**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1982**

УДК 539.3

ИЗГИБ ПЛАСТИН С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ РАЗРЕЗОВ

МЕРКУЛОВ В. А.

На основании метода, предложенного в [1] для плоской задачи, получено интегральное уравнение задачи теории упругости об изгибе тонкой пластины с периодической системой сквозных криволинейных разрезов, нагруженных самоуравновешенными на каждом разрезе системами сил и моментов. Устанавливаются его разрешимость, существование и единственность решения исходной граничной задачи. Для разрезов вдоль одной прямой задача решается в квадратурах.

При равенстве нулю на каждом разрезе лишь главного вектора для разрезов вдоль одной прямой задача решается также в квадратурах методом линейного сопряжения граничных значений. Для одного разреза в периоде получены коэффициенты интенсивности напряжений при изгибе пластины моментами, приложенными как к берегам разреза, так и на бесконечности.

1. Рассматривается упругое равновесие бесконечной пластины с периодической системой сквозных разрезов. Период без ограничения общности принимается равным π. Пластина предполагается тонкой однородной и изотропной. Совокупность p гладких криволинейных разрезов $L_j=a_jb_j$ $(j=1,2,\ldots,p)$ образует кусочно-гладкую линию L, расположенную в основной полосе. При обходе линии L в положительном направлении, ведущем от a_j к b_j, нормаль $\mathbf{n}$ считается направленной вправо.

На берегах разрезов L_j задаются изгибающие моменты $M_n^{\pm}$ и обобщенные поперечные силы $P_n^{\pm}$ класса H^*; знаками (+) и (−) отмечаются предельные значения величин, принимаемые соответственно на левом и правом берегах разрезов. Главный вектор и главный момент на каждом из разрезов считаются равными нулю, моменты на бесконечности без ограничения общности могут считаться также равными нулю. Моменты и поперечные силы на разрезах вне основной полосы одинаковы в конгруэнтных точках.

Поместим начало координат в основной полосе, направив ось y параллельно границе. Согласно постановке задачи, требуется найти кусочно-голоморфные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, ограниченные при $y=\infty$ и удовлетворяющие на берегах разрезов соотношениям [2]:

$$\varkappa\varphi^{\pm}(t)+t\overline{\varphi'^{\pm}(t)}+\overline{\psi^{\pm}(t)}=f^{\pm}(t)+iC(t)t+C_1(t) \tag{1.1}$$

$$f^{\pm}_{(t)}=\frac{1}{D(1-\nu)}\int\limits_{a_j}^{t}\left[M_n^{\pm}(s)+i\int\limits_{a_j}^{s}P_n^{\pm}(s)\,ds\right]d\tau \quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{1.2}$$

$$\varkappa=-(3+\nu)/(1-\nu),\qquad D=Eh^3[12(1-\nu^2)]^{-1}$$

Здесь t — комплексная координата, τ — переменная точка, s — дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки a_j на L_j, ν — коэффициент Пуассона, D — цилиндрическая жесткость пластины, $C(t)=C_j$ — действительная кусочно-постоянная функция на L, $C_1(t)=C_{1j}$ — комплексная кусочно-постоянная функция на L, постоянные C_j, C_{1j} $(j=1,2,\ldots,p)$ находятся при решении задачи.

Для предельных значений функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi(z)$ примем следующие предположения: $\varphi^{\pm}(t)$, $t\overline{\varphi'^{\pm}(t)}+\overline{\psi^{\pm}(t)}\in H$; $\varphi'^{\pm}(t)$, $\psi^{\pm}(t)\in H^*$.

Предельные значения $\varphi^{\pm}(t)$ на линии L выражаются через геометрические и механические величины напряженно-деформированного состояния пластины [2]:

$$\varphi^{\pm}(t)=(1-\varkappa)^{-1}[\vartheta^{\pm}(t)-f^{\pm}(t)-iC(t)t-C_1(t)],\qquad \vartheta=\vartheta_x+i\vartheta_y$$

В вершинах разрезов $\vartheta^+=\vartheta^-$, $f^+=f^-$, поэтому должны выполняться равенства

$$\varphi^+(a_j)-\varphi^-(a_j)=\varphi^+(b_j)-\varphi^-(b_j)=0\quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{1.3}$$

Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, кроме того, должны при обходе разрезов L_j удовлетворять условиям однозначности прогиба пластины w, определяемого формулой

$$w=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)],\qquad \chi(z)=\int\psi(z)\,dz \tag{1.4}$$

В силу периодичности углов поворота ϑ_x, ϑ_y и формулы

$$\vartheta_x+i\vartheta_y=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)} \tag{1.5}$$

функция $\varphi(z)$ — периодическая, а функция $\psi(z)$ удовлетворяет соотношению $\varphi(z+\pi)=\psi(z)-\pi\varphi'(z)$.

При сделанных предположениях относительно нагрузок, искомых функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и их предельных значений рассматриваемая граничная задача имеет единственное решение. Отсюда вытекает, что кусочно-голоморфные функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, удовлетворяющие поставленным условиям, единственны.

Решение граничной задачи (1.1), (1.2), следуя [1], ищется в виде

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau \tag{1.6}$$

$$\psi(z)=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(\tau)}\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L \bar{\tau}\,\omega'(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L(\tau-z)\,\omega'(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L[\overline{f^+(\tau)}-\overline{f^-(\tau)}]\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau \tag{1.7}$$

где $\omega(t)=\varphi^+(t)-\varphi^-(t)$ — функция точки t линии L, подлежащая определению. Значения функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ при $y=\pm\infty$, определяющие перемещения пластины как жесткого целого [3], находятся по формулам [1]:

$$\varphi(\pm i\infty)=\pm\frac{1}{2\pi}\int_L \omega(\tau)\,d\tau \tag{1.8}$$

$$\psi(\pm i\infty)=\pm\frac{1}{2\pi}\int_L[\overline{f^+(\tau)}-\overline{f^-(\tau)}-\varkappa\overline{\omega(\tau)}+(\overline{\tau'^2}-1)\,\omega(\tau)]\,d\tau$$

Условия (1.8) исключают произвол в функциях $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Функцию $\varphi'(z)=\Phi(z)$ с учетом равенства (1.3) можно представить в виде

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega'(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau \tag{1.9}$$

Вычислим предельные значения $\varphi^{\pm}(t)$, $\varphi'^{\pm}(t)$, $\psi^{\pm}(t)$, считая, что формулы Сохоцкого — Племеля применимы к правым частям формул (1.6), (1.7), (1.9), и подставим полученные выражения в граничные условия (1.1). Складывая почленно полученные равенства, получим интегральное уравнение для функции $\omega(t)$:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \omega(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-t)\,d\tau+K\omega(\tau)=f_1(t)+\varkappa^{-1}[iC(t)t+C_1(t)] \tag{1.10}$$

Здесь $K\omega=(k_1+k_2+k_3)\omega$; функция $f_1(t)$ и вполне непрерывные операторы k_1, k_2, k_3 определяются формулами

$$f_1(t)=\frac{1}{2\varkappa}\Big\{f^+(t)+f^-(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L [f^+(\tau)-f^-(\tau)]\operatorname{ctg}(\tau-t)\,d\tau+$$

$$+2k_1[f^+(\tau)-f^-(\tau)]\Big\}$$

$$k_1\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(\tau)\,[\overline{\operatorname{ctg}(\tau-t)\,d\tau}-\operatorname{ctg}(\tau-t)\,d\tau]$$

$$k_2\omega=-\frac{1}{\varkappa 2\pi i}\int_L \overline{\omega(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[(\bar\tau-\bar t)\operatorname{ctg}(\tau-t)]\,d\tau}$$

$$k_3\omega=\frac{1}{\varkappa 2\pi i}\int_L \overline{\omega(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[(\tau-t)\operatorname{ctg}(\tau-t)]\,d\tau}$$

В случае разрезов только вдоль оси x оператор $k_1=k_2+k_3=0$. Согласно постановке задачи, требуется найти решение уравнения (1.10) класса h_{2p}. Учитывая, что в круге $|\tau-z|<\pi$ справедливо представление [4]: $\operatorname{ctg}(\tau-z)=(\tau-z)^{-1}+G(\tau-z)$, где $G(z)$ — голоморфная функция, и используя результаты из [5], устанавливаем, что решение уравнения (1.10) класса h_{2p} и решение рассматриваемой граничной задачи существуют[1]. Попутно доказывается, что условия относительно предельных значений функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi(z)$ выполняются, а постоянные $C(t)=C_j$, $C_1(t)=C_{1j}$ $(j=1, 2, \ldots, p)$ определяются единственным образом из условий разрешимости уравнения (1.10) в классе h_{2p} и условий однозначности прогиба w. Последние условия, согласно формулам (1.4), (1.6), (1.7), примут вид

$$\operatorname{Re}\int_{L_j}[\overline{\tau'^2}\omega(\tau)-\varkappa\overline{\omega(\tau)}+\overline{f^+(\tau)}-\overline{f^-(\tau)}]\,d\tau=0 \quad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots,p)} \tag{1.11}$$

где $\tau'=d\tau/ds$, s — дуговая обсцисса на L.

2. Пусть $\omega(t)$ — решение уравнения (1.10) класса h_{2p}. Дифференцируя уравнение (1.10) по переменной t, получаем интегральное уравнение относительно $\omega'(t)$:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \omega'(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-t)\,d\tau+K^\circ\omega'(\tau)=f_2(t) \tag{2.1}$$

$$K^\circ\omega'=(k_4+k_5+k_6)\omega',\qquad f_2(t)=f_0(t)+\varkappa^{-1}k_4[f^{+\prime}(\tau)-f^{-\prime}(\tau)]$$

---

[1] См. также *Меркулов В. А.* Задачи изгиба пластин с трещинами: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. ЛГУ, 1975 144 с.

где функция $f_0(t)$ и вполне непрерывные операторы k_4, k_5, k_6 определяются формулами

$$f_0(t)=\frac{1}{2\varkappa}\left\{f^{+\prime}(t)+f^{-\prime}(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L [f^{+\prime}(\tau)-f^{-\prime}(\tau)]\operatorname{ctg}(\tau-t)\,d\tau+i2C(t)\right\} \tag{2.2}$$

$$k_4\omega'=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \omega'(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\overline{\sin(\tau-t)}}{\sin(\tau-t)}\,d\tau$$

$$k_5\omega'=\frac{1}{\varkappa 2\pi i}\int\limits_L \overline{\omega'(\tau)}\,\overline{\tau'}^{\,2}\frac{\partial}{\partial t}[(\tau-t)\overline{\operatorname{ctg}(\tau-t)}]\,d\tau$$

$$k_6\omega'=-\frac{\overline{t'}^{2}}{\varkappa 2\pi i}\int\limits_L \overline{\omega'(\tau)}\,\overline{\frac{\partial}{\partial t}[(\tau-t)\operatorname{ctg}(\tau-t)]}\,\overline{d\tau}$$

Функция $\omega'(t)$, принадлежащая классу h_0, должна удовлетворять дополнительным условиям

$$\int\limits_{L_j}\omega'(\tau)\,d\tau=0 \qquad (j=1,2,\ldots,p) \tag{2.3}$$

Согласно формулам (1.5)—(1.7), (1.9), условия (2.3) представляют собой условия однозначности углов поворота ϑ_x, ϑ_y при обходе замкнутых контуров, охватывающих разрезы L_j. При соблюдении условий (2.3), (1.11) решение уравнения (2.1) класса h_0 существует и единственно.

Отметим, наконец, что исследование, проведенное в [6], исходя из уравнения (2.1) можно применить и к рассматриваемой граничной задаче. Из него следует, что вид решения в окрестности вершины криволинейного разреза, коэффициенты интенсивности напряжений, а также величина притока энергии к вершине разреза при его продвижении в результате хрупкого разрушения полностью определяются видом функции $\omega'(t)$, являющейся решением уравнения (2.1) в окрестности рассматриваемой вершины разреза.

Если пластина имеет разрезы только вдоль оси x, то $k_4=k_5+k_6=0$ и из уравнения (2.1) находим

$$\omega'(t)=\frac{1}{\pi i Z^+(t)}\int\limits_L Z^+(\tau)f_0(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-t)\,d\tau+\frac{2P_{p-1}(e^{2it})}{Z^+(t)} \tag{2.4}$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i Z(z)}\int\limits_L Z^+(\tau)f_0(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau+\frac{P_{p-1}(e^{2iz})}{Z(z)} \tag{2.5}$$

Здесь t, τ — действительные переменные, $P_{p-1}(e^{2iz})$ — полином степени $p-1$, $Z(z)$ — периодическая с периодом π каноническая функция класса h_{2p}, имеющая вид

$$Z(z)=\prod_{j=1}^{p}(e^{2iz}-e^{2ia_j})^{1/2}(e^{2iz}-e^{2ib_j})^{1/2} \tag{2.6}$$

$$Z^+(t)=-\prod_{j=1}^{p}(e^{2it}-e^{2ia_j})^{1/2}(e^{2it}-e^{2ib_j})^{1/2}$$

Рассмотрим случай одного разреза длины $2a$, симметричного относительно оси y. Примем $a_1=-a$, $b_1=a$, $P_{p-1}(e^{2iz})=A_0$.

Пусть по берегам разреза равномерно распределены постоянные изгибающие моменты $M_y^+=M_y^-=m$. Из формул (2.2), (1.2) находим $f_0(t)=[\varkappa D(1-\nu)]^{-1}m+\varkappa^{-1}iC$. Согласно (2.4), имеем

$$\omega'(t)=-f_0(t)(e^{2it}-\cos^2 a)/Z^+(t)+2A_0/Z^+(t)$$

Из условий (2.3), (1.11) соответственно следует $2A_0=f_0(t)\sin^2 a$, $C(t)=0$. Функция $\Phi(z)$, согласно (2.5), примет теперь вид

$$\Phi(z)=m[1-e^{2iz}+Z(z)]/[2\varkappa D(1-\nu)Z(z)] \tag{2.7}$$

В механике хрупкого разрушения тел с трещинами интерес представляет величина коэффициентов интенсивности напряжений, определяющих локальное разрушение в окрестности вершины трещины. Учитывая, что в круге $|z|<\pi$ справедливо разложение [4] $2i/(e^{2iz}-1)=z^{-1}+G_1(z)$, где $G_1(z)$ — голоморфная функция, найдем коэффициенты интенсивности напряжений по формуле

$$K_1-iK_2=-\frac{12\sqrt{2}D(3+\nu)}{h^2}\lim_{z_1\to 0}\sqrt{\frac{e^{2iz_1}-1}{2i}}\,\Phi(z_1+a) \tag{2.8}$$

Отсюда и из (2.7) следует $K_1=-6h^{-2}m(\operatorname{tg} a)^{1/2}$, $K_2=0$. Отметим, что когда длина разреза $2a$ мала по сравнению с шириной основной полосы π, получаем известный результат [2]: $K_1=-6h^{-2}ma^{1/2}$, $K_2=0$.

3. Если пластина имеет периодическую систему разрезов только вдоль оси x, решение граничной задачи в квадратурах следует непосредственно также из результатов, полученных в [7] при предположении равенства нулю на каждом разрезе L_j лишь главного вектора краевых нагрузок. В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе пластины с p разрезами в основной полосе моментами, приложенными на бесконечности. Из приведенных результатов и [7] следует, что функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)=\psi'(z),\ldots$ в этом случае имеют вид

$$\Phi(z)=\frac{iC(t)}{\varkappa 2\pi i Z(z)}\int_L Z^+(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau+\frac{P_p(e^{2iz})}{\varkappa Z(z)}-\frac{1}{2\varkappa}[(1-\varkappa)\Gamma+\overline{\Gamma'}]$$

$$\Psi(z)=\varkappa\overline{\Phi}(z)-\Phi(z)-z\Phi'(z)+(1-\varkappa)\Gamma+\Gamma'$$

$$\Gamma=-(M_x^\infty+M_y^\infty)/[4D(1+\nu)]=-(M_1^\infty+M_2^\infty)/[4D(1+\nu)] \tag{3.1}$$

$$\Gamma'=\frac{M_y^\infty-M_x^\infty+2iH_{xy}^\infty}{2D(1-\nu)}=-\frac{(M_1^\infty-M_2^\infty)e^{-2i\alpha_\infty}}{2D(1-\nu)} \tag{3.2}$$

$$P_p(e^{2iz})=A_0\exp(2piz)+A_1\exp[2(p-1)iz]+\ldots+A_p$$

где M_1^∞, M_2^∞ — значения главных моментов на бесконечности, α_∞ — угол между плоскостью действия момента M_1^∞ и осью x.

Коэффициент A_0 полинома $P_p(e^{2iz})$ определяется из условия $\Phi(z)=\Gamma$ при $y=-\infty$. Остальные постоянные $A_1, A_2, \ldots, A_p$, $C(t)=C_j$ $(j=1,2,\ldots,p)$ определяются из условий однозначности углов поворота ϑ_x, ϑ_y и условий однозначности прогиба w (формулы (2.3), (1.11), где $\omega'(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$). Равенства (1.11), (2.3) образуют систему $3p$ линейных уравнений относительно коэффициентов полинома $\operatorname{Re} A_j$, $\operatorname{Im} A_j$ и действительных постоянных $C(t)=C_j$.

Эта система однозначно разрешима, так как однородная система, получаемая при $\Gamma=\Gamma'=0$, не может иметь иного решения, кроме тривиального, на основании теоремы единственности решения граничной задачи.

В случае одного разреза в основной полосе длины $2a$, симметричного относительно оси y, согласно изложенному имеем

$$\omega'(t)=\frac{1}{\varkappa Z^+(t)}[iC(\cos^2 a-e^{2it})+2A_0e^{2it}+2A_1]$$

$$2A_0=(1+\varkappa)\Gamma+\overline{\Gamma'}$$

Из условий (2.3), (1.11) найдем соответственно $2A_1=iC\sin^2 a-(1+\varkappa)\Gamma-\overline{\Gamma'}$, $C=-\operatorname{Im}\Gamma'$. Функция $\Phi(z)$ примет теперь вид

$$\Phi(z)=\operatorname{Re}[(1+\varkappa)\Gamma+\Gamma'][e^{2iz}-1-Z(z)]/[2\varkappa Z(z)]+\Gamma$$

По формуле (2.8) найдем

$$K_1=6h^{-2}D(1-\nu)\operatorname{Re}[(1+\varkappa)\Gamma+\Gamma']\sqrt{\operatorname{tg} a},\quad K_2=0 \tag{3.3}$$

Отсюда при чистом изгибе $M_x{}^\infty=M$, $M_y{}^\infty=M$ или цилиндрическом изгибе $M_y{}^\infty=M$, $M_x{}^\infty=0$, согласно равенствам (3.1), (3.2) получаем

$$K_1=6h^{-2}M\sqrt{\operatorname{tg} a},\quad K_2=0 \tag{3.4}$$

При действии равномерного крутящего момента $H_{xy}{}^\infty=H$ концентрация напряжений отсутствует $K_1=K_2=0$. Если известны значения главных моментов $M_1{}^\infty$, $M_2{}^\infty$ и угол α_∞, то из (3.3) имеем

$$K_1=3h^{-2}M_1{}^\infty[1+\eta-(1-\eta)\cos 2\alpha_\infty]\sqrt{\operatorname{tg} a}$$
$$K_2=0,\quad \eta=M_2{}^\infty/M_1{}^\infty \tag{3.5}$$

Когда длина разреза мала по сравнению с шириной основной полосы, полагая $\operatorname{tg} a\approx a$, получаем из формул (3.3)—(3.5) известные результаты, следующие, например, из работ [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Линьков А. М.* Задачи теории упругости для плоскости с периодическими системами разрезов.– Исследования по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976, вып. 11, с. 11–18.
2. *Линьков А. М., Меркулов В. А.* Задачи об изгибе пластин с разрезами.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1, с. 111–118.
3. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.– Л.: Гостехиздат, 1951. 496 с.
4. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978. 415 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. *Меркулов В. А.* Приток энергии к вершине криволинейной трещины при изгибе тонкой пластины.– Исследования по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976, вып. 11, с. 27–33.
7. *Меркулов В. А.* Изгиб пластин с разрезами вдоль прямой или дуг окружности.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 165–171.

Волжский

Поступила в редакцию
16.VI.1980