МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1982

УДК 539.3

ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУР РАЗРУШЕНИЯ СЛАБО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТРЕЩИН

ГОЛЬДШТЕЙН Р. В., КАПЦОВ А. В.

Процесс деформирования и разрушения реальных гетерогенных тел нередко сопровождается образованием тех или иных упорядоченных зон локализации деформаций, систем трещин или трещиноподобных образований разных масштабов. Закономерности процесса образования структур при деформировании и разрушении слабо изучены. С имеющимися подходами можно познакомиться, например, по работам [1–10] и указанной там литературе. В частности, в [10] предложен подход к описанию развития структур разрушения на основе анализа последовательных трансформаций характерных структурных элементов среды, сопровождающихся появлением в них зон разрушения, с учетом вызываемых этими трансформациями перераспределений напряжений в среде; сформулированы некоторые условия формирования структур разрушения и рассмотрен пример образования эшелона трещин в плоской модели хрупкой пористой среды в условиях двухосного сжатия.

Предлагаемая работа посвящена развитию предложенного ранее подхода [10] [1]. Рассматриваются закономерности образования пространственных структур разрушения, элементами которых являются плоские трещины (отрыва или сдвига), возникающие достаточно далеко одна от другой, так что их взаимодействие можно считать слабым и учитывать его, проводя суммирование возмущений упругого поля, вызываемых отдельными трещинами. Более подробное изложение поставленных вопросов, детали вычислений и дополнительные примеры приведены в работе [2].

Анализируется часто встречающаяся на практике ситуация, когда материал в силу особенностей строения (структура, текстура и т. п.) обладает определенной геометрией ослабленных мест. Выделены следующие виды ослабленных зон: система параллельных плоскостей и параллельных прямых, скрещивающиеся прямые, одиночная прямая линия, характерные для многих естественных и искусственно созданных материалов. В качестве примера можно указать конструкционные стали низкой и средней прочности с ярко выраженной «полосчатостью» (полосы-плоскости представляют собой скопления перлитных колоний), некоторые виды слоистых или волокнистых композиционных материалов. Нередко анизотропия прочностных свойств, вызываемая особенностями строения материала, проявляется сильнее, чем анизотропия деформационных свойств, что имеет место, например, в полосчатых сталях.

1. Формулировка модели. Предполагается, что трещины возникают в изотропной и однородной по деформационным свойствам среде, обладающей некоторой исходной структурой ослабленных по прочности зон (прямых, плоскостей и т. д.). В этих зонах и появляются трещины примерно одинакового размера, параллельные определенному направлению. Считается, что соотношение между приложенными нагрузками, характерными размерами трещин и трещиностойкостью материала таково, что роста трещин не происходит. Предполагается, что трещины возникают последовательно и каждая новая трещина появляется в поле уже существующих таким образом, чтобы полная потенциальная энергия тела с учетом имеющихся трещин (включая и новую) была минимальна. В случае трещин отрыва это энергетическое условие, как показано, эквивалентно критерию возникновения трещины в том месте, где максимальны растягивающие напряжения. Для трещин сдвига соответствие между «энергетическим» и «силовым» условиями оказывается более сложным.

---

[1] См. также *Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.* Структуры разрушения (Условия формирования. Эшелоны трещин).– Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1977, № 110. 59 с.

[2] *Гольдштейн Р. В., Капцов А. В.* Взаимодействие удаленных трещин и формирование структур разрушения.– Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981, № 179. 66 с.

Энергетический критерий позволяет определить как удаление одной трещины от другой, так и их взаимную ориентацию, поскольку наличие ослабленных зон приводит к существованию локальных минимумов энергии системы в рассматриваемом приближении. Естественно считать, что возникновение трещин в более глубоких минимумах предпочтительно, а прекращение роста структуры разрушения по определенному механизму связано с исчезновением локальных минимумов энергии.

Если среда обладает рядом характерных масштабов (связанных, например, с различными уровнями ее исходной структуры), то начальная стадия процесса разрушения на каждом из масштабных уровней может происходить в соответствии с рассматриваемой моделью. Для количественного анализа модели нужно рассмотреть упругое поле, возникающее вдали от трещины отрыва или сдвига.

2. Поле напряжений вдали от трещины. 1. Пусть в безграничной упругой среде имеется трещина-разрез вдоль некоторой поверхности S. Будем различать «верхнюю» S^+ и «нижнюю» S^- поверхности трещины. Предположим, что на поверхностях трещины действуют равные по модулю и противоположно направленные нагрузки

$$t_k^+=-t_k^-, \quad t_k^\pm=\sigma_{kj}n_j^\pm \quad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{2.1}$$

где $n^\pm$ — внешняя нормаль к поверхностям $S^\pm$. Напряжения, возникающие в произвольной точке P среды от присутствия трещины, выражаются следующей формулой (см., например, [11]):

$$\sigma_{ij}=-\iint\limits_{S^+} b_k(Q)S_{kij}(Q,P)\,dS(Q) \quad (k,i,j=1,2,3) \tag{2.2}$$

где $b_k=u_k^+-u_k^-$ — компоненты скачка смещений при переходе через поверхность разреза. Компоненты тензора S_{kij} выписаны, например, в [11]. Здесь и ниже, если не оговорено противное, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Перейдем к анализу «дальнего» поля, создаваемого трещиной. Для этого проведем в (2.2) разложение в предположении, что точка наблюдения P удалена от области трещины, т. е. $R_P\gg R_Q$, $Q\in S$, $R_M^2=x_k(M)x_k(M)$, и ограничимся двумя членами разложения. Учтем, что для функции Φ, зависящей от разности радиус-векторов $\mathbf{R}_P-\mathbf{R}_Q$, имеем $\Phi(\mathbf{R}_P-\mathbf{R}_Q)=\Phi(\mathbf{R}_P)-(\mathbf{R}_Q\nabla)\Phi(\mathbf{R}_P)+\ldots$. Поэтому первый член разложения получим заменив в выражении для S_{kij} производные $R_{,l}$ на $R_{P,l}=x_l(P)R_P^{-1}$ и подставив результат в (2.2):

$$\sigma_{ij}(P)=-\frac{k_0\mu}{2\pi R_P^3}\left\{\delta_{ij}\left[\frac{1-4\nu}{1-2\nu}u_{kk}-3V\right]+R_{P,i}R_{P,j}\left[\frac{15}{1-2\nu}V-3u_{kk}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{6\nu}{1-2\nu}[R_{P,j}R_{P,h}u_{hi}+R_{P,i}u_{hj}]-2u_{ij}\right\},\quad k_0=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{2.3}$$

$$V=u_{ih}R_{P,i}R_{P,h},\quad u_{ik}=\frac{1}{2}(P_{ik}+P_{ki}),\quad P_{ik}=\iint\limits_{S^+} b_i dS_k \tag{2.4}$$

где P_{ik} — тензор, компоненты которого представляют собой проинтегрированные по проекциям области трещины на координатные плоскости, составляющие вектора скачка смещений. Второй член разложения поля напряжений σ_{ij}^{II} ввиду громоздкости здесь не приводим. Отметим, что σ_{ij}^{II} убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния от трещины; напряжение σ_{ij}^{II} выражается при помощи тензора K_{ijl}, где

$$K_{ijl}=\iint\limits_{S^+} b_i x_j dS_l \tag{2.5}$$

В случае трещины, занимающей плоскую область (для определенности в плоскости $x_3=0$), могут быть отличны от нуля лишь компоненты P_{i3}.

и K_{ij3}. В дальнейшем P_{i3} будем называть компонентами «объема» трещины, имея в виду, что для плоской трещины нормального разрыва $P_{13}=P_{23}=0$, а P_{33} — действительно объем (или изменение объема трещины).

Если рассматривать не трещину, а дислокационную петлю с постоянным вектором Бюргерса $\mathbf{b}=\{b_i\}$, то формулы для создаваемого ею дальнего поля напряжений имеют вид (2.3) с заменой тензора P_{ik} на $P_{ik}{}^0=b_iS_k$, где S^+ — поверхность, натянутая на контур дислокационной петли. Обычно в теории дислокаций рассматривают главный член дальнего поля смещений дислокационной петли (см., например, [12]). Его выписывают на основе формулы для смещений в произвольной точке среды, вызываемых дислокационной петлей. Естественно, если трещину представить совокупностью дислокационных петель с бесконечно малыми векторами Бюргерса [13], то из этой формулы после дифференцирования, перехода к напряжениям и разложения при больших R_P получим те же соотношения (2.3). Таким способом первый член разложения напряжений выписан в [14] применительно к плоским трещинам.

В теории дислокаций $P_{ik}{}^0$ называют тензором дислокационного момента. По аналогии можно P_{ik} и K_{ijk} называть первым и вторым дислокационным моментом трещины.

Рассмотрим более подробно случаи плоской трещины нормального отрыва и сдвига.

2. Для трещины нормального отрыва $P_{33}=0$ и, вообще говоря, $K_{3j3}\neq 0$, $j=1, 2$ (остальные компоненты P_{ij}, $K_{ijk}=0$). Положим $K_{323}=0$, что, в частности, имеет место, если область трещины S^+ и скачок смещений b_3 симметричны относительно оси x_2. Тогда из (2.3) следует

$$\sigma_{ij}{}^{\mathrm{I}}=-\frac{k_0\mu P_{33}}{2\pi R_P{}^3}\left\{\delta_{ij}\left[\frac{1-4\nu}{1-2\nu}-3R_{P,3}^2\right]+R_{P,i}R_{P,j}\left[\frac{15R_{P,3}^2}{1-2\nu}-3\right]\right\}-$$
$$-\frac{6\nu}{1-2\nu}R_{P,3}\left[R_{P,i}\delta_{j3}+R_{P,j}\delta_{i3}\right]-2\delta_{i3}\delta_{j3}\Big\} \qquad (2.6)$$

Второй член разложения для напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij}{}^{\mathrm{II}}=-\frac{3k_0\mu K_{313}}{2\pi R_P{}^4}\left\{\delta_{ij}R_{P,1}\left[\frac{1-4\nu}{1-2\nu}-5R_{P,3}^2\right]+\right.$$
$$+R_{P,i}R_{P,j}R_{P,1}\left[\frac{35}{1-2\nu}R_{P,3}^2-5\right]-\frac{10\nu}{1-2\nu}R_{P,3}R_{P,1}\left[R_{P,i}\delta_{3j}+R_{P,j}\delta_{3i}\right]-$$
$$(2.7)$$
$$-2R_{P,1}\delta_{i3}\delta_{j3}-\left[\frac{5}{1-2\nu}R_{P,3}^2-1\right]\left[R_{P,j}\delta_{1i}+R_{P,i}\delta_{1j}\right]+\left.\frac{2\nu}{1-2\nu}R_{P,3}\left[\delta_{3i}\delta_{1j}+\delta_{3j}\delta_{1i}\right]\right\}$$

Отметим, что на определенных направлениях некоторые компоненты первого члена разложения тензора σ_{ij} обращаются в нуль. Из (2.6) следует, что $\sigma_{13}{}^{\mathrm{I}}$ и $\sigma_{23}{}^{\mathrm{I}}$ обращаются в нуль при $R_{P,3}^2={}^1/_5$, а $\sigma_{33}{}^{\mathrm{I}}$ — при $R_{P,3}^2=(3+\sqrt{24})/15$. Это означает, что на этих направлениях напряжения уменьшаются как $1/R_P{}^4$. Поэтому для исследования взаимодействия удаленных трещин на этих направлениях надо использовать следующие члены разложения тензора напряжений.

Определим теперь область, в которой асимптотические формулы (2.6) хорошо описывают упругое поле, создаваемое трещиной. Это удобно сделать на примере эллиптической трещины нормального разрыва ($x_1{}^2/a_1{}^2+x_2{}^2/a_2{}^2=1$ — область S), поскольку для нее при полиномиальных нагрузках $\sigma_{33}=-P_n(x_1, x_2)$, $n\leqslant 3$ выписано точное решение [15]. Из формул (2.6) следует, что в главном члене напряжения σ_{33} в плоскости $x_3=0$ и вдоль оси x_3 разного знака и по модулю первые в восемь раз меньше последних. Для определения области, в которой асимптотические формулы хорошо описывают точное решение, рассмотрим трещину, на поверхности которой задана линейно меняющаяся вдоль оси x_1 нагрузка $\sigma_{33}=-A+Bx_1$. Сравнение, проведенное для напряжений σ_{33} в плоскости $x_3=0$

и на оси x_3, показывает, что точность асимптотических выражений зависит от отношений a_2/a_1 и при $R_P > 3a_1$ достаточно высока. Существенно, что главный член $\sim R_P^{-3}$ при $R_P > 4a_1$ дает 90% точного решения. В этой области можно, рассматривая возмущения, вносимые трещиной в упругое поле в среде, пользоваться асимптотическими формулами.

3. Рассмотрим трещину сдвига. В случае, когда плоскость трещины перпендикулярна оси x_3, в тензоре P_{ik} отличны от нуля компоненты P_{13} и P_{23}. Тогда $V = R_{P,3} R_{P,i} P_{i,3}$, $u_{ii} = 0$ $(i=1, 2, 3)$ и из (2.3) следует, что

$$\sigma_{ij}{}^{\mathrm{I}} = -\frac{k_0\mu}{2\pi R_P{}^3}\left\{-\delta_{ij} 3 R_{P,3} R_{P,l} P_{l3} + \frac{15}{1-2\nu} R_{P,i} R_{P,j} R_{P,3} R_{P,k} P_{k3} - \right.$$
$$\left. - \frac{3\nu}{1-2\nu}[R_{P,j}\delta_{3i} R_{P,k} P_{k3} + R_{P,i}\delta_{3j} R_{P,k} P_{k3} + R_{P,j} R_{P,k} P_{ik} + R_{P,i} R_{P,k} P_{jk}] - P_{ij} - P_{ji}\right\} \quad (2.8)$$

Аналогично случаю трещин отрыва определим область, где асимптотические формулы (2.8) хорошо описывают упругое поле, создаваемое трещиной, на примере эллиптической трещины сдвига, к поверхностям которой приложены равные и противоположно направленные нагрузки величиной q под углом $(\pi/2-\gamma)$ к главной оси эллипса. При этом на поверхности трещины граничные условия имеют вид

$$\sigma_{13} = -q\sin\gamma, \quad \sigma_{23} = -q\cos\gamma \quad (2.9)$$

Сравнение точных и асимптотических формул проведено для различных a_2/a_1, ν, направлений вектора q в плоскости $x_3=0$ и на оси x_3. Расчеты показывают, что в плоскости $x_3=0$ на расстоянии $R_P > 3a_1$ от середины эллипса асимптотические формулы дают 90% точного решения. На оси x_3 асимптотические формулы выходят на этот уровень при $R_P > 4a_1$.

3. Энергия дальнего взаимодействия трещин. 1. Рассмотрим N трещин в безграничной среде, занимающих области G_p. Поверхности трещин в деформированном состоянии обозначим S_p. На поверхностях трещин заданы усилия $(t_i)_{S_k} = (\sigma_{ij} n_j)_{S_k}$ $(k=1, 2, \ldots, N)$. Потенциальную энергию среды с N трещинами при отсутствии массовых сил можно записать в виде [16]

$$W_n = \iiint a\, dv - \sum_{l=1}^{N} \iint_{S_l{}^+} t_i b_i\, dS, \quad a = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (3.1)$$

Здесь a — упругая энергия единицы объема, σ_{ij}, ε_{ij} — напряжение и деформация в среде с N трещинами, b_i — скачок смещений при переходе через поверхность трещины (интегрирование в первом интеграле в (3.1) проводится по всему пространству, за исключением объемов трещин).

Преобразуя первый интеграл в (3.1) по частям и используя уравнения равновесия $\sigma_{ij,j}=0$, получим

$$W_N = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}\iint_{S_l{}^+} t_i b_i\, dS \quad (3.2)$$

Для вычисления скачков смещений b_i запишем систему уравнений, которая является следствием уравнения Сомильяны и в которой b_i — неизвестные функции координат

$$(\sigma_{ij})_{S_m} = L_{ij}(b_k) - \sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{N} \iint_{S_m} b_k S_{kij}\, dS \qquad (m=1,\ldots,N) \quad (3.3)$$

$$L_{ij}(b_k) = \lim_{P\to p}\iint_{S_m} u_k(Q) S_{kij}(Q,P)\, dS(Q), \quad p\in S_m \quad (3.4)$$

Предполагая, что для одиночной трещины в безграничной среде известен разрешающий оператор $F^{\vee}_{kji}$, так что

$$(b_k{}^0)_{S_m}=F^{\vee}_{kij}(\sigma_{ij}) \qquad (3.5)$$

и решая систему уравнений (3.3) методом последовательных приближений, выбрав в качестве начального приближения (3.5), найдем, что в первом приближении, учитывающем влияние трещин, скачок смещений выражается формулой

$$(b_k)_{S_m}=K^{\vee}_{kij}\left\{\sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{N}\iint_{S_m} b_q{}^0 S_{qij}\,dS\right\}+(b_k{}^0)_{S_m} \qquad (3.6)$$

Обозначим $\sigma_{ij}{}^{lm}$ напряжение, создаваемое трещиной m на месте трещины l

$$\sigma_{ij}{}^{lm}=-\iint_{S_m} b_k{}^0(Q)S_{kij}(Q,P)\,dS(Q), \qquad P\in S_l \qquad (3.7)$$

Подставляя (3.6) в (3.2) и воспользовавшись равенством, которое следует из теоремы взаимности

$$\iint_{S_l}\sigma_{ij}F_{kpq}(\sigma_{pq}{}^{lm})\,dS=\iint_{S_l}\sigma_{ij}{}^{lm}F_{kpq}(\sigma_{pq})\,dS \qquad (3.8)$$

получаем, что переменная часть энергии W_N, зависящая от расположения трещин, которую обозначим W, выражается формулой

$$W=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{l,m=1\\ l\neq m}}^{N}\iint_{S_m}\sigma_{ij}{}^{lm}b_m{}^{(0)}dS_j \qquad (3.9)$$

Из формулы (3.9) следует, что часть полной потенциальной энергии взаимодействия, зависящая от расположения трещин, в линейном приближении равна сумме энергий взаимодействия всевозможных пар трещин. Энергию взаимодействия пары можно интерпретировать как сумму работ напряжений, вызываемых каждой из трещин на месте другой трещины, на смещениях ее поверхностей.

2. Рассмотрим теперь взаимодействие двух трещин нормального разрыва, расположенным в параллельных плоскостях (или в одной плоскости). Именно такое расположение понадобится ниже при анализе структур разрушения. Из (3.9) с учетом (2.6) получим для удаленных друг от друга трещин

$$W=\frac{k_0\mu P_{33}^{(1)}}{4\pi(1-2\nu)}\iint_{S_2{}^+}\frac{(15n_3{}^4-6n_3{}^2-1)\,b_3\,dS}{R^3}+$$

$$+\frac{k_0\mu P_{33}^{(2)}}{4\pi(1-2\nu)}\iint_{S_1{}^+}\frac{(15n_3{}^4-6n_3{}^2-1)\,b_3\,dS}{R^3} \qquad (3.10)$$

Раскладывая первое и второе слагаемые в формуле (3.10) при больших R и учитывая, что в первом слагаемом $|\mathbf{R}|=|\mathbf{R}_0+\boldsymbol{\xi}|$, а во втором $|\mathbf{R}|=|\mathbf{R}_0-\boldsymbol{\xi}|$, где $\mathbf{R}_0$ – вектор, соединяющий центры трещин, получим[3]

$$W=\alpha(15n_3{}^4-6n_3{}^2-1)R_0{}^{-3}$$

$$\alpha=k_0\mu P_{33}^{(1)}P_{33}^{(2)}[2\pi(1-2\nu)]^{-1} \qquad (3.11)$$

[3] Энергия взаимодействия трещин выписана с учетом второго члена разложения напряжений, и поправка оказывается порядка $R_0{}^{-4}$. В случае одинаковых и одинаково ориентированных трещин поправка порядка $R_0{}^{-4}$ обращается в нуль и для энергии будет справедлива формула (3.11), где вместо $P_{33}^{(1)}P_{33}^{(2)}$ надо писать $P_{33}{}^2$.

Из (3.11) следует, что энергия взаимодействия трещин зависит в главном члене от расстояния между ними и от угла между осью x_3 и линией, соединяющей их центры. Будем считать расстояние между трещинами фиксированным и найдем минимум энергии по n_3. Получим $W_{\min} = -0{,}16\alpha R_0^{-3}$ при $n_3^2=0{,}2$. Максимального значения энергия достигает на направлении $n_3^2=1$ и $W_{\max}=8\alpha R_0^{-3}$. Естественно предполагать, что возникновение каждой новой трещины в поле уже образовавшихся происходит таким образом, чтобы полная потенциальная энергия системы с учетом вновь появившихся трещин была минимальна. Это предположение в случае «дальнего» взаимодействия параллельных трещин отрыва эквивалентно предположению о том, что очередная трещина возникает в том месте, где максимальны растягивающие, нормальные к поверхности трещины напряжения, поскольку сравнение выражения (3.11) для энергии с главным членом асимптотической формулы (2.6) показывает, что они отличаются на отрицательный множитель.

Таким образом, для $R_0=\text{const}$ наиболее выгодно возникновение трещины отрыва так, чтобы ее центр находился на пересечении конуса $n_3^2=n_0^2$ с шаром $R=R_0$ и наименее выгодно расположение трещин одна над другой.

3. Для двух трещин сдвига, лежащих в параллельных плоскостях, подставляя напряжения σ_{13}^{I}, σ_{23}^{I} из (2.8) в общее выражение для энергии (3.9), имеем

$$W=\frac{\beta P^{(1)}P^{(2)}}{R_0^3}\{(15a^2-3\nu)(1-a^2)\cos(\alpha-\varphi^{(1)})\cos(\alpha-\varphi^{(2)})-$$
$$-\cos(\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)})(1-2\nu+3\nu a^2)\},\qquad a^2=n_3^2 \tag{3.12}$$

$$(P^{(i)})^2=(P_{13}^{(i)})^2+(P_{23}^{(i)})^2,\qquad \sin\varphi^{(i)}=P_{13}^{(i)}[P^{(i)}]^{-1}$$
$$\varphi_0=(^1/_2)(\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}),\qquad \sin\alpha=n_1(1-a^2)^{-1/2}$$
$$\beta=k_0\mu[2\pi(1-2\nu)]^{-1},\qquad \varphi_1=\varphi^{(2)}-\varphi^{(1)} \tag{3.13}$$

где n_1, n_2, n_3 — направляющие косинусы вектора R_0. Заметим, что выражение (3.12) справедливо для трещин разных размеров и формы. Исследуем зависимость энергии от направления $\mathbf{n}$, считая R_0 постоянным. Минимальное значение энергии определяется минимизацией выражения (3.12). Один из минимумов определяется соотношениями $a^2=0$, $\alpha=\varphi_0$, $\alpha=\pi+\varphi_0$:

$$W_{1\min}=-\beta P^{(1)}P^{(2)}\left\{3\nu\cos^2\left(\frac{1}{2}\varphi_1\right)+(1-2\nu)\cos\varphi_1\right\}\Big/R_0^3 \tag{3.14}$$

Если трещины сильно отличаются или $\sin^2(\varphi_1/2)>\nu(5-\nu)^{-1}$, то второй минимум достигается при $a^2=0{,}5+0{,}1\nu(1+\sin^2(\varphi_1/2))$:

$$W_{2\min}=-\frac{\beta P^{(1)}P^{(2)}}{R_0^3}\left\{\sin^2\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\left(\frac{15}{4}-\frac{3\nu}{2}+\frac{3\nu^2}{20}\right)+\right.$$
$$\left.+1-\frac{\nu}{2}+\frac{3\nu^2}{20}\left(1+\sin^{-2}\frac{\varphi_1}{2}\right)\right\} \tag{3.15}$$

Если же $\sin^2(\varphi_1/2)<\nu(5-\nu)^{-1}$, т. е. если трещины мало отличаются по форме, то $a^2=1$:

$$W_{2\min}=-\beta(P^{(1)})^2(1+\nu)/R_0^3 \tag{3.16}$$

Если трещины совпадают, то из (3.14) и (3.16) видно, что $W_{1\min}=W_{2\min}$. Приведенные выражения[4] показывают, что для трещин сдвига

[4] См. *Гольдштейн Р. В., Капцов А. В.* Указ. публ., с. 173, где вычислены максимальное значение энергии и соответствующие ему направления.

положение экстремумов зависит от размеров и формы трещин и свойств среды, в то время как для трещин отрыва этого не было. Из энергетических соображений также следует, что одинаковым трещинам отрыва выгодно располагаться под углом одна к другой, а одинаковым трещинам сдвига выгодно располагаться одна над другой или на одной плоскости.

Чтобы яснее представить, чему соответствует экстремум энергии для трещин сдвига, введем два вектора

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_{13}, \sigma_{23}\}, \qquad \mathbf{p}=\{p_{13}, p_{23}\} \tag{3.17}$$

Тогда первый член разложения энергии взаимодействия трещин можно представить как скалярное произведение этих векторов, взятое с обратным знаком

$$W=-\sigma p \cos(\sigma p) \tag{3.18}$$

Если предположить, что $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0=\text{const}$, то минимум энергии соответствует максимальной проекции вектора $\boldsymbol{\sigma}$ на направлении $\mathbf{n}=\mathbf{p}_0/|p_0|$.

Найдем связь между вектором внешних нагрузок $\mathbf{q}$ и вектором $\mathbf{p}$. Выражая в случае эллиптической в плане трещины компоненты вектора $\mathbf{p}$ и вводя их отношение $p_{13}/p_{23}=\operatorname{tg}\varphi$, имеем

$$\operatorname{tg}\varphi=\varkappa \operatorname{tg}\gamma \tag{3.19}$$

Угол φ определяет направление вектора $\mathbf{p}_0$, угол γ по (2.9) определяет направление вектора $\mathbf{q}$ (в плоскости $x_3=0$). Величина $\varkappa$, приведенная ниже, меняется от единицы для круглых трещин с $k=0$ до $(1-\nu)^{-1}$ для трещин с $k=1$.

ν	$k^2=0$	0,04	0,25	0,64	0,91	1
0,5	1	1,01	0,103	0,278	1,63	2
0,3	1	1,005	1,05	1,138	3,29	1,43
0,15	1	1,002	1,02	1,06	1,12	1,17

Таким образом, для круглых трещин вектор $\mathbf{p}$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{q}$, а для вытянутых эллиптических трещин угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ определяется уравнением (3.19).

Первый член в разложении энергии взаимодействия двух трещин, имеющих сдвиговые и отрывные компоненты объема и расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси x_3, можно выразить аналогично (3.18), имея в виду, что вектора $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{p}$ составлены соответственно из компонент σ_{i3} и p_{i3} для $i=1, 2, 3$ тензоров напряжения и дислокационного момента трещин. В этом случае, так же как и для чисто сдвиговых трещин, минимальная энергия взаимодействия достигается в области, где проекция вектора $\boldsymbol{\sigma}$ на направление $\mathbf{p}_0/p_0$ максимальна. С этой точки зрения становятся более ясными соотношения, полученные в п. 2 для трещин отрыва. Для таких трещин вектора p и σ имеют только третью компоненту и энергия минимальна, если $\sigma_{33}=(\sigma_{33})_{\max}$, и максимальна, если $\sigma_{33}=(\sigma_{33})_{\min}$.

4. Анализ формирования упорядоченных систем слабо взаимодействующих трещин. 1. Исследуем возникновение упорядоченных систем при различной геометрии ослабленных зон. Рассмотрим сначала формирование систем трещин отрыва.

Пусть в среде имеются две ослабленные прямые, расположенные на пересечении вертикальной плоскости с плоскостями $x_3=0$ и $x_3=h$. Направим ось x_1 вдоль той из них A, на которой в окрестности начала координат возникла трещина. Определим возможное положение второй трещины на второй прямой B. Энергия взаимодействия двух трещин, расположенных на параллельных прямых, выражается формулой

$$W=\alpha(15n_3^4-6n_3^2-1)n_3^2h^{-3} \tag{4.1}$$

где h_3 — косинус угла между прямой, соединяющей две трещины, и осью x_3, а h — расстояние между прямыми. Минимизируя это выражение, находим $n_0^2 \approx 0{,}364$. Отсюда следует, что на прямой B существуют два минимума энергии с координатами $x_3=h$, $x_1=\pm 1{,}32h$. Отметим еще раз, что минимальная энергия для трещин нормального отрыва соответствует максимальным растягивающим напряжениям.

Пусть вторая трещина возникает, например, вблизи точки $x_3=h$, $x_1=1{,}32h$ на прямой B. На прямой A существует локальный минимум энергии, который появляется за счет наложения напряжений, вызванных присутствием первой и второй трещин. Предполагая, что третья трещина возникнет на прямой A, найдем энергию взаимодействия третьей трещины с двумя первыми

$$W\alpha^{-1} = -x^{-3} + (15n_3^4 - 6n_3^2 - 1)R^{-3} \tag{4.2}$$

где R — расстояние между второй и третьей трещиной, а x — между третьей и первой. Минимизируя эту функцию по x, находим координату $x_1^{(3)}$ третьей трещины. Поступая аналогично, определим положение четвертой трещины на прямой B, пятой — на прямой A и т. д. Получается своеобразная периодическая структура из трещин на разных прямых. Для вычисления их координат каждый раз учитываем взаимодействие с двумя ближайшими соседями, поскольку влияние третьей трещины будет примерно на порядок более слабым. Энергия в каждом следующем локальном минимуме будет по модулю не меньше, чем в предыдущем. Поэтому, если не меняется внешнее поле σ_{ij}^0, то процесс последовательного образования трещин неустойчив и приведет к формированию уходящей на бесконечность цепочки.

Отметим, что развитие подобной структуры в данном здесь приближении может начаться с одинаковой вероятностью в обе стороны по направлению $x_1>0$ и $x_1<0$, но возникновение третьей трещины предопределяет направление роста в ее сторону (это следует из сравнения энергий в локальных минимумах).

Пусть система ослабленных мест состоит из параллельных плоскостей, расположенных одна от другой на расстоянии R. Трещина-зародыш, возникшая на одной из этих плоскостей, вырезает конусом $n_3^2=n_0^2$ окружность радиуса $R=hn_0^{-1}(1-n_0^2)^{1/2}$ на двух соседних плоскостях. Это окружности максимальных растягивающих напряжений и на них наиболее вероятно возникновение трещин.

Пусть в произвольной точке окружности появляется трещина отрыва. Взаимодействие этих двух трещин приводит к тому, что появление третьей трещины наиболее выгодно на пересечении прямой, соединяющей первые две трещины с одной из ближайших плоскостей. Таким образом, в слоистой среде с постоянным или слабо меняющимся расстоянием между плоскостями (если расстояние между какими-то двумя соседними плоскостями слишком велико, то минимум энергии, вблизи которого помещается трещина, имеет малую глубину и процесс разрушения может просто не произойти, а если плоскости расположены слишком близко, то в принятом приближении нельзя проследить за формированием трещин) возникает эшелон трещин отрыва, который расположен на пересечении оси эшелона с ослабленными плоскостями. Угол между осью эшелона и осью x_3 равен 53° и не зависит от постоянных среды, размеров трещин и расстояния между плоскостями (при условии справедливости асимптотических формул) [5].

Рассмотренные примеры систем параллельных трещин нормального отрыва иллюстрируют ряд особенностей формирования структур разру-

[5] В дополнение к описанным примерам случаи возникновения трещин на двух параллельных прямых и системе равноотстоящих параллельных прямых, одна из которых лежит в плоскости $x_3=0$ и все прямые лежат в плоскости, расположенной по отношению к плоскости $x_3=0$ под углом θ, а также трещин, возникающих на двух скрещивающихся прямых, и некоторые другие случаи см. в работе: *Гольдштейн Р. В., Капцов А. В.* Указ. публ., с. 173.

шения. При одном и том же исходном напряженном состоянии окончательная конфигурация упорядоченной системы трещин и последовательность образования ее элементов могут быть различны в зависимости от того, какова структура ослабленных зон в материале. Если ослабленные зоны представляют совокупность прямых или плоскостей, то возникает либо зигзагообразно расположенная система, либо эшелон трещин с прямолинейной осью. Для зигзагообразных систем трещин характерно последовательное образование ближайших друг к другу элементов и наличие переходной области, в которой постепенно устанавливается постоянное расстояние между соседними трещинами системы. Наличие подобной переходной области в реальных зигзагообразных структурах разрушения может служить признаком последовательного образования ее элементов. В эшелоне трещин, независимо от того, занимает ли он ограниченную или бесконечную область, расстояния между соседними элементами в принятом приближении не меняются.

2. Перейдем к анализу особенностей систем параллельных трещин сдвига, образующихся при тех же, что и выше, сделанных предположениях о геометрии исходных ослабленных зон в среде. Тогда отчетливо станут видны различия в конфигурациях систем трещин, связанных с различием механизмов разрушения (отрыв — сдвиг). Пожалуй, наиболее явным образом демонстрирует это отличие случай, когда ослабленные зоны представляют собой систему параллельных плоскостей. Считая, что две трещины возникают в соседних плоскостях, или, что то же самое, вторая трещина возникает в соседней плоскости с уже существующей первой, напишем энергию взаимодействия этой пары

$$W=\beta P^{(1)}P^{(2)}h^{-3}\{(15n_3^2-3\nu)(1-n_3^2)\cos(\alpha-\varphi^{(1)})\cos(\alpha-\varphi^{(2)})-$$
$$-\cos(\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)})(1-2\nu+3\nu n_3^2)\}n_3^2 \qquad (4.3)$$

где h — расстояние между плоскостями, а α и $\varphi^{(i)}$ определены в (3.13).

Минимизируя это выражение по α, получаем направления наиболее вероятного возникновения трещин $\alpha^{\rm I}=\pi/2+\varphi_0$, $\alpha^{\rm II}=3\pi/2+\varphi_0$. Здесь и всюду ниже угол α отсчитывается от оси x_2. Отметим, что соотношение между сдвиговыми объемами трещин определяется через угол φ по формулам (3.19). Поэтому различие двух трещин естественно характеризовать величиной $\varphi_1=\varphi^{(2)}-\varphi^{(1)}$.

Подставим выражения $\alpha^{\rm I}$, $\alpha^{\rm II}$ в (4.3) и минимизируем получившееся выражение по n_3. Тогда если различие между соотношениями объемов соседних трещин невелико, т. е. $|\cos\varphi_1|>|\cos\varphi_{1*}|$, то наиболее выгодным является расположение трещин одна над другой. Поэтому если разрушение будет происходить по соседним плоскостям, то возникнет эшелон трещин, расположенных одна над другой. Если же различие сдвиговых объемов достаточно большое, т. е. $|\cos\varphi_1|<|\cos\varphi_{1*}|$, то наиболее выгодным является расположение трещин под углом θ к оси x_3, где $\theta=\arccos n_3$, в направлении $\alpha^{\rm I}$ или $\alpha^{\rm II}$.

Значения $\theta(\varphi_1,\nu)$ и $\varphi_{1*}(\nu)$ определяются в результате численного исследования функции (4.3). Ниже приведено несколько характерных значений $\varphi_{1*}(\nu)$ и $\theta(\varphi_1,\nu)$

ν	φ_{1*}	ν	$\varphi=70°$	$\varphi=90°$
0,5	50	0,5	25	30
0,3	46	0,3	27	31,9
0,15	39	0,15	29	32,4

Можно отметить, что при уменьшении ν величина φ_{1*} падает. Это означает, что возникновение соседних трещин под углом θ к оси x_3 (т. е. не одна над другой) происходит при меньших различиях в форме соседних трещин.

Если для соседних трещин φ_1=const, $|\varphi|<\varphi_1<(\pi/2)$ и предположить, что новая трещина возникает на новой плоскости, то образуется своеобразная спиральная структура. Если через α_k обозначить широтный угол, указывающий направление возникновения k-й трещины в системе координат, связанной с начальной, то его можно выразить через φ_1 $(\alpha_k=\alpha_0+k\varphi_1)$. При этом угол высоты $\theta=\arccos n_3(\varphi_1, \nu)$.

Таким образом, каждая новая трещина будет поворачиваться относительно предыдущей на угол φ_1. При этом один из двух возможных минимумов можно определить с учетом взаимодействия с $(k-2)$-й трещиной. Выбор одного из двух направлений зависит от φ_1 и ν; так, например, для $\nu=0{,}5$, $\varphi_1=55°$ трещины будут образовываться в направлении α^{II}, а при $\varphi_1=70°$ — в направлении α^{I}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г. И.* О распространении шейки при растяжении полимерных образцов.– ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, с. 1048–1060.
2. *Салганик Р. Л.* Модель трещиноподобной волны неупругого деформирования в твердом теле (трещина серебра).– Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1, с. 48–60.
3. *Баренблатт Г. И.* Изотермическое распространение шейки в полимерах.– Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6, с. 96–104.
4. *Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.* О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах.– Физ.-техн. проблемы разраб. полезных ископаемых, 1974, № 3, с. 130–133.
5. *Rudnicki J. W., Rice J. R.* Conditions for the localisation of deformation in pressure-sensitive dilatant materials.– J. Mech. Phys. Solids, 1975, v. 23, No. 6, p. 371–394.
6. *Barenblatt G. I., Entov V. M., Salganik R. L.* Self-maintaining regime for deformation and fracture of solids.– Internat. J. Fracture, 1975, v. 11, No. 5, p. 887–892.
7. *Линьков А. М.* Об условиях устойчивости в механике разрушения.– Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 1, с. 45–48.
8. *Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Разрушение горной породы с внутренним трением и дилатансией.– Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 5, с. 1203–1206.
9. *Petukhov I. M., Linkov A. M.* The theory of post-failure deformation and the problem of stability in rock mechanics.– Internat. J. Rock Mech. and Mining Sci. and Geomech. Abstrs., 1979, v. 16, No. 2, p. 57–76.
10. *Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.* Разрушение и формирование структуры.– Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 4, с. 829–832.
11. *Гольдштейн Р. В.* Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 111–126.
12. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
13. *Билби Б., Эшелби Дж.* Дислокации и теория разрушения.– В кн.: Разрушение. Т. 1./ Под редакцией Г. Либовица. М.: Мир, 1973, с. 112–203.
14. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 149–158.
15. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading.– Engng. Fract. Mech., 1971, v. 3, No. 1, p. 71–96.
16. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.X.1980