МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1982

УДК 539.375

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ РАЗРЕЗА В СЛОЖНОНАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

ЖИТНИКОВ Ю. В., ТУЛИНОВ Б. М.

В последнее время появились работы, посвященные исследованию предельного равновесия твердого тела с трещиной в условиях сложнонапряженного состояния с учетом взаимодействия ее берегов [1–3].

Как правило, при анализе равновесия трещин допускались сдвиговые смещения ее берегов друг относительно друга на протяжении всей длины. Такое предположение позволяет рассматривать лишь ограниченный класс задач, в котором не могут иметь место, в процессе нагружения, одновременно области взаимной подвижки берегов и области отсутствия такой подвижки.

В данной работе предлагается способ выделения таких областей при расчете предельного равновесия твердого тела с трещиной, а также установлена зависимость конечного напряженного состояния от траектории нагружения.

1. Рассмотрим модельную задачу о прямолинейном разрезе конечной длины L вдоль оси абсцисс $(0\leqslant x\leqslant L)$. На бесконечности задан однородный продольный сдвиг τ и сжимающее напряжение $\sigma_y(x)=-(\sigma_0+\alpha x)$; $(\tau, \sigma_0, \alpha)>0$.

Взаимодействие берегов трещины приводит к тому, что при нагружении твердого тела могут возникнуть области с отличными от нуля смещениями берегов $u(x, 0)\neq 0$ и с нулевыми смещениями $u(x, 0)=0$. В силу характера выбранной зависимости нормального сжимающего напряжения $\sigma_y(x)$, определяющего взаимодействие между берегами, область ненулевых смещений примыкает к левой границе разреза, а область нулевых смещений — к правой. Пусть $x=l$ — граница раздела между этими областями, тогда краевое условие по сдвигу на поверхности разреза ставится в области ненулевых смещений с учетом силы трения $(0<x<l\leqslant L)$, а зажатую область $(l\leqslant x\leqslant L)$ можно рассматривать как упругий континуум, так как действующие сдвиговые усилия в ней меньше максимальной силы взаимодействия берегов разреза.

Краевое условие на разрезе имеет вид

$$\sigma_y(x, 0)=\sigma_0+\alpha x \quad (0<x<l) \tag{1.1}$$

$$\tau_{xy}(x, 0)=\tau-\mu\sigma_y(x, 0) \quad (0<x<l)$$

$$v(x, 0)=0 \quad (-\infty<x<+\infty); \quad u(x, 0)=0 \quad (x<0,\ x>l)$$

где $v(x, y)$, $u(x, y)$ — смещения вдоль осей ординат и абсцисс.

Распределение сдвиговых напряжений в области $x<0$, $x>l$ для краевой задачи (1.1) определяется следующим соотношением [4]:

$$\tau_{xy}(x, 0)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(x-l)}}\int\limits_0^l \frac{\sqrt{(l-t)t}}{t-x}\,\tau_{xy}(t, 0)\,dt \tag{1.2}$$

$$(x<0,\ x>l)$$

В общем случае выражение (1.2) для конечного разреза длины l определяет сингулярные решения в точках $x=0$, $x=l$, характеризуемых коэффициентами интенсивности напряжений

$$K_2^+=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{l}}\int_0^l\sqrt{\frac{t}{l-t}}\,\tau_{xy}(t,0)\,dt$$
$$K_2^-=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{l}}\int_0^l\sqrt{\frac{l-t}{t}}\,\tau_{xy}(t,0)\,dt \qquad (1.3)$$

Условие предельного равновесия левой вершины трещины определяется предельным коэффициентом интенсивности напряжений: $K_2^-\leqslant K_c$, где K_c — постоянная, связанная с разрушением материала. В силу того что сингулярные сдвиговые напряжения на разрезе в окрестности правой границы рассматриваемой области подвижки всегда приведут к «вспарыванию» зажатого участка трещины, физически разумным является построение несингулярного решения на правой границе области ненулевых смещений. Аналогично методу, предложенному в [5, 6], критерием равновесия является равенство нулю коэффициента интенсивности напряжений

$$K_2^+=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{l}}\int_0^l\sqrt{\frac{t}{l-t}}\,\tau_{xy}(t,0)\,dt=0 \qquad (1.4)$$

Уравнение (1.4) определяет размер зоны ненулевых смещений l. Для модельной краевой задачи (1.1) из уравнения (1.4) получим

$$l=4(\tau-\mu\sigma_0)/(3\alpha\mu) \qquad (1.5)$$

Подставляя выражение (1.5) в формулу (1.2), найдем распределение напряжений на оси абсцисс вне трещины

$$\tau_{xy}=\tau-\mu(\sigma_0+\alpha x)+\mu\alpha\sqrt{\frac{x-l}{x}}\left(x-\frac{l}{4}\right) \qquad (1.6)$$
$$(x<0,\ x>l)$$

Смещения берегов трещины определяются выражением [4]:

$$u(x)=-\frac{(\varkappa_i+1)}{2G\pi}\int_0^x\frac{d\eta}{\sqrt{\eta(l-\eta)}}\int_0^l\frac{\sqrt{t(l-t)}}{t-\eta}\,\tau_{xy}(0,t)\,dt$$
$$(0<x<l)\quad \varkappa_1=3-4\nu \qquad (1.7)$$
$$\varkappa_2=(3-\nu)/(1+\nu),\quad G=E/2(\nu+1)\quad (i=1,2)$$

где коэффициент $\varkappa_1$ соответствует случаю плоской деформации, $\varkappa_2$ — обобщенному плоскому напряженному состоянию, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

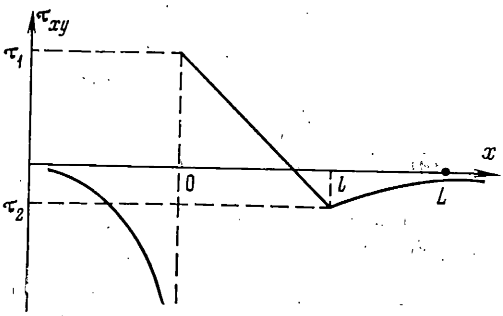
Распределение напряжений $\tau_{xy}(x, 0)$ представлено на фиг. 1. Полученное решение (1.6) справедливо, как уже отмечалось, при $l\leqslant L$. При выполнении формального неравенства $l>L$ имеет место сингулярное решение (1.2) на обоих концах разреза. Распределение напряжений в области $x<0$, $x>L$ в этом случае определяется соотношением (1.2), в котором параметр l заменяется на длину разреза $L(\tau_1=\tau-\mu\sigma_0,\ \tau_2=-{}^1/_3(\tau-\mu\tau_0))$.

2. При построении решения рассмотренной в п. 1 модельной задачи предполагалось нагружение твердого тела сначала сжимающей нагруз-

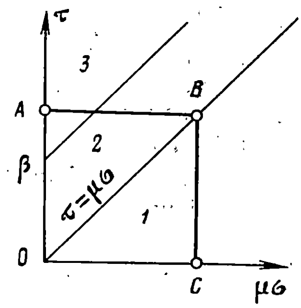
кой $\sigma_y(x)$, а затем сдвиговой τ. В случае произвольного пути нагружения решение (1.6), (1.7) зависит от траектории. Рассмотрим нагружение по различным траекториям в модельной задаче п. 1 заданным параметрически

$$\tau=\tau(\xi), \quad \tau(0)=0, \quad \sigma_y=\sigma(\xi)+\alpha x, \quad \sigma(0)=0 \tag{2.1}$$

При определении размера области ненулевых смещений берегов разреза (1.5) в рассмотренной модельной задаче предполагался путь нагружения OCB (фиг. 2). Смещения берегов трещины при этом происходят на участке CB. При нагружении по траектории OAB смещение берегов происходит на участке OA. Длину области смещения берегов можно получить из соотношения (1.5), положив в нем $\sigma_0=0$. Отличие значений длины



Фиг. 1



Фиг. 2

подвижного участка l при нагружении по разным путям нагружения демонстрирует необходимость анализа нагружения по различным типам траекторий.

Рассмотрим траектории нагружения, для которых $\tau'(\xi)>0$. При $\tau\leqslant\mu\sigma_y(0)$ взаимное смещение берегов на всем протяжении трещины отсутствует, так как множитель $\tau_{xy}(t,\ 0)$, определенный краевым условием (1.1) в подынтегральном выражении (1.4), знакопостоянен и K_2^+ не обращается в нуль при любом l, отличном от нуля. Указаному случаю соответствует область *1* на фиг. 2.

При нагружении по траекториям, входящим в область $\tau>\mu\sigma_y$, таким, что $\tau'(\xi)>\mu\tau'(\xi)$, происходит монотонный рост длины зоны подвижки берегов $l(\xi)$, определяемой соотношением, аналогично (1.5)

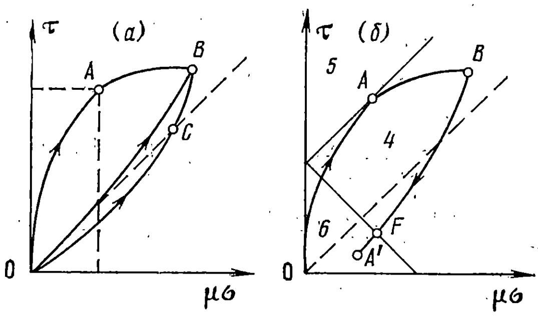
$$l(\xi)={}^4/_3[\tau(\xi)-\mu\sigma(\xi)]/(\alpha\mu) \tag{2.2}$$

Смещение берегов определяется уравнением (1.7), в котором значения τ, σ_0 заменяются соответственно на $\tau(\xi)$ и $\sigma(\xi)$. В п. 1 отмечалось, что при выполнении формального неравенства $l>L$ имеют место сингулярные решения на обоих концах разреза. С учетом (2.2) на плоскости $\tau-\mu\sigma$ можно выделить область $\tau-\mu\sigma>\beta$ ($\beta={}^3/_4\alpha\mu L$), в которой $l>L$ (область *3* на фиг. 2). Ниже будем рассматривать траектории, не входящие в область *3*. При $\mu\sigma<\tau<\beta$ (область *2* на фиг. 2) на левой границе разреза ($x=0$) имеет место сингулярное решение, а на правой границе зоны подвижки ($x=l$) — несингулярное (1.6).

Среди траекторий, выходящих в область 2, для которых выполняется неравенство $\tau'(\xi)>\mu\sigma'(\xi)$, можно выделить два характерных типа траекторий OB и OCB (фиг. 3, *a*), причем при нагружении по пути OCB смещения берегов возникают на участке CB.

Рассмотрим траектории, выходящие в область *2* (фиг. 3, *a*), имеющие точку, в которой $\tau'(\xi)=\mu\sigma'(\xi)$ (точка A траектории OAB). На участке OA, где выполняется неравенство $\tau'(\xi)>\mu\sigma'(\xi)$, имеет место смещение берегов, определяемое соотношениями (1.7), (2.2), а на участке AB, на котором $\tau'(\xi)<\mu\sigma'(\xi)$, изменение смещения берегов не происходит, так как приращение сдвиговых нагрузок меньше максимально возможной силы трения. При этом $u(x)=u_A(x)$, при $\xi>\xi_A$, где $u_A(x)$ — смещение берегов в точке A. В связи с этим на плоскости $\tau-\mu\sigma$ можно выделить для рассматриваемых траекторий нагружения характерные области *4* и *5* (фиг. 3, *б*), разделенные прямой $\tau=\mu\sigma+\tau(\xi_M)-\mu\sigma(\xi_M)$, где точка ξ_M соответствует максимуму функции $\tau(\xi)-\mu\sigma(\xi)$ на траектории нагружения.

На фиг. 3, *а* показаны два характерных случая, когда максимум указанной функции достигается во внутренней точке A ($\xi_M=\xi_B$) траектории OAB и в конечной точке нагружения B траектории OB ($\xi_M=\xi_B$). При дальнейшем изменении напряженного состояния для траекторий, выхо-



Фиг. 3

дящих в область *5*, происходит изменение смещения $u(x)$ и размера области подвижки $l(\xi)$, которые определяются соотношениями (1.7), (2.2). Для траекторий нагружения ($\tau'(\xi)\geqslant 0$), не выходящих за пределы области *4*, изменения смещений не происходит.

На стадии разгрузки ($\tau'(\xi)<0$) под действием упругих сил может возникнуть на разрезе, начиная от левой границы трещины, область возвратных смещений. Координату правой границы этой области обозначим b. Краевая задача теории упругости об определении границы b с учетом изменения направления сил трения при возвратном движении имеет вид

$$\begin{gathered}\sigma_y(x,0)=\sigma+\alpha x \quad (0<x<b) \\ \tau_{xy}(x,0)=\tau+\mu\sigma_y(x,0) \quad (0<x<b) \\ v(x,0)=0 \quad (-\infty<x<+\infty) \\ u(x,0)=u_A(x,0) \quad (b<x<L); \quad u(x,0)=0 \quad (x<0,\ x>L)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Краевую задачу (2.3) представим в виде суперпозиции следующих двух задач:

$$\begin{gathered}\sigma_y(x,0)=0 \quad (0<x<L) \\ \tau_{xy}(x,0)=\tau_A-\mu(\sigma_A+\alpha x) \quad (0<x<L) \\ v(x,0)=0 \quad (-\infty<x<+\infty), \quad u(x,0)=0 \quad (x<0,\ x>L)\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\sigma_y(x,0)=\sigma+\alpha x \quad (0<x<b) \\ \tau_{xy}(x,0)=\tau+\mu(\sigma+\alpha x)-\tau_A+\mu(\sigma_A+\alpha x) \\ (0<x<b) \\ v(x,0)=0 \quad (-\infty<x<+\infty), \quad u(x,0)=0 \quad (x<0,\ x>b)\end{gathered} \tag{2.5}$$

Краевая задача (2.4) имеет сингулярное решение только в точке $x=0$, а задача (2.5) может иметь сингулярные решения в точках $x=0$ и $x=b$. Поэтому уравнение для определения параметра b при условии отсутствия сингулярности при $x=b$ имеет вид

$$K_2{}^+=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{b}}\int_0^b\sqrt{\frac{t}{b-t}}\,\tau_{xy}(t,0)\,dt=0 \tag{2.6}$$

где $\tau_{xy}(x,0)$ определяется соотношениями (2.5).

При $\tau+\mu\sigma>\tau(\xi_M)-\mu\sigma(\xi_M)$, так как множитель $\tau_{xy}(x, 0)$ в подынтегральном выражении уравнения (2.6) знакопостоянен, K_2^+ не обращается в нуль при любом b, что соответствует отсутствию возвратных смещений берегов разреза, а при $\tau+\mu\sigma<\tau(\xi_M)-\mu\sigma(\xi_M)$ (область 6 на фиг. 3, *б*) уравнение (2.6) определяет параметр b

$$b(\xi)=l(\xi_M)/2-2[\tau(\xi)+\mu\sigma(\xi)]/3\mu\alpha \tag{2.7}$$

На участках траектории разгрузки в области 6, для которых выполняется неравенство $\tau'<\mu\sigma'$, например участок FA' на фиг. 3, *б*, длина области возвратных смещений берегов к положению равновесия $b(\xi)$ монотонно растет. Если точка A' совпадает с точкой $(\tau(\xi_{A'})=0,\ \sigma(\xi_{A'})=0)$, то из соотношения (2.7) следует, что $b(\xi_{A'})=l(\xi_M)/2$, а остаточное поле смещений после цикла нагрузка — разгрузка можно получить из (1.7) с учетом (2.3):

$$\begin{gathered} u(x)=\frac{(\varkappa_i+1)}{4G}\mu\alpha\sqrt{x(l-x)}\,(l-x) \quad (b\leqslant x\leqslant l) \\ u(x)=\frac{(\varkappa_i+1)}{4G}\mu\alpha[\sqrt{x(l-x)}\,(l-x)-\sqrt{x(b-x)}\,(b-x)] \\ (0<x\leqslant b) \quad (i=1,2) \end{gathered} \tag{2.8}$$

Необходимо отметить, что коэффициент интенсивности напряжений на левой границе разреза при этом не обращается в нуль. Из соотношения (2.8) получим $K_2^-=\mu\alpha l\sqrt{l}(2\sqrt{2}-1)/8$.

При повторных нагружениях аналогичным методом можно рассчитать поле смещений и распределение напряжений.

Следует отметить, что в рассматриваемой модельной задаче предельное равновесие трещины определяется критерием разрушения на левой границе разреза $K_2^-=K_c$, которое может достигаться в зависимости от параметров задачи как при подвижке берегов на всем протяжении разреза $0<x<L$ (при этом из (1.3) следует, что $K_2^->K_2^+$), так и при существовании области нулевых смещений, прилегающей к правой границе $l<x<L$.

В задачах о равновесии криволинейных разрезов со взаимодействующими берегами в сложнонапряженном состоянии и прямолинейных разрезов с немонотонным распределением нормального сжимающего напряжения может возникнуть несколько чередующихся областей ненулевых и нулевых смещений берегов. Если в этих задачах заранее известно число и примерное расположение зон взаимных смещений берегов трещины, то для определения границ этих зон может быть использован развитый подход.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костров Б. В., Фридман В. Н.* Механика хрупкого разрушения при сжимающих нагрузках.— В кн.: Физика очага землетрясения. М.: Наука, 1975, с. 30–44.
2. *Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.* Вариационный метод исследования пространственной задачи теории упругости о плоском разрезе в безграничной среде при наличии проскальзывания и сцепления его поверхностей. Всес. конф. по теории упругости. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1979, с. 115–118.
3. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
5. *Желтов Ю. П., Христианович С. А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта.— Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 5, с. 3–41.
6. *Баренблатт Г. И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 434–444.
7. *Баренблатт Г. И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинах.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, с. 706–721.

Москва

Поступила в редакцию
16.X.1980