МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1982

УДК 539.3

ТЕНЗОРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ НОВОЖИЛОВА — БАЛАБУХА

БЕРДИЧЕВСКИЙ В. Л.

Первая энергетическая формулировка линейной теории оболочек была дана В. В. Новожиловым [1] и Л. И. Балабухом [2]. Их построение было проведено в линиях кривизны. Впоследствии в ряде работ, в частности [3], утверждалось, что соотношениям Новожилова – Балабуха нельзя придать общую тензорную форму. Этот вывод был основан на том, что в качестве мер изгиба рассматривались выражения, линейные по компонентам второй квадратичной формы срединной поверхности. Ниже построена тензорная форма уравнений Новожилова – Балабуха; при этом оказывается, что соответствующая мера изгиба есть однородная первой степени нелинейная функция по компонентам второй квадратичной формы.

1. Уравнения равновесия. Пусть $T^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ — несимметричные тензоры растягивающих усилий и изгибающих моментов, N^α — вектор перерезывающих усилий:

$$T^{\alpha\beta}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varkappa(\delta_\lambda^\alpha-\xi b_\lambda^\alpha)p^{\lambda\beta}\,d\xi,\qquad M^{\alpha\beta}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varkappa(\delta_\lambda^\alpha-\xi b_\lambda^\alpha)p^{\lambda\beta}\xi\,d\xi$$

$$N^\alpha=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varkappa p^{\alpha3}\,d\xi,\qquad \varkappa=1-2H\xi+K\xi^2$$

Здесь малые греческие индексы пробегают значения 1, 2 и соответствуют проекциям на криволинейные координаты ξ^α в срединной поверхности оболочки в недеформированном состоянии Ω, $p^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты симметричного тензора напряжений Коши, ξ — поперечная координата, отсчитываемая по нормали к Ω, $|\xi|\leqslant h/2$, h — толщина оболочки, b_β^α — компоненты второй квадратичной формы Ω, H — средняя кривизна Ω, K — гауссова кривизна Ω.

Имеют место уравнения равновесия (для простоты принято, что внешние силы на лицевых поверхностях оболочки равны нулю)

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}-b_\beta^\alpha N^\beta=0 \tag{1.1}$$

$$N^\alpha{}_{;\alpha}+T^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}=0 \tag{1.2}$$

$$M^{\alpha\beta}{}_{;\beta}-N^\alpha=0 \tag{1.3}$$

$$(T^{\alpha\beta}+b_\sigma^\alpha M^{\beta\sigma})e_{\alpha\beta}=0 \tag{1.4}$$

Точкой с запятой в индексах обозначается ковариантное дифференцирование вдоль Ω, $e_{\alpha\beta}$ — тензор Леви-Чивиты ($e_{12}=-e_{21}=\sqrt{a}$, $a=\det\|a_{\alpha\beta}\|$, $a_{\alpha\beta}$ — метрика на Ω, $e_{11}=e_{22}=0$).

Уравнения (1.1) — (1.4) являются точными следствиями уравнений равновесия оболочки как трехмерного упругого тела и не содержат приближений.

Система уравнений (1.1)—(1.4) содержит шесть уравнений относительно десяти неизвестных $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ и N^{α}. Из нее можно выделить подсистему из трех уравнений, содержащих шесть неизвестных функций [4, 5]. Наиболее интересны следующие две возможности [3].

Введем симметричные тензоры

$$S^{\alpha\beta}=T^{\alpha\beta}+b_{\sigma}^{\alpha}M^{\beta\sigma}, \qquad M^{(\alpha\beta)}={}^1/_2(M^{\alpha\beta}+M^{\beta\alpha}) \tag{1.5}$$

Тензор $S^{\alpha\beta}$ симметричен в силу уравнения (1.4). В равенствах (1.5) и в дальнейшем круглые скобки в индексах означают симметризацию.

Нетрудно проверить, что из уравнений (1.1)—(1.4) вытекают следующие уравнения для $S^{\alpha\beta}$ и $M^{(\alpha\beta)}$:

$$(S^{\alpha\beta}-b_{\sigma}^{\alpha}M^{(\beta\sigma)})_{;\beta}-b_{\sigma}^{\alpha}M^{(\beta\sigma)}{}_{;\beta}=0 \tag{1.6}$$

$$M^{(\alpha\beta)}{}_{;\alpha\beta}+S^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}-M^{(\alpha\beta)}c_{\alpha\beta}=0 \tag{1.7}$$

Здесь $c_{\alpha\beta}=b_{\alpha}^{\lambda}b_{\lambda\beta}$ — компоненты третьей квадратичной формы Ω.

Возможна другая модификация уравнений равновесия. Введем симметричный тензор

$$N^{\alpha\beta}=S^{\alpha\beta}-{}^1/_2b_{\sigma}^{\alpha}M^{(\sigma\beta)}-{}^1/_2b_{\sigma}^{\beta}M^{(\sigma\alpha)} \tag{1.8}$$

Согласно определениям (1.5) и (1.8) тензоров $S^{\alpha\beta}$ и $N^{\alpha\beta}$, тензор $N^{\alpha\beta}$ связан с тензором растягивающих усилий $T^{\alpha\beta}$ равенством

$$N^{\alpha\beta}=T^{\alpha\beta}+{}^1/_2b_{\sigma}^{\alpha}M^{(\beta\sigma)}-{}^1/_2b_{\sigma}^{\beta}M^{(\alpha\sigma)} \tag{1.9}$$

Из уравнений равновесия (1.1)—(1.4) следует, что тензоры $N^{\alpha\beta}$ и $M^{(\alpha\beta)}$ удовлетворяют уравнениям

$$(N^{\alpha\beta}+{}^1/_2b_{\sigma}^{\beta}M^{(\sigma\alpha)}-{}^1/_2b_{\sigma}^{\alpha}M^{(\sigma\beta)})_{;\beta}-b_{\sigma}^{\alpha}M^{(\sigma\beta)}{}_{;\beta}=0 \tag{1.10}$$

$$M^{(\alpha\beta)}{}_{;\alpha\beta}+N^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}=0 \tag{1.11}$$

Во избежание недоразумений отметим, что в [3] применяется определение второй квадратичной формы, отличающееся знаком от общепринятого, поэтому имеется различие во внешнем виде соотношений (1.1)—(1.11) и соотношений работы [3].

2. Меры деформаций. Пусть $\hat{a}_{\alpha\beta}$, $\hat{b}_{\alpha\beta}$ — компоненты первой и второй квадратичных форм срединной поверхности в деформированном состоянии. Определим меру растяжения срединной поверхности $A_{\alpha\beta}$ и меру изгиба $B_{\alpha\beta}$ равенствами

$$A_{\alpha\beta}={}^1/_2(\hat{a}_{\alpha\beta}-a_{\alpha\beta}), \qquad B_{\alpha\beta}=\hat{b}_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta} \tag{2.1}$$

В геометрически линейной теории формулы (2.1) имеют вид

$$A_{\alpha\beta}=\overset{i}{r}_{(\alpha}u_{i,\beta)}, \qquad B_{\alpha\beta}=n_i\overset{i}{u}_{;\alpha\beta} \tag{2.2}$$

Здесь малые латинские индексы соответствуют проекциям на декартовы оси наблюдателя x^i и пробегают значения 1, 2, 3; $x^i=r^i(\xi^{\alpha})$ — уравнения поверхности Ω, $\overset{i}{r}_{\alpha}\equiv\overset{i}{r}_{,\alpha}$ — касательные векторы к Ω, запятой в индексах обозначается дифференцирование по ξ^{α}, n_i — компоненты нормали к Ω, u^i — компоненты вектора перемещений срединной поверхности.

В [6, 7] в качестве меры изгиба предложено использовать тензор

$$\rho_{\alpha\beta}=B_{\alpha\beta}-{}^1/_2 b^{\lambda}_{\alpha} A_{\lambda\beta}-{}^1/_2 b^{\lambda}_{\beta} A_{\lambda\alpha} \tag{2.3}$$

Добавочные слагаемые выходят за рамки точности классической теории и позволяют аннулировать в выражении $B_{\alpha\beta}$ через перемещения ряд членов

$$\rho_{\alpha\beta}=-\theta_{(\alpha;\beta)}+\omega e_{\sigma(\alpha} b_{\beta)}$$
$$-\theta_{\alpha}=n_i u^i_{,\alpha}=u_{,\alpha}+b^{\lambda}_{\alpha} u_{\lambda}, \qquad \omega={}^1/_2 e^{\alpha\beta} u_{\alpha;\beta} \tag{2.4}$$

Здесь $u=n_i u^i$ и $u_\alpha=r^i_\alpha u_i$ — нормальное и тангенциальные перемещения.

3. Уравнения состояния. Оказывается [3, 6, 7], что уравнения равновесия в форме (1.6)—(1.7) и (1.10)—(1.11) будут уравнениями Эйлера функционала (L — работа внешних сил):

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\, d\omega - L \tag{3.1}$$

если Φ считается функцией, соответственно, от $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ и $A_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$. При этом в уравнениях равновесия (1.6), (1.7)

$$S^{\alpha\beta}=\partial\Phi(A, B)/\partial A_{\alpha\beta}, \quad M^{(\alpha\beta)}=-\partial\Phi(A, B)/\partial B_{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

а в уравнениях равновесия (1.10), (1.11)

$$N^{\alpha\beta}=\partial\Phi(A, \rho)/\partial A_{\alpha\beta}, \quad M^{(\alpha\beta)}=-\partial\Phi(A, \rho)/\partial\rho_{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

4. Соотношения Новожилова — Балабуха. Покажем теперь, как в рамки изложенной схемы вкладывается теория Новожилова — Балабуха.

Пусть срединная поверхность оболочки не содержит омбилических точек, т. е. точек, в которых главные радиусы кривизны совпадают. Введем тензор $b^*_{\alpha\beta}=e_{\gamma(\alpha} b^{\gamma}_{\beta)}={}^1/_2(e_{\gamma\alpha} b^{\gamma}_{\beta}+e_{\gamma\beta} b^{\gamma}_{\alpha})$. Тензор $b^*_{\alpha\beta}$, так же как и тензор Леви-Чивита, зависит от выбора ориентации системы координат на срединной поверхности (от того, в какой — правой или левой — системе координат было положено $e_{12}=\sqrt{a}$). В линиях кривизны этот тензор имеет единственную отличную от нуля компоненту $b^*_{12}=-{}^1/_2\sqrt{a}(1/R_1-1/R_2)$ (R_1, R_2 — главные кривизны). Величина $b={}^1/_2 b^*_{\alpha\beta} b^{*\alpha\beta}$ обращается в нуль только в омбилических точках и на рассматриваемой поверхности отлична от нуля.

Введем тензор $d_{\alpha\beta}$ по формуле $d_{\alpha\beta}=b^*_{\alpha\beta}/b^{1/2}$. В линиях кривизны компоненты этого тензора имеют значения $d_{12}=d_{21}=\operatorname{sgn} b^*_{12}=\pm 1$, $d_{11}=d_{22}=0$. В каждой системе координат компоненты тензора $d_{\alpha\beta}$ по модулю ограничены сверху числом $2^{1/2}$, поскольку $d_{\alpha\beta} d^{\alpha\beta}=2$.

Рассмотрим меру изгиба, определенную формулой

$$\varkappa_{\alpha\beta}=-\rho_{\alpha\beta}-{}^1/_2 H d_{\alpha\beta} d^{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \tag{4.1}$$

Тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$ не зависит от выбора ориентации координат на срединной поверхности (направление нормали относительно Ω считается фиксированным), поскольку тензор $d_{\alpha\beta} d^{\gamma\delta}$ от него не зависит. В линиях кривизны компоненты тензора $\varkappa_{\alpha\beta}$ совпадают с мерами изгиба, использованными Новожиловым [8] (при написании физических компонент тензора ставится штрих у индексов) $\varkappa_{1'1'}=\varkappa_1$, $\varkappa_{2'2'}=\varkappa_2$, $\varkappa_{1'2'}=\tau$.

Примем, что плотность энергии оболочки имеет вид

$$\Phi=\mu h[\sigma(A^{\alpha}_{\alpha})^2+A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}]+{}^1/_{12}\mu h^3[\sigma(\varkappa^{\alpha}_{\alpha})^2+\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa^{\alpha\beta}] \tag{4.2}$$

где μ — модуль сдвига, $\sigma=\nu/(1-\nu)$, ν — коэффициент Пуассона.

Функцию Φ можно рассматривать так же, как функцию от $A_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$, воспользовавшись для пересчета в (4.2) от $\varkappa_{\alpha\beta}$ к $\rho_{\alpha\beta}$ и $A_{\alpha\beta}$ формулой (4.1).

Уравнения состояния (3.3) приобретают вид

$$N^{\alpha\beta}=2\mu h(\sigma A_\lambda^\lambda a^{\alpha\beta}+A^{\alpha\beta})-{}^1/_{12}\mu h^3 H\, d^{\alpha\beta}\, d^{\gamma\delta}\, \varkappa_{\gamma\delta} \tag{4.3}$$

$$M^{(\alpha\beta)}={}^1/_6\mu h^3(\sigma\varkappa_\lambda^\lambda a^{\alpha\beta}+\varkappa^{\alpha\beta})$$

Уравнения (4.3) есть в точности уравнения состояния Новожилова — Балабуха. Чтобы убедиться в этом, необходимо учесть, что в [8] они записываются как уравнения для $T_1=T_{1'1'}=N_{1'1'}$, $T_2=T_{2'2'}=N_{2'2'}$, $S=S_{1'2'}=N_{1'2'}-{}^1/_2(1/R_1+1/R_2)M_{(1'2')}$, $M_1=M_{(1'1')}$, $M_2=M_{(2'2')}$ и $H=M_{(1'2')}$.

Приведенное построение было найдено при помощи следующего простого соображения. Если некоторые соотношения записаны в выделенной системе координат, то их можно переписать в тензорном виде, пересчитав во всех других системах по тензорному закону. Линии кривизны однозначно определены на срединной поверхности, поэтому соотношения, выведенные в линиях кривизны, можно сделать тензорными. Трудность возникает, если поверхность имеет омбилические точки, в которых любые два ортогональных направления являются главными направлениями тензоров $b_{\alpha\beta}$. Поскольку в омбилических точках тензор $b^*_{\alpha\beta}$ равен нулю, в определении тензора $d_{\alpha\beta}$ появляется неопределенность типа 0/0. Отметим, что в выражении для меры изгиба (4.1) это проявится только при $H\neq0$, поскольку тензор $d_{\alpha\beta}$ входит вместе с множителем H. В частности, для пластин $H=0$ и проведенное построение остается в силе.

Запись уравнений Новожилова — Балабуха в тензорной форме завершается доопределением тензора $d_{\alpha\beta}$ в омбических точках любым образом, но так, чтобы выполнялось равенство $d_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta}=2$. Уравнения состояния при этом зависят от способа доопределения, однако соответствующая погрешность выходит за рамки точности классической теории оболочек.

Утверждение в [3] о невозможности придать теории Новожилова — Балабуха тензорную форму было связано с тем, что в качестве мер изгиба перебирались выражения вида $\varkappa_{\alpha\beta}=-\rho_{\alpha\beta}+Q^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta}$, где тензор $Q^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ считался линейной функцией от $b_{\alpha\beta}$. Согласно (4.1), в тензорной формулировке уравнений Новожилова — Балабуха $Q^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ есть однородная первой степени нелинейная функция от $b_{\alpha\beta}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* Новый метод расчета тонких оболочек.– Изв. АН СССР, ОТН, 1946, № 1, с. 35–48.
2. *Балабух Л. И.* Изгиб и кручение конических оболочек.– Тр. ЦАГИ, 1946, № 577. 63 с.
3. *Budiansky B., Sanders J. L.* On the best first-order linear shell theory.– In: Progress in Applied Mechanics. The Prager Anniv. Volume. New-York: Macmillam 1963, p. 129–140.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Уравнения теории оболочек.– ПММ, 1940, т. 4, вып. 2, с. 35–42.
5. *Лурье А. И.* Общая теория упругих тонких оболочек.– ПММ, 1940, т. 4, вып. 2, с. 7–34.
6. *Koiter W. T.* A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells.– In: The Symp. Theory Thin Elastic Shells, Amsterdam: North-Holland, 1960, p. 12–33.
7. *Sanders J. L.* An improved first approximation theory of thin shells.– NASA Techn. Rep., R – 24, 1959. 11 p.
8. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

Москва

Поступила в редакцию 21.XI.1980