространственной координате  $x$ .

В силу изложенного выше справедливо соотношение

$$M_0(t, x) = M_1(t, x) + M_2(t, x) \quad (1.6)$$

Подставляя (1.1)–(1.5) в (1.6), после преобразований получим соотношение

$$\begin{aligned} & \int_x^l \rho(s) \{ (s-x) [u_{tt}(t, s) - \omega^2 (R \cos \alpha(t) + u(t, s)) + 2\omega \alpha_t(t) u(t, s) - \\ & - \alpha_t^2(t) u(t, s) + \alpha_{tt}(t) s] - [u(t, s) - u(t, x)] [-2\alpha_t(t) u_t(t, s) + 2\omega u_t(t, s) - \\ & - \omega^2 (R \sin \alpha(t) + s) + 2\omega \alpha_t(t) s - \alpha_t^2(t) s - \alpha_{tt}(t) u(t, s)] \} ds = \\ & = \mu \int_x^l \rho(s) \{ [u(t, s) - u(t, x)] [R \sin \alpha(t) + s] - (s-x) [R \cos \alpha(t) + u(t, s)] \} \times \\ & \times \{ R^2 + s^2 + u^2(t, s) + 2R[s \sin \alpha(t) + u(t, s) \cos \alpha(t)] \}^{-1/2} ds - EI(x) u_{xxx}(t, x) \end{aligned}$$

Дифференцируя это соотношение по  $x$ , получим выражение, которое будет использовано в дальнейшем

$$\begin{aligned} & \int_x^l \rho(s) \{ -u_{tt}(t, s) + \omega^2 [R \cos \alpha(t) + u(t, s)] - 2\omega \alpha_t(t) u(t, s) + \\ & + \alpha_t^2(t) u(t, s) - \alpha_{tt}(t) s + u_x(t, x) [-2\alpha_t(t) u_t(t, s) + 2\omega u_t(t, s) - \\ & - \omega^2 (R \sin \alpha(t) + s) + 2\omega \alpha_t(t) s - \alpha_t^2(t) s - \alpha_{tt}(t) u(t, s)] \} ds = \\ & = \mu \int_x^l \rho(s) \{ -u_x(t, x) [R \sin \alpha(t) + s] + R \cos \alpha(t) + u(t, s) \} \{ R^2 + s^2 + u^2(t, s) + \\ & + 2R[s \sin \alpha(t) + u(t, s) \cos \alpha(t)] \}^{-1/2} ds - \partial [EI(x) u_{xxx}(t, x)] / \partial x \end{aligned} \quad (1.7)$$

После дифференцирования выражения (1.7) по  $x$  получим уравнение движения балки

$$\begin{aligned} & \partial^2 [EI(x) u_{xxx}(t, x)] / \partial x^2 = \rho_0(x) \{ [u_x(t, x) (R \sin \alpha(t) + x) - \\ & - R \cos \alpha(t) - u(t, x)] F(t, x) - u_{tt}(t, x) - 2\omega \alpha_t(t) u(t, x) + \\ & + \alpha_t^2(t) u(t, x) - \alpha_{tt}(t) x + u_x(t, x) [-2\alpha_t(t) u_t(t, x) + 2\omega u_t(t, x) + \\ & + 2\omega \alpha_t(t) x - \alpha_t^2(t) x - \alpha_{tt}(t) u(t, x)] \} - \\ & - u_{xxx}(t, x) \int_x^l \rho(s) \{ [R \sin \alpha(t) + s] F(t, s) - 2\alpha_t(t) u_t(t, s) + 2\omega u_t(t, s) + \\ & + 2\omega \alpha_t(t) s - \alpha_t^2(t) s - \alpha_{tt}(t) u(t, s) \} ds \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$F(t, s) = \mu \{ R^2 + s^2 + u^2(t, s) + 2R[s \sin \alpha(t) + u(t, s) \cos \alpha(t)] \}^{-1/2} - \omega^2$$

Выпишем уравнение изменения момента количества движения в связанной системе координат

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^l \rho(s) \mathbf{r}'(t, s) \times \left\{ -\mu \frac{\mathbf{r}(t, s)}{r^3(t, s)} + |\Omega(t)|^2 \mathbf{r}'(t, s) - \mathbf{r}_{tt}'(t, s) - 2\Omega(t) \times \mathbf{r}_t'(t, s) - \right. \\ & \left. - \frac{d\Omega(t)}{dt} \times \mathbf{r}'(t, s) \right\} ds = 0, \quad \mathbf{r}'(t, s) = \mathbf{r}(t, s) - \mathbf{R}(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя выражения (1.1) в (1.9), после несложных преобразований получим

$$\int_{-l}^l \rho(s) \{ \mu R [s \cos \alpha(t) - u(t, s) \sin \alpha(t)] [R^2 + s^2 + u^2(t, s) + 2R(s \sin \alpha(t) + u(t, s) \cos \alpha(t))]^{-3/2} + 2u(t, s) u_t(t, s) [\alpha_t(t) - \omega] + \alpha_{tt}(t) [s^2 + u^2(t, s)] \} ds = 0 \quad (1.10)$$

Интегродифференциальные уравнения (1.8) и (1.10) описывают движение балки с грузами в плоскости орбиты.

Определим связь между  $\omega$  и  $R$ . Для этого воспользуемся соотношением, вытекающим из условия равенства сил инерции внешним силам

$$\int_{-l}^l \rho(s) \left[ \mathbf{W}(t, s) + \frac{\mu \mathbf{r}(t, s)}{r^3(t, s)} \right] ds = 0$$

В проекции на ось  $Oy$  это выражение с учетом (1.1), (1.2) примет вид

$$\int_{-l}^l \rho(s) \{ \mu [R \cos \alpha(t) + u(t, s)] r^{-3}(t, s) - \omega^2 R \cos \alpha(t) \} ds = 0 \quad (1.11)$$

2. Введем безразмерные переменные  $u' = u/l$ ,  $x' = x/l$  (штрихи в дальнейшем опускаются). Деформации балки изучаются при  $\rho_0(x) = \rho_0 = \text{const}$ ,  $I(x) = I = \text{const}$  и следующих условиях:

$$u(t, x) = O(l/R), \quad \alpha(t) \ll 1, \quad m/(\rho_0 l) = O(1), \quad \eta^4 = 3\omega^2 \rho_0 l^4 / (EI) = O(1) \quad (2.1)$$

Соотношение (1.11) при условиях (2.1) может быть преобразовано к виду

$$\frac{\mu}{R^3} = \omega^2 \left[ 1 + \frac{1+3m/(\rho_0 l)}{1+m/(\rho_0 l)} \frac{l^2}{2R^2} + o\left(\frac{l^2}{R^2}\right) \right] \quad (2.2)$$

В качестве начальных условий для переменной  $\alpha(t)$  примем

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \alpha_t(0) = 0 \quad (2.3)$$

Рассмотрим интервал времени  $0 < t < T$ , такой, что  $T \ll \omega^{-1}$ .

Тогда, учитывая принятые допущения (2.1), условия (2.3) и выражение (2.2), преобразуем уравнения (1.8) и (1.10) к виду

$$\eta^{-4} u_{xxxx} = u - \gamma + \left( \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha_{tt}}{3\omega^2} \right) x + \frac{l}{2R} x^2 - \frac{u_{tt}}{3\omega^2} + O\left(\frac{l^2}{R^2}\right)$$

$$\alpha_{tt} - 3\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + O(l^2/R^2) = 0$$

$$\gamma = l[1 + 3m/(\rho_0 l)] / [6R(1 + m(\rho_0 l))]$$

Отсюда следует, что конфигурация балки задается уравнением

$$\eta^{-4} u_{xxxx} = u - \gamma + \frac{l}{2R} x^2 - \frac{u_{tt}}{3\omega^2} \quad (2.4)$$

Из условия равенства нулю момента сил упругости на концах балки и уравнения (1.7) при  $x = \pm l$  получим следующие краевые условия:

$$u_{xx}(t, -1) = u_{xx}(t, 1) = 0, \quad \eta^{-4} u_{xxx}(t, -1) =$$

$$= \frac{m}{\rho_0 l} \left[ u(t, -1) - \gamma + \frac{l}{2R} - \frac{u_{tt}(t, -1)}{3\omega^2} \right] \quad (2.5)$$

$$\eta^{-4} u_{xxxx}(t, 1) = -\frac{m}{\rho_0 l} \left[ u(t, 1) - \gamma + \frac{l}{2R} - \frac{u_{tt}(t, 1)}{3\omega^2} \right]$$

Решение уравнения (2.4) при краевых условиях (2.5) будем искать в виде  $u(t, x) = u(x) + v(t, x)$ , где  $u(x)$  есть решение статической задачи

$$\eta^{-4} u_{xxxx}(x) = u(x) - \gamma + \frac{l}{2R} x^2, \quad u_{xx}(\pm 1) = 0, \quad (2.6)$$

$$\eta^{-4} u_{xxxx}(\pm 1) = \mp \frac{m}{\rho_0 l} \left[ u(\pm 1) - \gamma + \frac{l}{2R} \right]$$

а  $v(t, x)$  удовлетворяет уравнению упругих колебаний балки

$$\eta^{-4} v_{xxxx}(t, x) = v(t, x) - v_{tt}(t, x) / (3\omega^2)$$

с краевыми условиями

$$v_{xx}(t, \pm 1) = 0$$

$$\eta^{-4} v_{xxxx}(t, \pm 1) = \mp \frac{m}{\rho_0 l} \left[ v(t, \pm 1) - \frac{v_{tt}(t, \pm 1)}{3\omega^2} \right]$$

Решение статической задачи (2.6) имеет вид

$$u(x) = \frac{l}{R} \left\{ \frac{1 + 3m/(\rho_0 l)}{6[1 + m/(\rho_0 l)]} - \frac{x^2}{2} + \eta^{-2} \left[ \left( \sin \eta + \frac{m}{\rho_0 l} \eta \cos \eta \right) \operatorname{ch} \eta x - \left( \operatorname{sh} \eta + \frac{m}{\rho_0 l} \eta \operatorname{ch} \eta \right) \cos \eta x \right] \left[ \operatorname{sh} \eta \cos \eta + \sin \eta \operatorname{ch} \eta + 2 \frac{m}{\rho_0 l} \eta \operatorname{ch} \eta \cos \eta \right]^{-1} \right\}$$

Выражение для  $v(t, x)$  определяется формулой

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin(\Omega_n t + \varphi_n), \quad \Omega_n^2 = \omega_n^2 - 3\omega^2$$

где  $\omega_n$ , ( $n=1, 2, \dots$ ) — частоты поперечных колебаний свободной балки с грузами на концах,  $X_n(x)$  — амплитуды соответствующих колебаний.

Из последнего соотношения следует, что частоты малых колебаний балки на орбите меньше соответствующих частот колебаний свободной балки.

Максимальная статическая деформация конструкции равна

$$\Delta u_{\max} = u(1) - u(0) = \frac{l}{R} \left\{ -\frac{1}{2} + \eta^{-2} \left[ \sin \eta (\operatorname{ch} \eta - 1) - \operatorname{sh} \eta (\cos \eta - 1) + \frac{m}{\rho_0 l} \eta (\operatorname{ch} \eta - \cos \eta) \right] \left[ \operatorname{sh} \eta \cos \eta + \sin \eta \operatorname{ch} \eta + 2 \frac{m}{\rho_0 l} \eta \operatorname{ch} \eta \cos \eta \right]^{-1} \right\} = \frac{l}{R} \Phi \left( \eta, \frac{m}{\rho_0 l} \right) \quad (2.7)$$

Отметим, что для принятых допущений  $T \ll \omega^{-1}$  и (2.1) прогиб не зависит от угла ориентации  $\alpha$ .

Значения  $\Phi$  в зависимости от  $\eta$  представлены на фиг. 2, где кривая 1 соответствует случаю  $m/(\rho_0 l) = 1$ , а кривая 2 — случаю  $m/(\rho_0 l) = 0$ . Следует

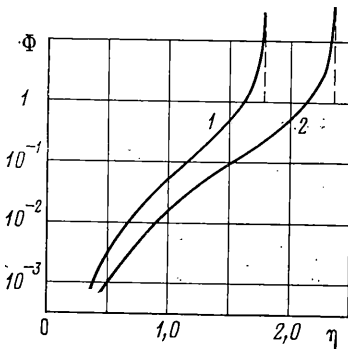
отметить, что существует критическое значение  $\eta^*$ , при приближении к которому прогиб стремится к бесконечности. Критическое значение  $\eta^*$  определяется из условия

$$\operatorname{th} \eta + \operatorname{tg} \eta + 2m\eta / (\rho_0 l) = 0$$

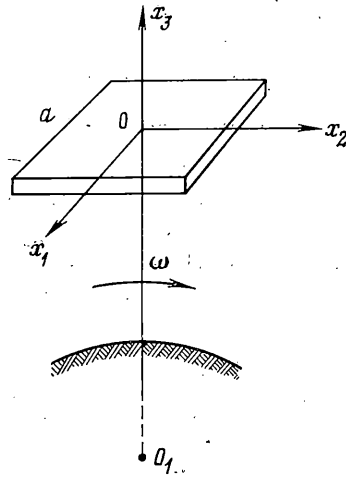
В предельном случае, когда  $\eta \ll 1$ , выражение (2.7) принимает более простой вид:

$$\Delta u_{\max} = \frac{11}{720} \frac{l}{R} \eta^4 \frac{1 + 61m / (11\rho_0 l)}{1 + m / (\rho_0 l)}$$

Причину значительного увеличения прогиба балки при  $\eta \rightarrow \eta^*$  качественно можно пояснить на примере простейшей механической системы типа осциллятора.



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим груз массы  $m_1$ , прикрепленный к спутнику массы  $M$  с помощью пружины, жесткость которой  $k$ , а длина в недеформированном состоянии  $l_1$ . Пусть центр масс спутника движется по круговой орбите радиуса  $R$ , и при этом пружина с грузом ориентирована вдоль радиуса-вектора, проведенного из центра тяготения в центр масс груза, а основание пружины движется по круговой орбите радиуса  $R+b$ .

Иследуем движение груза при  $m_1 \ll M$ . Тогда уравнение равновесия груза примет вид

$$-\mu m_1 / (R+b+l_1+\xi)^2 + m_1 \omega^2 (R+b+l_1+\xi) - k\xi = 0$$

где  $\xi$  — деформация пружины, а  $\omega^2 = \mu / R^3$ .

В случае, когда  $\xi / R = O[(b+l_1) / R]$ , имеем

$$m\omega^2 R [3(b+l_1) / R + 3\xi / R + O(\xi^2 / R^2)] - k\xi = 0$$

Отсюда с точностью до  $o(\xi / R)$  получим выражение для деформации пружины

$$\xi = (b+l_1) / [k(3m_1\omega^2)^{-1} - 1] = (b+l_1) / [\omega_1^2(3\omega^2)^{-1} - 1]$$

где  $\omega_1 = \sqrt{k / m_1}$  — собственная частота колебаний груза на пружине.

Для этой механической системы наблюдается аналогичный эффект: при  $\omega_1 = \sqrt{3} \omega$  деформация стремится к бесконечности. В действительности деформации пружины (так же как и уругой балки) вблизи критических значений параметров системы будут, разумеется, конечной величиной, но их в этом случае уже нельзя считать достаточно малыми и ограничиваться в уравнениях членами первого порядка малости.

3. Рассмотрим упругую тонкую квадратную пластину, изготовленную из однородного изотропного материала, центр масс которой движется по круговой околоземной орбите. Пусть пластина ориентирована таким образом, как показано на фиг. 3. Поверхность пластины в недеформированном состоянии перпендикулярна прямой, соединяющей центр масс пластины

с центром Земли, и система координат  $Ox_1x_2x_3$  связана с главными центральными осями инерции деформированной пластины. Используются также ранее введенные инерциальная система координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  и орбитальная система координат  $OXYZ$  (фиг. 1).

Исследование проводится в орбитальной системе координат, в которой центр масс пластины покоится. Пластина подвержена действию распределенной объемной нагрузки, обусловленной совместным действием гравитационных сил и сил инерции.

Введем следующие обозначения:  $\rho$  — поверхностная плотность пластины,  $a$  — длина стороны пластины,  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины,  $R$  — расстояние от центра Земли до центра масс пластины,  $u(x_1, x_2)$  — прогиб пластины,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала пластины.

Будем исследовать статическую деформацию пластины. На элемент пластины с массой  $dm = \rho dx_1 dx_2$  действуют только гравитационная и центробежная силы

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= (\omega^2 \mathbf{r}' - \mu \mathbf{r}/r^3) dm, \quad \mathbf{r} = (X_1, Y_1, Z_1) = \\ &= (x_2, R+u(x_1, x_2), x_1), \quad \mathbf{r}' = (X_1, Y_1, 0) = (x_2, R+u(x_1, x_2), 0) \end{aligned}$$

Поверхностная плотность поперечной нагрузки задается выражением

$$q(x_1, x_2) = \rho [R+u(x_1, x_2)] \{ \omega^2 - \mu [(R+u(x_1, x_2))^2 + x_1^2 + x_2^2]^{-3/2} \} \quad (3.1)$$

Далее деформация пластины определяется при следующих ограничениях:  $u/a \ll a/R \ll 1$ . В этом случае, сохраняя в (3.1) члены порядка  $a^2/R^2$ , приходим к выражению

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2) &= \rho \{ \omega^2 R [1 + o(a^2/R^2)] - \\ &- \mu R^{-2} [1 - 3(x_1^2 + x_2^2)/(2R^2) + o(a^2/R^2)] \} \end{aligned}$$

Из условия равенства нулю главного вектора действующих на пластину сил следует, что  $\omega^2 = \mu R^{-3} [1 - a^2/(4R^2)]$ . Используя полученное выражение для  $\omega$  и пренебрегая продольной составляющей действующих сил, запишем уравнение статического прогиба в виде

$$D \Delta^2 u(x_1, x_2) = \frac{\mu \rho}{R^2} \left( -\frac{a^2}{4R^2} + \frac{3}{2} \frac{x_1^2 + x_2^2}{R^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$$

где  $\Delta^2$  — бигармонический оператор.

Выпишем краевые условия для (3.2), соответствующие свободным краям пластины

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0, \quad x_1 = \pm \frac{a}{2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0, \quad x_2 = \pm \frac{a}{2}$$

Для решения задачи (3.2)–(3.3) использовался метод конечных элементов. Применить этот метод непосредственно для бигармонического уравнения достаточно сложно, так как возникают трудности с выбором базисных функций [6].

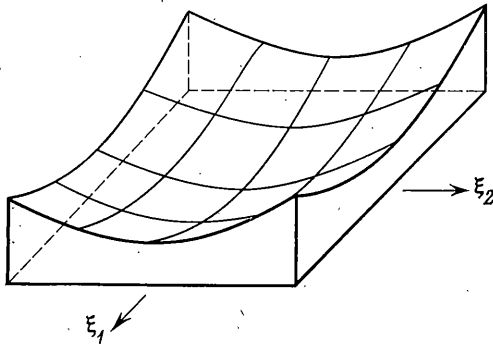
Преобразуем задачу (3.2)–(3.3) к более удобному виду. Для этого в качестве новых переменных выберем углы наклона нормали к срединной поверхности  $\varphi_i = \partial u / \partial x_i$  ( $i=1, 2$ ) и рассмотрим упругие моменты в сечении

ях, перпендикулярных осям  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , отнесенные к единице длины

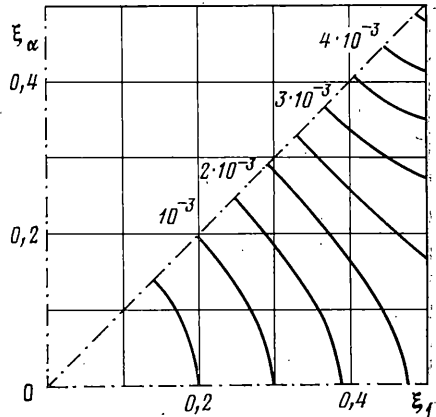
$$m_{11} = -D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

$$m_{22} = -D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right), \quad m_{12} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Для них выполняются равенства  $\partial m_{ij} / \partial x_j = Q_i$  ( $i=1, 2$ ), где  $Q_i$  — перерезывающие силы. Здесь и далее подразумевается суммирование по повто-



Фиг. 4



Фиг. 5

ряющемуся индексу. Перерезывающие силы  $Q_i$  выражаются через функцию прогиба в виде

$$Q_i = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u \quad (i=1, 2) \quad (3.4)$$

Используя (3.2) и (3.4), легко показать, что

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = -q(x_1, x_2) = -\frac{\mu \rho}{R^2} \left[ -\frac{a^2}{4} + \frac{3}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right]$$

Выражения для  $Q_i$  могут быть записаны в виде

$$Q_i = -\mu \rho R^{-2} \left[ -\frac{1}{8} a^2 x_i + \frac{1}{2} x_i^3 + f_i(x_1, x_2) \right] \quad (i=1, 2) \quad (3.5)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  удовлетворяют уравнению  $\text{div } \mathbf{f} = 0$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ . Согласно (3.3), должны быть выполнены условия  $Q_i = 0$  при  $x_i = \pm a/2$ . Откуда с учетом (3.5) имеем

$$\mathbf{f}_n|_{\Gamma} = 0 \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{f}_n$  — составляющая вектора  $\mathbf{f}$ , нормальная к границе  $\Gamma$  пластины.

Покажем, что  $f_1$  и  $f_2$  тождественно равны нулю. Из (3.4) и (3.5) следует, что  $\text{rot } \mathbf{f} = 0$ . Если векторная функция удовлетворяет условиям  $\text{div } \mathbf{f} = 0$  и  $\text{rot } \mathbf{f} = 0$ , то очевидно, что существует такая скалярная функция  $F(x_1, x_2)$ , для которой справедливы соотношения  $\mathbf{f} = -\nabla F$ ,  $\Delta F = 0$ . Краевые условия для  $F$ , согласно (3.6), имеют вид

$$[\partial F / \partial \mathbf{n}]_{\Gamma} = 0 \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к границе  $\Gamma$  пластины.

Таким образом, для функции  $F(x_1, x_2)$  сформулирована задача Ней-



мана, которая при краевых условиях (3.7) имеет решение  $F = \text{const}$ , т. е.  $f = 0$ .

Без ограничения общности в силу симметрии задачи достаточно рассмотреть деформацию четверти пластины. Окончательно задача (3.2)–(3.3) преобразуется к уравнениям следующего вида:

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\mu \rho}{R^4} \left( \frac{a^2}{8} x_i - \frac{x_i^3}{2} \right)$$

$$m_{11} = -D \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right), \quad m_{22} = -D \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right)$$

$$m_{12} = -\frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right)$$

где  $\varphi_i = \partial u / \partial x_i$  ( $i=1, 2$ ),  $\varphi_i|_{x_i=0} = 0$ ,  $n_j m_{ij}|_{x_i=a/2} = 0$ .

Задача решалась численно методом конечных элементов, при этом использовался пакет прикладных программ, разработанных в Институте физики высоких энергий<sup>1</sup>.

В качестве конечных элементов выбирались прямоугольные треугольники. Число элементов в расчетах бралось равным 400. Базисными функциями метода конечных элементов являлись кусочно-линейные функции. Задача решалась в безразмерных переменных  $\xi_i = x_i / a$ ,  $u' = 4DR^4 u / (\mu \rho a^6)$ .

На фиг. 4, 5 представлены результаты расчетов – общий вид деформированной поверхности (фиг. 4) и линии равных прогибов для  $u'$  (фиг. 5). За начало отсчета прогиба принималось положение центра деформированной пластины.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько за ценные замечания и Ю. И. Португалова за помощь в работе с пакетом прикладных программ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ванке В. А., Лопухин В. М., Саввин В. Л. Проблемы солнечных космических электростанций. – Успехи физ. наук, 1977, т. 123, вып. 4, с. 633–655.
2. Глазер П. Э. Перспективы космической солнечной энергетики. – Ракетная техн. и космонавтика, 1979, т. 17, № 1, с. 176–189.
3. Буякас В. И., Гвамичава А. С., Горшков Л. А. и др. Неограниченно наращиваемый космический радиотелескоп. – Космические исследования, 1978, т. 16, вып. 5, с. 767–777; вып. 6, с. 924–936.
4. Bekey I., Mayer H. 1980–2000 raising our sights for advanced space systems. – Astronaut. and Aeronaut., 1976, v. 14, No. 7–8, p. 34–63.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. 736 с.
6. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. 349 с.

Москва

Поступила в редакцию  
25.III.1984

<sup>1</sup> Дайковский А. Г., Португалов Ю. И. Пакет программ для решения двумерных задач магнитостатики методом конечных элементов. – Препринт Ин-та физики высоких энергий. Серпухов, 1978, № ОМВТ 78–68. 25 с.

Баранов А. М., Дайковский А. Г., Португалов Ю. И., Федосеев А. И. Программа STRESS для расчета упругих напряжений в СП магнитах. – Препринт Ин-та физики высоких энергий. Серпухов, 1979, № ОМВТ 79–49. 12 с.