МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1982

УДК 539.3:534.1

ВЛИЯНИЕ СТАТИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ

РОГАЧЕВА Н. Н.

Асимптотическим методом, предложенным в [1], проведено качественное исследование влияния предварительного статического напряженного состояния на свободные колебания оболочек.

В работах, посвященных этому вопросу, как правило, для оболочек частного вида на основе полученного решения делаются выводы о влиянии статической нагрузки на колебания. Например, в [2] изучено влияние предварительной статической осесимметричной нагрузки на динамическое напряженное состояние с большим показателем изменяемости. Расчет колебаний цилиндрической оболочки с учетом статической нагрузки выполнен в [3, 4].

Полученные в публикуемой работе результаты дают возможность, не решая задачи, оценить влияние статической нагрузки на свободные колебания произвольной оболочки.

1. Выберем систему криволинейных координат α_1, α_2, совпадающую с линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Будем считать, что колебания происходят по закону $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота.

Так как величины статического напряжения состояния входят лишь в уравнения равновесия, то выпишем их и будем анализировать. Статические усилия и моменты отметим верхним индексом (s). Используемые ниже обозначения и терминология взяты из [1].

Уравнения равновесия с учетом статических усилий и моментов имеют следующий вид:

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{i*}}{\partial \xi_i}+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ij*}}{\partial \xi_j}+\eta^\theta Rk_j(T_{i*}-T_{j*})+\eta^\theta Rk_i(S_{ij*}+S_{ji*})-$$

$$-\eta^{\lambda_1}\frac{R}{R_i}N_{i*}+[\eta^{\lambda_2}(\overset{(s)}{N_{i*}}\varkappa_{i*}-\overset{(s)}{N_{j*}}\overset{(j)}{\tau_*})-\eta^{\sigma-2b}(\overset{(s)}{S_{ij*}}\zeta_{i*}+\overset{(s)}{T_{j*}}\zeta_{j*})]=$$

$$=\eta^{\lambda_3}\mu\, 2h\rho\omega^2 v_{i*}$$

$$\eta^c\left(\frac{T_{1*}}{R_1}+\frac{T_{2*}}{R_2}\right)+\eta^{\lambda_4}\left(\frac{1}{R}\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_{1*}}{\partial \xi_1}+\frac{1}{R}\frac{1}{A_2}\frac{\partial N_{2*}}{\partial \xi_2}+\eta^\theta k_2 N_{1*}+\eta^\theta k_1 N_{2*}\right)+$$

$$+\eta^{\lambda_5}\frac{1}{R}(\overset{(s)}{S_{12*}}\overset{(1)}{\tau_*}+\overset{(s)}{T_{1*}}\varkappa_{1*}+\overset{(s)}{T_{2*}}\varkappa_{2*}-\overset{(s)}{S_{21}}\overset{(2)}{\tau_*})=2h\rho\omega^2\frac{\mu}{R}w_* \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial G_{i*}}{\partial \xi_i}-\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji*}}{\partial \xi_j}+\eta^\theta Rk_j(G_{i*}-G_{j*})-\eta^\theta Rk_i(H_{ij*}+H_{ji*})-$$

$$-N_{i*}-\eta^{\lambda_6}(-\overset{(s)}{H_{ji*}}\zeta_{j*}+\overset{(s)}{G_{i*}}\zeta_{i*})=0,\qquad k_j=\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}$$

$$\lambda_1=2-2\theta+2a-2b+c,\qquad \lambda_2=2-\theta+2a-2b-2r+\sigma$$

$$\lambda_3=2\theta-2a-2c, \qquad \lambda_4=2-4\theta+2c+2a-2b$$

$$\lambda_5=\sigma-2\theta+2c+2a-2b, \qquad \lambda_6=\sigma+2\theta-2a-c-2b$$

Каждое из равенств, содержащее индексы i и j, является двойным: одно из них получается при $i=1$, $j=2$, а другое — при $i=2$, $j=1$; T_i, S_{ij}, N_i, G_i, H_{ij} — усилия и моменты, R_i — радиусы кривизны, A_i — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

В формулы (1.1) введены звездочки и обозначения ξ_i, R, η, μ, которые будут использованы в дальнейшем (заменим их на α_i, 1, 1, -1 соответственно, а звездочки опустим).

Для анализа уравнений (1.1) воспользуемся асимптотическим методом исследования системы дифференциальных уравнений теории оболочек [1, 5] и будем придерживаться принятой в [5] классификации динамических интегралов, в соответствии с которой рассмотрим квазипоперечные колебания с малой изменяемостью, квазитангенциальные колебания, квазипоперечные колебания с большой изменяемостью, колебания релеевского типа, сверхнизкие колебания.

Следуя [5], для перечисленных типов свободных колебаний, за исключением квазипоперечных колебаний с показателем изменяемости, равным $^1/_2$, полное решение системы уравнений теории оболочек будем представлять в виде суммы решений — решения главной задачи, из уравнений которой с некоторой точностью определяется частота свободных колебаний и решения дополнительной задачи, произволы которой позволяют снять невязки в краевых условиях, появившиеся после решения главной задачи. Например, для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью решение основной задачи заключается в интегрировании безмоментных уравнений с удовлетворением тангенциальных граничных условий, нетангенциальные граничные условия удовлетворяются при расчете дополнительного напряженного состояния, соответствующего интегралам с большой изменяемостью.

Для искомых величин различных типов колебаний в [5] приведены асимптотические представления. Ниже воспользуемся ими. В дальнейшем для предварительно нагруженной оболочки будем выписывать только те уравнения главной и дополнительной задачи, которые отличаются от соответствующих уравнений ненагруженной оболочки.

2. Рассмотрим предварительное статическое напряженное состояние. Назовем статической нагрузкой первого рода такую нагрузку, которая при достижении критического значения вызывает потерю устойчивости (например, внешнее давление). Под критической нагрузкой всегда будет пониматься такая нагрузка, которая в рамках линейной теории вызывает потерю устойчивости.

Нагрузкой второго рода условимся считать нагрузку, при которой не может быть потери устойчивости (например, внутреннее давление).

Относительно статического напряженного состояния сделаем следующие предположения: показатель изменяемости основного напряженного состояния мал, для простоты будем его считать равным нулю; статическая нагрузка первого рода не превосходит критического значения.

Выпишем из [5] асимптотические представления тех усилий, моментов и перемещений, которые понадобятся в дальнейшем

$$\frac{w^{(s)}}{R}=\eta^{\sigma-2r}w_*^{(s)}, \quad \frac{1}{2Eh}S_{ij}^{(s)}=\eta^{\sigma}S_{ij*}^{(s)}, \quad \frac{1}{2Eh}T_i^{(s)}=\eta^{\sigma}T_{i*} \qquad (2.1)$$

$$\frac{1}{2Eh}N_i^{(s)}=\eta^{\sigma+2-2r}N_{i*}^{(s)}, \quad \frac{1}{2EhR}G_i^{(s)}=\eta^{\sigma+2-2r}G_{i*}^{(s)}, \quad \frac{1}{2EhR}H_{ij}^{(s)}=\eta^{\sigma+2-2r}H_{ij*}^{(s)}$$

Здесь и далее η — малый параметр, равный отношению полутолщины оболочки h к характерному размеру R. В формулах (2.1) все величины со звездочками безразмерные и одного порядка. Число σ в показателе степени характеризует интенсивность внешней нагрузки, наибольшие компоненты которой есть величины порядка η^{σ}. Число r равно нулю для безмоментного основного напряженного состояния и равно единице для чисто моментного напряженного состояния.

Из второго предположения следует, что величина σ должна быть не меньше единицы, так как значения критических нагрузок среди критических нагрузок в разных задачах не превышают величин порядка η^1 [6].

В дальнейшем будем считать, что статический расчет выполнен и все величины предварительного напряженного состояния известны.

3. В [5] показано, что оболочка может совершать колебания различных видов, различающихся между собой асимптотикой. Выпишем эти асимптотические представления

$$\frac{v_i}{R}=\eta^{\lambda_7}v_{i*},\quad \frac{w}{R}=\eta^{c}w_*,\quad \left(\frac{T_i}{2Eh},\frac{S_{ij}}{2Eh}\right)=\eta^{\lambda_8}(T_{i*},S_{ij*}),\quad \frac{N_i}{2Eh}=\eta^{\lambda_{10}}N_{i*}$$

$$\left(\frac{G_i}{2EhR},\frac{H_{ij}}{2EhR}\right)=\eta^{\lambda_9}(G_{i*},H_{ij*}),\quad R\zeta_i=\eta^{\lambda_{11}}\zeta_{i*},\quad (R\varkappa_i,R\tau^{(i)})=\eta^{\lambda_{12}}(\varkappa_{i*},\overset{(i)}{\tau_*})\tag{3.1}$$

$$\lambda_7=\theta-2a,\quad \lambda_8=-2a+2b,\quad \lambda_9=2-2\theta+c$$

$$\lambda_{10}=2-3\theta+c,\quad \lambda_{11}=-\theta+2a,\quad \lambda_{12}=-2a+c$$

Числа a, b, c принимают различные значения в зависимости от типа свободных колебаний оболочки. Их значения будут приведены ниже, θ — показатель изменяемости по координатам α_i напряженно-деформированного состояния, которое возникает при колебаниях рассматриваемого вида. Это значит, что если заменить переменные α_i на ξ_i по формулам $\alpha_i=\eta^{\theta}R\xi_i$, то дифференцирование по ξ_i не приводит к существенному увеличению искомых функций.

Введем безразмерный множитель μ следующим образом $\mu=-\rho R\omega^2/E$. В уравнения равновесия подставим асимптотики (3.1), (2.1), выполним замену переменных α_i, учтем выражение для μ; в результате получим уравнения (1.1), в правых частях которых множитель $2h\rho\omega^2$ следует заменить единицей.

Растяжение масштаба по координатам и введение асимптотики позволяют в дальнейшем иметь дело с уравнениями, в которых все искомые величины и их производные одного порядка малости, а порядок каждого члена уравнения оценивается стоящим перед ним множителем η в некоторой степени.

1. Рассмотрим квазипоперечные колебания с малой изменяемостью ($0\leqslant\theta<{}^1/_2$). Напряженное состояние будем определять, решая главную и дополнительную задачи.

Для величин главной задачи имеет место асимптотическое представление (3.1), в котором надо положить $a=c=b=r=0$. Подставив эти значения в (1.1), заметим, что наибольшие члены, учитывающие влияние предварительного напряженного состояния, входят в третье уравнение равновесия с множителем $\eta^{\sigma-2\theta}$. Так как σ не меньше единицы, а θ меньше ${}^1/_2$, то показатель степени $\sigma-2\theta$ всегда положительное число, поэтому с точностью до малых величин порядка $\eta^{\sigma-2\theta}$ при решении главной задачи влиянием статического напряженного состояния можно пренебречь. Значит, при определении частот свободных квазипоперечных колебаний можно пользоваться обычными уравнениями главной задачи ненагруженных оболочек. Такая слабая зависимость частот от предварительного напряженного состояния, как увидим в дальнейшем, всегда имеет место, когда форма колебаний сильно отличается от формы потери устойчивости под действием рассматриваемой статической нагрузки.

2. Рассмотрим квазитангенциальные колебания. Для главной задачи в этом случае в формулах (3.1) следует положить $a=\theta$, $b=c=r=0$. При таких a, b, c, r наибольшие члены, учитывающие влияние статического напряженного состояния, входят в первые два уравнения равновесия (1.1). Они порядка η^{σ} по сравнению с главными членами уравнения, а так как $\sigma\geqslant 1$, то с принятой в теории оболочек точностью при решении главной задачи влиянием статического напряженного состояния можно пренебречь. Как и в случае квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью, частоты определяются без учета статического напряженного состояния. Отметим, что форма колебаний, как и в предыдущем случае, не похожа на форму потери устойчивости под действием статической нагрузки.

4. Чтобы полностью исследовать напряженное состояние, рассмотрим дополнительную задачу.

Пусть край оболочки, совершающий квазипоперечные колебания с малой изменяемостью, совпадает с линией $\alpha_1=\text{const}$. Для искомых величин дополнительной задачи имеет место асимптотика, приведенная в [5], причем изменяемость искомых величин вдоль линий, ортогональных к краю, равна $^1/_2$.

Не останавливаясь на выводе разрешающего уравнения дополнительной задачи, который выполняется обычным образом, выпишем его, сохранив наибольший член статического напряженного состояния

$$\frac{1}{A_1^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4}-\frac{3(1-\nu^2)}{h^2}\frac{T_1^{(s)}}{2Eh}\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}+\frac{3(1-\nu^2)}{h^2}\left(\frac{1}{R_2^2}-\frac{w^2\rho}{E}\right)w=0 \tag{4.1}$$

Учитывая изменяемость по α_1, порядок величины $T_1^{(s)}/(2Eh)$ нетрудно получить, что второй член в (4.1), по сравнению с главным членом уравнения, имеет порядок $\eta^{\sigma-1}$. Отсюда следует, что для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью, как только значение σ приближается к единице, член, учитывающий влияние статического напряженного состояния, становится соизмеримым с главными членами разрешающего уравнения дополнительной задачи, а так как смещения w главной и дополнительной задачи одного порядка [5], то при значениях $T_1^{(s)}/(2Eh)$ порядка η^1 статическая нагрузка влияет на формы колебаний в главных членах. Заметим, что изменяемость величин дополнительной задачи в направлении, перпендикулярном к краю, совпадает с изменяемостью формы потери устойчивости под действием статической нагрузки.

Из результатов [5] следует, что для квазитангенциальных колебаний ненагруженных оболочек вклад решения дополнительной задачи в полное решение мал. Можно показать, что этот вывод полностью сохраняется для предварительно нагруженных оболочек. Значит, предварительная нагрузка не влияет ни на формы, ни на частоты квазитангенциальных колебаний.

5. Пусть оболочка совершает квазипоперечные колебания с большой изменяемостью ($^1/_2\leqslant\theta<1$). Числа a, b, c, r принимают значения: $a=b=r=0$, $c=-1+2\theta$.

Рассмотрим уравнения (1.1) с учетом этих значений. Заметим, что наибольшие члены, содержащие статические усилия, входят в третье уравнение равновесия с множителем $\eta^{\sigma-2+2a}$. Этот множитель становится порядка единицы только тогда, когда θ из всех допустимых значений принимает значение $^1/_2$, а σ близко к единице. В этом случае в третьем уравнении равновесия следует сохранить слагаемые, содержащие статические усилия. Остальные уравнения после отбрасывания малых членов совпадают с уравнениями квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью ненагруженных оболочек.

Отметим, что форма квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью только при θ равном $^1/_2$ похожа на форму потери устойчивости.

У оболочки, которая имеет все свободные края, возможные колебания есть колебания релеевского типа. Для них следует в уравнениях (1.1) положить $a=c=0$, $b=1-2\theta$, $r=1$ $(0\leqslant\theta<{}^1/_2)$.

Как известно, для оболочек со всеми свободными краями характерна большая деформативность: так безразмерным усилиям T_{*i}, S_{ij*} порядка η^3 соответствуют безразмерные смещения w_* порядка η^1. Как видно из (1.1), влияние статического напряженного состояния оценивается множителем $\eta^{\sigma-2+2\theta}$. Простые рассуждения показывают, что в рамках линейной теории оболочек из-за малости смещений показатель степени η — всегда число положительное. Это значит, что частоты релеевского типа можно определить не учитывая статического напряженного состояния. Из аналогичных соображений следует, что и при вычислении дополнительного интеграла влиянием статического напряженного состояния можно пренебречь.

6. Рассмотрим сверхнизкие колебания, возникающие в открытых цилиндрических оболочках и в длинных цилиндрических оболочках. Для таких оболочек интегралы главной краевой задачи определяются из динамических уравнений обобщенного краевого эффекта [5].

Криволинейные координаты α_1, α_2 выберем таким образом, чтобы линии α_1 совпадали с образующими, а линии α_2 — с направляющими срединной поверхности, тогда главные радиусы кривизны и коэффициенты первой квадратичной формы будут задаваться следующим образом: $1/R_1=0$, $1/R_2\neq0$, $A_1=A_2=1$.

Как принято в асимптотическом методе, выполним растяжение координат α_1, α_2 по формулам $\alpha_1=\eta^pR\xi_1$, $\alpha_2=\eta^qR\xi_2$.

Согласно [1], показатели изменяемости p и q связаны соотношением

$$4q-2p=1 \quad (0\leqslant q<{}^1/_2) \tag{6.1}$$

Асимптотическое представление искомых величин цилиндрической оболочки имеет следующий вид:

$$\frac{w}{R}=w_*,\quad \frac{v_1}{R}=\eta^{2q-p}v_{1*},\quad \frac{v_2}{R}=\eta^q v_{2*}\quad \frac{T_1}{2Eh}=\eta^{1-2q}T_{1*},$$

$$\frac{T_2}{2Eh}=\eta^{1-2p}T_{2*},\quad \frac{S_i}{2Eh}=\eta^{1-p}S_{i*}$$

$$\frac{G_i}{2EhR}=\eta^{2-2q}G_{i*},\quad \frac{H_i}{2EhR}=\eta^{1+3q-3p}H_{i*},\quad \frac{N_1}{2Eh}=\eta^{1+2q-3p}N_{1*},$$

$$\frac{N_2}{2Eh}=\eta^{1+q-2p}N_{2*} \tag{6.2}$$

$$R\tau^{(i)}=\eta^{-q-p}\tau_*^{(i)},\quad R\varkappa_1=\eta^{-2p}\varkappa_{1*},\quad R\varkappa_2=\eta^{-2q}\varkappa_{2*},\quad R\zeta_1=\eta^{q-2p}\zeta_{1*},\quad R\zeta_2-\eta^{-p}\zeta_{2*}$$

Подставим в уравнения равновесия асимптотику (6.2), (2.1), заменим переменные α_1 и α_2, учтем (6.1); в результате получим

$$\frac{\partial T_{1*}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial S_{2*}}{\partial\xi_2}+\eta^{\sigma-1+2q}(\eta^{2-p}N_{1*}^{(s)}\varkappa_{1*}-\eta^{2-q}N_{2*}^{(s)}\tau_*^{(2)}-$$

$$-\eta^{q-p}S_{1*}^{(s)}\zeta_{1*}-T_{2*}^{(s)}\zeta_{2*})=\eta^{1}\mu v_{1*}$$

$$\frac{\partial T_{2*}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial S_{1*}}{\partial\xi_1}-\eta^{2q}\frac{N_{2*}}{R_2}+\eta^{\sigma-1+q+p}(\eta^{3/2}N_{2*}^{(s)}\varkappa_{2*}-$$

$$-\eta^{2-q}N_{1*}^{(s)}\tau_*^{(1)}-\eta^{q-p}T_{1*}^{(s)}\zeta_{1*}+S_{2*}^{(s)}\zeta_{2*})=\eta^{2q}\mu v_{2*}$$

$$\frac{T_{2*}}{R_2}+\frac{\partial N_{2*}}{\partial\xi_2}+\eta^{1-2q}\frac{\partial N_{1*}}{\partial\xi_1}+\eta^{\sigma-2+2q}(\eta^{q+p}S_{1*}^{(s)}\tau_*^{(1)}+$$

$$+\eta^{q+p}S_{2*}^{(s)}\tau_*^{(2)}+\eta^{1-2q}T_{1*}^{(s)}\varkappa_{1*}+T_{2*}^{(s)}\varkappa_{2*})=\frac{\mu}{R}w_* \qquad (6.3)$$

$$\frac{\partial G_{1*}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial H_{2*}}{\partial\xi_2}-\frac{N_{1*}}{R_2}-\eta^{\sigma+2q}(H_{2*}^{(s)}\zeta_{2*}+\eta^{q}G_{1*}^{(s)}\zeta_{1*})=0$$

$$\frac{\partial G_{2*}}{\partial\xi_2}-\eta^{1-2q}\frac{\partial H_{1*}}{\partial\xi_1}-\frac{N_{2*}}{R_2}+\eta^{\sigma+1}H_{1*}^{(s)}\zeta_{1*}-\eta^{\sigma+3q-p}G_{2*}^{(s)}\zeta_{2*}=0$$

Из уравнений (6.3) видно, что наибольшие члены со статическими усилиями входят в третье уравнение равновесия. Если в предварительном напряженном состоянии наибольшим является $T_2^{(s)}$, то при значениях $T_{2*}^{(s)}$ порядка η^{2-2q} влияние статической нагрузки проявляется в самом грубом приближении. Если наибольшим является сдвигающее усилие $S_i^{(s)}$ то статические усилия следует учитывать, как только $S_{i*}^{(s)}$ достигнет величины порядка η^{2-3q+p}. Если наибольшим из предварительных усилий является $T_1^{(s)}$, то влияние статического напряженного состояния на главные члены асимптотики проявляется при $T_{1*}^{(s)}$ порядка η^1.

В уравнениях дополнительной задачи статические члены соизмеримы с главными членами только при значениях σ, равных единице.

Для статических нагрузок второго рода, превышающих по модулю критические значения, увеличивается по сравнению с ненагруженными оболочками частота колебаний и изменяемость по координатам. Поясним это утверждение.

Пусть наибольшим из статических усилий является $T_{2*}^{(s)}$, причем последнее соизмеримо с η^{σ}. Если $\sigma>2-2q_0$, где q_0 — изменяемость динамического напряженного состояния по координате α_2, то оболочка колеблется, как незагруженная статической нагрузкой. При $\sigma=2-2q_0$ (в этом случае статическая нагрузка такого же порядка, как критическая нагрузка) усилие $T_{2*}^{(s)}$ влияет на главную часть асимптотики главной задачи.

Пусть $\sigma<2-2q_0$. Введем обозначение $2-2q_0-\sigma=a$ $(a>0)$. Чтобы при $a>0$ имела место непротиворечивая асимптотика, надо ввести новую изменяемость по координате α_2, которую обозначим через $q\,(q>q_0)$. Она определяется следующей формулой $q=q_0+a/2$.

Проанализировав известные задачи линейной теории устойчивости оболочек [6] и сравнивая порядки значений критической нагрузки и соответствующие им формы потери устойчивости с полученными здесь результатами, можно заметить, что статическое напряженное состояние при расчете свободных колебаний следует учитывать в самом грубом приближении, если одновременно выполняются такие условия: значение статической нагрузки должно быть одного порядка с критической нагрузкой; оболочка должна совершать колебания по форме, близкой к форме потери устойчивости под действием данной статической нагрузки.

Пользуясь полученными результатами, можно для каждого типа свободных колебаний, оценив порядок величины статической нагрузки, сказать, какое качественное влияние оказывают статические усилия на частоты и формы колебаний, и указать, какие члены со статическими усилиями надо учесть при решении задач.

Автор благодарен А. Л. Гольденвейзеру за постоянное внимание к работе и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Болотин В. В.* О влиянии безмоментного напряженного состояния на спектры собственных колебаний тонких упругих оболочек.– Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1962, № 4, с. 52–60.
3. *Никулин М. В.* Влияние осевых усилий на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки.– В кн.: Прочность цилиндрических оболочек. М.: Оборонгиз, 1959, с. 131–145.
4. *Fung Y. C., Sechler E. E., Kaplan A.* On the vibrations of thin cylindrical shells under internal pressure.– J. Aeronaut. Sci., 1957, v. 24, No. 9, p. 650–660.
5. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3./Под ред. Биргера И. А., Пановко Я. Г. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.II.1981