

УДК 539.3

ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПОКРЫТЫЕ ПОРЫ

ПЛОТНИКОВ А. И., ФЕДОРОВ Ю. А., ЧЕРНИКОВ А. М.

Существуют, как известно, пористые материалы, в которых на поверхности пор образуется слой вещества, отличного от матрицы. Такой слой может создавать внутренние напряжения, оказывая существенное влияние на физико-механические свойства вещества [1]. Если покрытые поры находятся внутри достаточно тонкой пластины, то внутренние напряжения могут служить причиной изгиба пластины. Ниже приводится расчет изгиба круглой пластины, обусловленного напряжениями указанного типа.

1. Рассматривается круглая свободно опертая по контуру пластина, содержащая пористый слой, толщина которой много меньше ее радиуса. В результате термической обработки при температуре T_n поверхности пор покрываются слоем вещества новой фазы. Такой слой на поверхности каждой поры можно рассматривать как полое включение, термический коэффициент линейного расширения которого α_1 отличен от аналогичного коэффициента матрицы α_2 . При остывании материала до температуры T во включениях возникают температурные деформации

$$e^t = (\alpha_2 - \alpha_1)(T_n - T), \quad e^t = e_{11}^t = e_{22}^t = e_{33}^t \quad (1.1)$$

и, следовательно, в матрице и во включении создаются внутренние напряжения. Они могут появиться также в результате того, что при фазовом превращении объем, приходящийся на один атом во включении, становится иным, чем в матрице. Если материал включения можно считать изотропным, то в этом случае возникают деформации того же типа, что и при изменении температуры. Эти деформации в обоих случаях будем обозначать e^t и называть деформациями превращения.

Допустим, что в пластине образовалось одно включение, центр которого находится не в срединной плоскости пластины, а ближе к одной из ее поверхностей. В этом случае будет иметь место асимметрия напряженного состояния относительно срединной плоскости пластины, что может приводить к ее изгибу. Тот же эффект даст ансамбль покрытых пор, если их расположение асимметрично относительно срединной плоскости.

Рассчитаем напряжения в неограниченной среде. Для простоты будем рассматривать лишь сферические поры. Пусть на поверхности поры находится включение в виде сферического слоя с внешним радиусом R_0 и внутренним R_1 .

Используем подход, развитый в [2]. Исключим из матрицы сферический слой вещества вблизи поверхности поры, который должен превратиться во включение, считая, что в нем возникли деформации превращения e_{ij}^t . Затем приложим к поверхности включения такие усилия, чтобы оно приняло форму непревращенного сферического слоя. Эти усилия легко определить записав связь между деформацией превращения и радиальной составляющей смещения на поверхности включения $u_r = R_0 e^t$ при $R = R_0$ и используя формулу [3]:

$$u_r = -p_0 \frac{R_0^3}{2G_1(R_0^3 - R_1^3)} \left[\frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1} R_0 + \frac{R_1^3}{2R_0^2} \right] \quad (1.2)$$

где p_0 — однородное давление, приложенное к поверхности полого сферического включения, G_1 и ν_1 — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона включения.

Учитывая, что $u_R = R_0 e^t$, нетрудно определить усилия, необходимые для того, чтобы осуществить деформацию превращения:

$$p_0 = 2G_1 \left(1 - \frac{R_1^3}{R_0^3}\right) e^t \left(\frac{1-2\nu_1}{1+\nu_1} + \frac{R_1^3}{2R_0^3}\right)^{-1} \quad (1.3)$$

Если однородное давление приложено к сплошной сфере, то имеет место соотношение $p_0 = 3K_1 e^t$, которое получается из (1.2) при $R_1 \rightarrow 0$; K_1 — модуль всестороннего сжатия включения.

Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться лишь напряжения в матрице, необходимо знать усилия, приложенные к поверхности включения перед тем, как вставить его снова в матрицу, без конкретизации, полая оно или сплошное. Поэтому можно ввести понятие эквивалентного сферического включения, для которого выполняется соотношение (K_1^* — эффективный модуль всестороннего сжатия)

$$p_0 = 3K_1^* e^t, \quad K_1^* = \frac{2}{3} G \left(1 - \frac{R_1^3}{R_0^3}\right) \left(\frac{1-2\nu_1}{1+\nu_1} + \frac{R_1^3}{2R_0^3}\right)^{-1} \quad (1.4)$$

Воспользуемся далее результатами [4]. Стесненная деформация в матрице запишется как [2] (G — модуль сдвига матрицы):

$$e^c = 3K_1^* e^t / (3K_1^* + 4G) \quad (1.5)$$

Напряжения будут равны

$$\sigma_{ij} = -\frac{6Gx_i x_j R_0^3}{R^5} e^c, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (i \neq j) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{ii} = \frac{2GR_0^5}{R^5} (R^2 - 3x_i^2) e^c \quad (i=j)$$

По повторяющимся индексам суммирование не производится.

Пусть теперь включение находится в круглой пластине, радиус которой r_p намного больше толщины пластины $2h$ и размера включения. Начало координат поместим в центр пластины. Рассмотрим случай, когда центр включения находится на оси z на расстоянии $h_1 = h - Z$ и $h_2 = h + Z$ от верхней и нижней поверхностей включения; Z — координата центра включения.

Расчет прогиба произведем следуя [5]. На поверхности пластины составляющие тензора напряжений σ_{iz} должны обращаться в нуль. В цилиндрической системе координат, которая используется в дальнейшем, это составляющие σ_{rz} и σ_{zz} . Чтобы выполнить эти условия, к поверхностям пластины надо приложить напряжения $-\sigma_{rz}$ и $-\sigma_{zz}$, в результате чего возникает изгиб пластины.

Задача сводится к решению уравнения равновесия упругого слоя со следующими граничными условиями, которые получаются из (1.6), если напряжения записать в цилиндрической системе координат:

при $z = h$

$$\sigma_{rz} = \frac{6GR_0^3 r h_1 e^c}{(r^2 + h_1^2)^{3/2}}, \quad \sigma_{zz} = -\frac{2GR_0^3 e^c}{(r^2 + h_1^2)^{3/2}} (r^2 - 2h_1^2) \quad (1.7)$$

при $z = -h$

$$\sigma_{rz} = -\frac{6GR_0^3 r h_2 e^c}{(r^2 + h_2^2)^{3/2}}, \quad \sigma_{zz} = -\frac{2GR_0^3 e^c}{(r^2 + h_2^2)^{3/2}} (r^2 - 2h_2^2)$$

Граничные условия на контуре пластины заменим условиями: $\sigma_{rz} \rightarrow 0$, $\sigma_{zz} \rightarrow 0$, при $r \rightarrow \infty$, т. е. в радиальном направлении пластину будем считать

бесконечной. Такое приближение оправдано тем, что радиус пластины много больше ее толщины, а создаваемые покрытой порой напряжения быстро убывают с удалением от ее центра. Методы решения указанной выше задачи известны [3].

2. Найдем трансформанты Ханкеля выражений (1.7)

$$p_+ = \sigma_{zz}^* = \int_0^{\infty} \sigma_{zz} r J_0(\alpha r) dr = 2GR_0^3 e^c \alpha e^{-\alpha h_1} \quad \text{при } z=h$$

$$p_- = \sigma_{zz}^* = 2GR_0^3 e^c \alpha e^{-\alpha h_2} \quad \text{при } z=-h$$
(2.1)

$$\tau_+ = \sigma_{rz}^0 = \int_0^{\infty} \sigma_{rz} r J_1(\alpha r) dr = 2GR_0^3 e^c \alpha e^{-\alpha h_1} \quad \text{при } z=h$$

$$\tau_- = \sigma_{rz}^0 = 2GR_0^3 e^c \alpha e^{-\alpha h_2} \quad \text{при } z=-h$$

Далее следует определить функцию Ламе $\chi(r, z)$, трансформанта Ханкеля которой $\chi^*(\alpha, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(d^2/dz^2 - \alpha^2) \chi^*(\alpha, z) = 0 \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\chi^*(\alpha, z) = A \operatorname{sh} \alpha z + B \alpha z \operatorname{ch} \alpha z + C \operatorname{ch} \alpha z + D \alpha z \operatorname{sh} \alpha z \quad (2.3)$$

Коэффициенты A, B, C, D находятся из условий:

$$p_{\pm} = 2\mu \left[(1-\nu) \frac{d^3 \chi^*}{dz^3} - (2-\nu) \alpha^2 \frac{d\chi^*}{dz} \right]_{z=\pm h}$$

$$\tau_{\pm} = 2\mu \left[\nu \frac{d^2 \chi^*}{dz^2} + \alpha^2 (1-\nu) \chi^* \right]_{z=\pm h}$$
(2.4)

В результате получаем

$$A = \frac{(e^{-\alpha h_1} + e^{-\alpha h_2}) [\operatorname{ch} \alpha h - (2\nu + \alpha h) (\operatorname{sh} \alpha h + \operatorname{ch} \alpha h)]}{\alpha^2 (2\alpha h + \operatorname{sh} 2\alpha h)} R_0^3 e^c$$

$$B = \frac{(e^{-\alpha h_1} + e^{-\alpha h_2}) (\operatorname{sh} \alpha h + \operatorname{ch} \alpha h)}{\alpha^2 (2\alpha h + \operatorname{sh} 2\alpha h)} R_0^3 e^c$$

$$C = \frac{(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}) [\operatorname{sh} \alpha h - (2\nu + \alpha h) (\operatorname{sh} \alpha h + \operatorname{ch} \alpha h)]}{\alpha^2 (\operatorname{sh} 2\alpha h - 2\alpha h)} R_0^3 e^c$$

$$D = \frac{(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}) (\operatorname{sh} \alpha h + \operatorname{ch} \alpha h)}{\alpha^2 (\operatorname{sh} 2\alpha h - 2\alpha h)} R_0^3 e^c$$
(2.5)

При помощи функции Ламе можно определить напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$, которые совместно с напряжениями в бесконечной среде дают истинные напряжения, создаваемые включением в пластине. Смещения также складываются из смещений, создаваемых включением в бесконечной среде, и смещений $u_i^{(1)}$, которые получаются в результате решения уравнения (2.2) с граничными условиями (2.4). Последние и определяют величину прогиба.

Согласно [5], при небольших прогибах в пластине, площадь поверхности которой неограниченна, имеет место соотношение (фиг. 1)

$$\beta = -2 \lim_{r \rightarrow \infty} du_z^{(1)}(r, 0) / dr \quad (2.6)$$

Производная от смещения выражается через функцию Ламе:

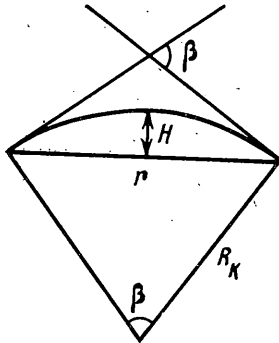
$$\frac{du_z^{(1)}}{dr} = - \int_0^\infty \left[(1-2\nu) \frac{d^2 \chi^*}{dz^2} - 2(1-\nu) \alpha^2 \chi^* \right] \alpha^2 J_1(\alpha r) d\alpha \quad (2.7)$$

Поскольку в дальнейшем рассматривается прогиб ограниченной круглой пластины, формула (2.6) будет использоваться при условии $r \gg h$. Если пластина тонкая, то применение указанного соотношения ко всем включениям не приведет к существенной погрешности, так как весьма близко от края пластины расположена лишь небольшая часть включений.

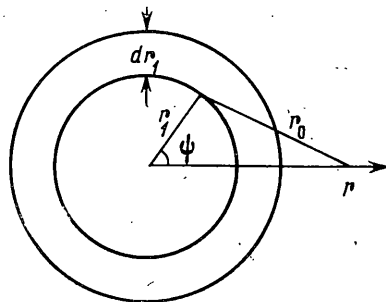
Введя переменную $\gamma = \alpha h$, подставив (2.7) в (2.6) и учитывая (2.5), при условии $\rho \gg 1$, где $\rho = r/h$, $h_1' = h_1/h$, $h_2' = h_2/h$, запишем

$$\beta = \frac{2R_0^3 e^c}{h^3} \int_0^\infty (e^{-\gamma h_1'} - e^{-\gamma h_2'}) \frac{[\gamma + 2(1-\nu)] (\operatorname{sh} \gamma + \operatorname{ch} \gamma) - \operatorname{sh} \gamma}{\operatorname{sh} 2\gamma - 2\gamma} \gamma^2 J_1(\gamma \rho) d\gamma \quad (2.8)$$

При больших ρ и $\gamma > 1$ подынтегральное выражение в (2.8) становится малым, так что существенную область интегрирования (2.8) составля-



Фиг. 1



Фиг. 2

ют значения $\gamma < 1$. Поэтому стоящее перед функцией Бесселя выражение в (2.8) можно разложить в ряд по степеням γ , а затем ограничиться самой нижней степенью разложения. Тогда

$$\beta \approx \frac{3(1-\nu)(h_2-h_1)R_0^3 e^c}{h^3} \int_0^\infty J_1(\gamma \rho) d\gamma = 6(1-\nu) e^c \frac{R_0^3}{h^3} \frac{Z}{r} \quad (2.9)$$

Рассмотрим теперь пору, центр которой имеет координаты (r, ψ, Z) (фиг. 2), причем ψ — угол с некоторым произвольно выбранным направлением r . Имеем

$$\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial r} = \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial r}, \quad r_0 = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \psi} \quad (2.10)$$

Здесь производная $\partial u_z / \partial r_0$ вычисляется по формуле (2.9), где вместо r надо взять r_0 . В результате получим

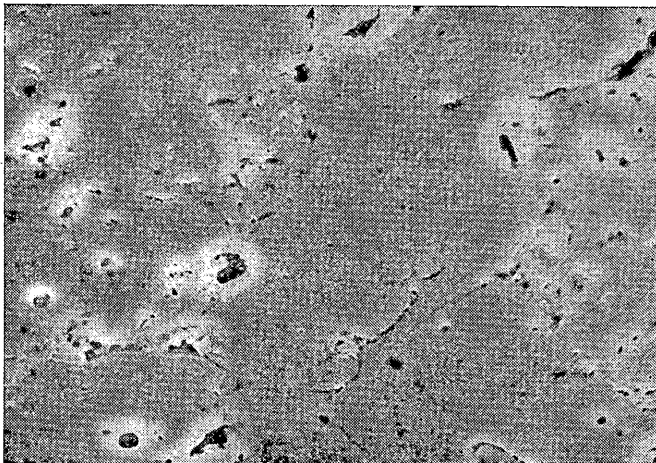
$$\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial r} = -3(1-\nu) e^c \frac{R_0^3 Z}{h^3} \frac{r - r_1 \cos \psi}{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \psi} \quad (2.11)$$

3. Формула (2.11) дает возможность рассчитать прогиб, обусловленный множеством пор. Будем считать, что распределение пор имеет цилиндрическую симметрию (осесимметричная задача).

Пусть пластина состоит из двух слоев: беспористого толщины h_m и пористого толщины h_p , который занимает верхнюю часть пластины $z_2 - z_1 = h_p$. Считаем, что пористый слой однороден, так как функция распределения пор по размерам $f(R_0)$ постоянна для любого элемента этого слоя. Тогда прогиб пластины, обусловленный порами, расположенными в пористом слое радиуса r , будет равен

$$\beta_s = \frac{12(1-\nu)}{h^3} \int_0^\infty f(R_0) e^c R_0^3 dR_0 \int_{z_1}^{z_2} z dz \int_0^r r_1 dr_1 \int_0^\pi \frac{r-r_1 \cos \psi}{r^2+r_1^2-2rr_1 \cos \psi} d\psi \quad (3.1)$$

Формула (3.1) неприменима для области $r-r_1 \sim h$. Здесь условие $r-r_1 \gg h$ аналогично условию $r \gg h$ для одиночной покрытой поры. В рас-



Фиг. 3

смаатриваемом прикладном вопросе это ограничение не играет существенной роли, поскольку в области $r-r_1 \sim h$ расположена незначительная часть пор.

Выполнив интегрирование и учитывая, что $z_2+z_1=h_m$, получим

$$\beta_s = \frac{3\pi(1-\nu)}{h^3} h_p h_m r \int_0^\infty e^c R_0^3 f(R_0) dR_0 \quad (3.2)$$

Если r — радиус пластины, то (3.2) описывает прогиб всей пластины. Из (3.2) видно, что при $h_m=0$ или $h_p=0$ прогиб равен нулю, т. е. полностью пористая или беспористая пластина не испытывает прогиба.

В технике часто за меру прогиба принимается высота сегмента H . Определим сначала радиус кривизны пластины R_k . Из фиг. 1 видно, что

$$R_k = \frac{r}{\sin^{1/2} \beta_s} \approx \frac{2r}{\beta_s} = \frac{2h^3}{3\pi(1-\nu)h_p h_m I}, \quad I = \int_0^\infty e^c R_0^3 f(R_0) dR_0 \quad (3.3)$$

Тогда получим

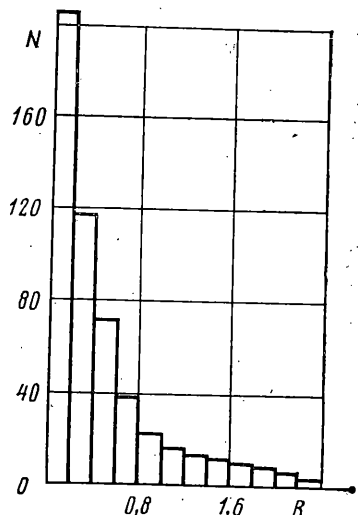
$$H = R_k \left(1 - \cos \frac{\beta_s}{2}\right) \approx R_k \frac{\beta_s}{8} = \frac{3\pi(1-\nu)h_p h_m}{4h^3} I r^2 \quad (3.4)$$

Формулу (3.4) применим к системе, состоящей из монокристаллического кремния и пористого поликристаллического, полученного плазменным напылением.

На фиг. 3 приведена типичная микрофотография полированной поверхности поликристаллического слоя. Этот слой является несущей основой интегральных схем, поэтому изменение его состава и дефектной структуры в достаточно широких пределах не оказывает существенного влияния на качество интегральных схем.

Недостатком такого слоя является возникновение в процессе его получения значительных внутренних напряжений. Покрытие поверхностей пор слоем новой фазы дало бы возможность получать напряжения, создающие такой изгиб пластины, который бы компенсировал изгиб, возникающий в процессе получения поликристаллического слоя.

На фиг. 4 приведена гистограмма распределения пор по размерам в одной из партий пластин (R в мкм). Обработка пересчитанной на единицу



Фиг. 4

объема гистограммы методом наименьших квадратов приводит к следующей функции распределения: $f(R_0) = dN/dR_0 = Ae^{-\alpha R_0}$, $A = 3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-4}$, $\alpha = 3,4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Здесь dN — количество пор в единице объема, имеющих радиусы в интервале от R_0 до $R_0 + dR_0$.

Пусть фазой, покрывающей поры, является окись кремния SiO_2 . Тогда, согласно (1.1), обусловленная разницей термического коэффициента линейного расширения $e^t \approx 4,44 \cdot 10^{-3}$. Однако, если поверхность поры покрывается слоем окисла, не выпадающего из парогазовой смеси, а образующегося в результате реакции находящихся вблизи поверхности атомов кремния с атомами кислорода, e^t может быть гораздо больше из-за разницы удельных объемов атомов Si в поликристаллическом кремнии и в SiO_2 . Поскольку удельные объемы разнятся в $\sim 2,2$ раза, деформация превращения может достигать величины $5 \cdot 10^{-1}$.

Так как возможны эффекты, уменьшающие e^t , такие, как проскальзывание по границе Si — SiO_2 , некоторое вытеснение атомов кремния к поверхности, то примем в этом случае $e^t \approx 10^{-1}$.

Оценим величину прогиба для слоев окисла различной толщины $\Delta = R_0 - R_1$ по формуле (3.4), принимая $h_m = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, $h_p = 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, $r = 3 \text{ см}$. Будем считать, что все поры покрыты окислом одинаковой толщины, за исключением тех, в которых $R_0 \leq \Delta$. В последнем случае будем иметь сферические включения радиуса R_0 . Тогда I в выражении (3.3) разбивается на два интеграла. В первом интеграле от нуля до Δ в выражении для e^c вместо K_1^* берется K_1 , так как $R_1 = 0$. Такой интеграл легко вычисляется аналитически. Второй интеграл от Δ до ∞ вычисляется на ЭВМ. Следует заметить, что второй интеграл вносит значительно больший вклад в прогиб, чем первый.

Δ , мкм	e^t	H , мкм	Δ , мкм	e^t	H , мкм
10 ⁻²	10 ⁻¹	38	10 ⁻¹	10 ⁻¹	383
	4,4 · 10 ⁻³	2		4,4 · 10 ⁻³	17
5 · 10 ⁻²	10 ⁻¹	192	5 · 10 ⁻¹	10 ⁻¹	1660
	4,4 · 10 ⁻³	8		4,4 · 10 ⁻³	73

В таблице приведены значения прогиба, обусловленного разницей удельных объемов и термических коэффициентов линейного расширения для разных толщин окисла

Видно, что разница термических коэффициентов линейного расширения дает значительный вклад в прогиб лишь при больших толщинах SiO_2 , тогда как из-за разницы удельных объемов прогиб уже велик при толщине $\text{SiO}_2 \sim 500 \text{ \AA}$. С изменением толщины окисного слоя прогиб может меняться в широких пределах: от десятков до тысячи микрон.

Таким образом, в публикуемой работе рассчитан прогиб пластины, имеющей однородно распределенные по сечению поры, покрытые слоем инородной фазы. Оценена величина прогиба для пластины монокристаллического кремния с нанесенным на нее методом плазменно-дугового распыления поликристаллическим кремнием. Поры в поликристалле покрыты слоем SiO_2 . Прогиб, обусловленный разницей удельных объемов атома кремния в поликристалле кремния и в SiO_2 , гораздо больше прогиба из-за разницы термических коэффициентов линейного расширения Si и SiO_2 . Расчет показывает, что с изменением толщины окисного слоя прогиб может меняться в широких пределах: от десятков до тысячи микрон.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wolfer W. G., Mansur L. K.* The mechanical interaction of point defects with spherical surface layers.— *Phys. Stat. Solidi*, 1976, v. A37, No. 1, p. 211–222.
2. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
3. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
4. *Ashby M. F., Johnson L.* On the generation of dislocation at misfitting particles in a ductile matrix.— *Philos. Mag.*, 1969, v. 20, No. 167, p. 1009–1022.
5. *Кroupа F.* Die Abhängigkeit der Banddurchbiegung Von der Lage der Stufenversetzung.— *Czechoslovak J. Phys.*, 1959, t. 9, № 4, p. 488–494.

Воронеж

Поступила в редакцию
14.XI.1980