

ПОЛЗУЧЕСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ИЛЬИН В. Н., КАШЕЛКИН В. В., ШЕСТЕРИКОВ С. А.

Предлагается вероятностно-статистический подход к расчету на ползучесть металлических элементов конструкций типа стержней, пластин и оболочек. Предполагается, что математическая модель деформирования рассматриваемых элементов сведена к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих конечное число случайных параметров a_j ($j=1, \dots, k$) с известной совместной плотностью распределения вероятностей $p_a(a_1, \dots, a_k)$. В предположении статистической малости разброса a_j ($j=1, \dots, k$) дается решение основной задачи статистической динамики конструкций [1] применительно к ползучести указанных элементов. При решении задачи используются метод малого параметра и приближенные канонические разложения [2] искомых случайных функций.

1. Расчеты на ползучесть ставят, как известно, своей целью обеспечение условий, при которых конструктивные функции элементов изделий не нарушаются в течение заданного интервала времени. На практике чаще всего решается следующая задача: заданы геометрия, свойства материала и условия нагружения и надо указать интервал времени T , на котором параметры поведения элемента конструкции находятся в допустимых пределах.

Из опыта хорошо известна случайная природа ряда факторов, существенно влияющих в условиях ползучести на параметры поведения конструкции (выходные параметры), а следовательно, и на искомый интервал времени T . Так, например, разброс выходных параметров в 20%, обусловленный случайными свойствами материала, не считается при ползучести чрезмерно большим [3]. К указанным факторам, которые далее будут условно называться входными параметрами, также следует отнести всевозможные геометрические несовершенства [3, 4], условия закрепления и нагружения. Корректно учесть влияние случайного разброса входных параметров на выходные параметры и интервал времени T в рамках обычного терминистического расчета не представляется возможным, что вызывает необходимость вероятностно-статистического подхода к расчету на ползучесть. При этом следует определить интервал времени T_γ , на котором параметры поведения конструкции с заданной вероятностью γ будут находиться в допустимых пределах (или при заданном T_γ определить γ).

Перед вычислением искомого интервала T_γ необходимо предварительное решение задачи об определении вероятностных свойств выходных параметров при известных свойствах входных, что и является предметом настоящей статьи.

При составлении вероятностно-статистической модели деформирования конструкции в условиях ползучести (в дальнейшем для краткости — математической модели ползучести конструкции) наиболее приемлемым с точки зрения инженерного расчета является подход, основанный на явном введении случайности в уже известные детерминистические соотношения [1, 5, 6]. К задачам ползучести такой подход применялся в [7—12].

Перейдем к рассмотрению предлагаемой математической модели.

В силу физической нелинейности (а для большинства практических задач и геометрической) в расчетах на ползучесть изделий из металлов приходится опираться исключительно на приближенные методы исследования. При решении краевых задач ползучести для конструкций типа

стержней, пластин и оболочек широко используются методы сведения распределенных систем к системам с конечным числом степеней свободы. Применение этих методов в сочетании с уравнением состояния приводит, как правило, математическую модель к системам алгебраических уравнений или задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [3, 4, 13] относительно функций напряженно-деформированного состояния

$$\dot{y}_s = Y_s(t; y_1, \dots, y_n; a_1, \dots, a_k) \quad (1.1)$$

$$Y_{s0}(0; y_{10}, \dots, y_{n0}; a_1, \dots, a_k) = 0 \quad (s=1, \dots, n)$$

где y_s — функции напряженно-деформированного состояния элемента конструкции, t — время, $y_{s0} = y_s(0)$ — начальные значения функций напряженно-деформированного состояния, a_j ($j=1, \dots, k$) — конечная совокупность постоянных ($da_j/dt=0$), включающая в себя параметры свойств материала, параметры геометрии, условий закрепления, нагружения и т. д. В силу неограниченности деформации ползучести металлов $e_p(t)$ при $0 < t < \infty$, решение (1.1) y_s также будет неограниченным на бесконечном интервале времени.

Будем полагать, что математическая модель ползучести некоторого элемента конструкции с помощью какого-либо приближенного метода сведена к корректной (имеющей единственное, непрерывное по всем аргументам решение $y_s = y_s(t; a_1, \dots, a_k)$ в данной области G) задаче Коши (1.1).

Вероятностно-статистическую модель ползучести реального объекта можно получить естественным обобщением детерминистической модели (1.1), полагая в ней входные параметры a_j ($j=1, \dots, k$) случайными с заданной совместной плотностью распределения вероятностей $p_a(a_1, \dots, a_k)$. Функция $p_a(a_1, \dots, a_k)$ предполагается известной из макроэксперимента. Под выходными параметрами будем понимать функции напряженно-деформированного состояния (в общем случае это могут быть некоторые другие функции $v_i = v_i(t; y_1, \dots, y_n; a_1, \dots, a_k)$ ($i=1, \dots, m$)).

Решение рассматриваемой здесь задачи сводится к определению вероятностных характеристик функций y_s по известным вероятностным характеристикам a_j .

2. Задача определения вероятностных характеристик интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих случайные параметры, по-видимому, впервые возникла в теории систем автоматического управления [2]. Применительно к строительной механике подобная задача рассматривалась в [4].

Поскольку общей теории нелинейных преобразований случайных функций пока не существует, точное вероятностное исследование нелинейной системы (1.1) крайне сложно. Некоторые пути такого исследования предложены в [14, 15].

Предполагая статистическую малость возможных случайных отклонений параметров a_j от их математических ожиданий $\langle a_j \rangle$, а также гладкость функций $Y_s(t; y_1, \dots, y_n; a_1, \dots, a_k)$ в области G , что выполняется для большинства практических задач ползучести, применим для решения стохастической нелинейной задачи (1.1) метод малого параметра.

С достаточной для практики точностью можно записать

$$a_j = a_j^{(0)} + \mu a_j^{(1)}, \quad a_j^{(0)} = \langle a_j \rangle \quad (j=1, \dots, k) \quad (2.1)$$

где $a_j^{(1)}$ — центрированное случайное отклонение a_j от $\langle a_j \rangle$, μ — малый неслучайный параметр.

Решение (1.1) может быть представлено разложением

$$y_s = y_s^{(0)} + \mu y_s^{(1)} + \dots + \mu^r y_s^{(r)} + \dots \quad (s=1, \dots, n) \quad (2.2)$$

и вычислено с любой наперед заданной точностью [16].

Запишем систему уравнений (1.4) в векторной форме

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{a}), \quad \mathbf{Y}_0(0, \mathbf{y}_0, \mathbf{a}) = 0 \quad (2.3)$$

Введем обозначения для коэффициентов разложения нелинейных функций \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0 в (2.3) по степеням малого параметра μ

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_r &= \frac{1}{r!} \frac{d^r}{d\mu^r} \mathbf{Y}[t, \mathbf{y}(\mu), \mathbf{a}(\mu)]_{\mu=0} \quad (r=0, 1, \dots) \\ \mathbf{F}_{0r} &= \frac{1}{r!} \frac{d^r}{d\mu^r} \mathbf{Y}_0[0, \mathbf{y}_0(\mu), \mathbf{a}(\mu)]_{\mu=0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

и заметим, что разности

$$\mathbf{F}_r - \mathbf{A} \mathbf{y}^{(r)} = \mathbf{Q}_r(\mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}, \mathbf{a}^{(1)}), \quad \mathbf{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{Y}_s}{\partial y_i} \right]_{\mu=0} \quad (r=1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{F}_{0r} - \mathbf{A}_0 \mathbf{y}_0^{(r)} = \mathbf{Q}_{0r}(\mathbf{y}_0^{(0)}, \mathbf{y}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{y}_0^{(r-1)}, \mathbf{a}^{(1)}), \quad \mathbf{A}_0 = \left[\frac{\partial \mathbf{Y}_{s0}}{\partial y_{i0}} \right]_{\mu=0}$$

где \mathbf{A}, \mathbf{A}_0 — квадратные матрицы порядка n , не зависящие от $\mathbf{y}^{(r)}, \mathbf{y}_0^{(r)}$ соответственно.

Далее, подставляя выражения (2.1), (2.2) в (2.3), разлагая функции \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0 по степеням μ и приравнявая слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях, получим с учетом (2.4), (2.5) для определения коэффициентов $\mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \dots$ рекуррентную последовательность задач Коши

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{*(0)} &= \mathbf{F}_0(t, \mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{a}^{(0)}) = \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{a}^{(0)}), \quad \mathbf{F}_{00}(0, \mathbf{y}_0^{(0)}, \mathbf{a}^{(0)}) = \mathbf{Y}_0(0, \mathbf{y}_0^{(0)}, \mathbf{a}^{(0)}) = 0 \\ \mathbf{y}^{*(1)} &= \mathbf{A} \mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{Q}_1(\mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{a}^{(1)}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{01}(0, \mathbf{y}_0^{(0)}, \mathbf{y}_0^{(1)}, \mathbf{a}^{(1)}) = \mathbf{A}_0 \mathbf{y}_0^{(1)} + \mathbf{Q}_{01}(\mathbf{y}_0^{(0)}, \mathbf{a}^{(1)}) = 0 \quad (2.6)$$

$$\mathbf{y}^{*(r)} = \mathbf{A} \mathbf{y}^{(r)} + \mathbf{Q}_r(\mathbf{y}^{(0)}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}, \mathbf{a}^{(1)})$$

$$\mathbf{F}_{0r}(0, \mathbf{y}_0^{(0)}, \dots, \mathbf{y}_0^{(r)}, \mathbf{a}^{(1)}) = \mathbf{A}_0 \mathbf{y}_0^{(r)} + \mathbf{Q}_{0r}(\mathbf{y}_0^{(0)}, \dots, \mathbf{y}_0^{(r-1)}, \mathbf{a}^{(1)}) = 0$$

В силу гладкости функции $\mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{a})$ уравнения (2.6) однозначно определяют функции $\mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(r)}$. Нулевое приближение $\mathbf{y}^{(0)}$ при этом — неслучайная функция, а все приближения, начиная с первого, — случайные процессы, линейные уравнения для которых могут быть последовательно проинтегрированы в квадратурах.

Учитывая малость $\mathbf{a}^{(1)}$, ограничимся в разложении (2.2) членами порядка μ (погрешность такого допущения может быть оценена, например, способом [2]), тогда для определения $\mathbf{y}_s^{(0)}$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_s^{*(0)} &= \mathbf{Y}_s(t; y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; a_1^{(0)}, \dots, a_k^{(0)}), \\ \mathbf{Y}_{s0}(0; y_{10}^{(0)}, \dots, y_{n0}^{(0)}; a_1^{(0)}, \dots, a_k^{(0)}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

а для определения $\mathbf{y}_s^{(1)}$ — систему

$$\mathbf{y}_s^{*(1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_s}{\partial y_i} \right)^{(0)} y_i^{(1)} + \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_s}{\partial a_j} \right)^{(0)} a_j^{(1)} \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_{s0}}{\partial y_{i0}} \right)^{(0)} y_{i0}^{(1)} + \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_{s0}}{\partial a_j} \right)^{(0)} a_j^{(1)} = 0$$

где верхний индекс (0) у частных производных означает, что они вычисляются при $y_s^{(0)}$, $a_j^{(0)}$.

Вводя обозначения

$$\left(\frac{\partial Y_s}{\partial y_i}\right)^{(0)} = A_{si}, \quad \left(\frac{\partial Y_s}{\partial a_j}\right)^{(0)} = \varphi_{sj}, \quad \left(\frac{\partial Y_{s_0}}{\partial y_{i_0}}\right)^{(0)} = \Lambda_{si}, \quad -\left(\frac{\partial Y_{s_0}}{\partial a_j}\right)^{(0)} = b_{sj}$$

$$\alpha_j = a_j^{(1)}/a_j^{(0)} \quad \text{при} \quad a_j^{(0)} \neq 0, \quad \alpha_j = a_j^{(0)}/d_j \quad \text{при} \quad a_j^{(0)} = 0$$

где d_j — константа размерности a_j , запишем (2.8) в виде

(2.9)

$$y_s^{(1)} = \sum_{i=1}^n A_{si} y_i^{(1)} + \sum_{j=1}^k \varphi_{sj} \alpha_j, \quad \sum_{i=1}^n \Lambda_{si} y_{i_0}^{(1)} = \sum_{j=1}^k b_{sj} \alpha_j \quad (s=1, \dots, n)$$

Линейные комбинации $B_s = \sum b_{sj} \alpha_j$, $\Phi_s = \sum \varphi_{sj} \alpha_j$ известных функций со случайными коэффициентами в (2.9) можно считать приближенными каноническими разложениями B_s и Φ_s [2], если коррелированные в общем случае коэффициенты α_j ($j=1, \dots, k$) привести к некоррелированным α_j° ($j=1, \dots, k$), например, способом [2]. Считая, что преобразование случайного вектора α к вектору α° произведено и опуская верхний индекс в выражениях $B_s = \sum b_{sj}^\circ \alpha_j^\circ$, $\Phi_s = \sum \varphi_{sj}^\circ \alpha_j^\circ$, будем искать решение (2.9) также в виде приближенного канонического разложения

$$y_s^{(1)} = \sum_{j=1}^k \psi_{sj} \alpha_j \quad (s=1, \dots, n) \quad (2.10)$$

где $\psi_{sj}(t)$ — искомые неслучайные функции времени, α_j — некоррелированные центрированные случайные коэффициенты с известной совместной плотностью распределения вероятностей $p_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Подставляя выражение (2.10) в систему (2.9), получим для определения функций $\psi_{sj}(t)$ k -линейных задач Коши

(2.11)

$$\psi_{sj}^* = \sum_{i=1}^n A_{si} \psi_{ij} + \varphi_{sj}, \quad \sum_{i=1}^n \Lambda_{si} \psi_{ij}(0) = b_{sj} \quad (j=1, \dots, k)$$

Таким образом, решение $k+1$ детерминистической задачи Коши (2.7), (2.11), одна из которых (2.7) нелинейна, позволяет определить искомые функции $y_s(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ в виде приближенных канонических разложений

$$y_s = y_s^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^k \alpha_j \psi_{sj}(t) \quad (s=1, \dots, n) \quad (2.12)$$

Формулы (2.12) представляют собой обычную функциональную связь величин y_s и α_j , в которую время t входит как параметр. К функциям $y_s(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ применимы известные формулы преобразования случайных величин, при этом вероятностные свойства y_s полностью определяются совместной плотностью распределения вероятностей $p_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

3. В качестве первого примера рассмотрим простейшую задачу о растяжении при ползучести стержня с площадью сечения F постоянным усилием q .

Пусть температура Θ также постоянна и деформирование каждого индивидуального образца, выбранного из некоторой серии таких же элементов, следует одному и тому же по виду закону ползучести, но с заметным разбросом входящих в него параметров свойств материала.

Рассмотрим простейший вид уравнения состояния $e_p^* = B\sigma^N$, где $\sigma = q/F$ — напряжение в стержне, $e_n = e - e_e$ — деформация ползучести, e — полная деформация, $e_e = \sigma/E$ — упругая деформация, E, B, N — параметры свойств материала.

Будем полагать, что в интересующем нас интервале времени σ постоянно, тогда математическая модель ползучести стержня сводится к следующей задаче Коши:

$$e^* = B\sigma^N, \quad e(0) = \sigma/E \quad (3.1)$$

Случайными параметрами a_j ($j=1, 2, 3$) в (3.1) будем соответственно полагать E, B и N .

Согласно (2.1), имеем $a_j = a_j^{(0)} (1 + \mu\alpha_j)$. Вводя безразмерные параметры $\tau = tB^{(0)} \cdot \sigma^{N^{(0)}}$, $\omega = \sigma/E^{(0)}$, $y = e$, из (3.1) с точностью до членов порядка μ^2 получим

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 + \mu(\alpha_2 + \alpha_3 N^{(0)} \ln \sigma), \quad y(0) = \omega(1 - \mu\alpha_1) \quad (3.2)$$

Решение (3.2) ищется в виде

$$y(\tau, \alpha) = y^{(0)}(\tau) + \mu y^{(1)}(\tau, \alpha) \quad (3.3)$$

Из (3.2) с учетом (3.3) следуют уравнения $dy^{(0)}/d\tau = 1$, $y^{(0)}(0) = \omega$ для определения $y^{(0)}(\tau)$, ($y^{(0)}(\tau) = \omega + \tau$) и для определения $y^{(1)}(\tau, \alpha)$:

$$dy^{(1)}/d\tau = \alpha_2 + \alpha_3 N^{(0)} \ln \sigma, \quad y^{(1)}(0) = -\omega\alpha_1 \quad (3.4)$$

Параметры α_2 и α_3 в общем случае коррелированы, поэтому приведем их к некоррелированным $\alpha_2^\circ, \alpha_3^\circ$:

$$\alpha_3 = \alpha_3^\circ, \quad \alpha_2 = c_{23}\alpha_3^\circ + \alpha_2^\circ \quad (3.5)$$

Корреляционный момент $K_{23} = \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle$ из (3.5) равен $K_{23} = c_{23}D_3^\circ + \langle \alpha_2^\circ \alpha_3^\circ \rangle$, где D_3° — дисперсия α_3° . В силу некоррелированности α_2° и α_3° момент $K_{23}^\circ = \langle \alpha_2^\circ \alpha_3^\circ \rangle = 0$, откуда $c_{23} = K_{23}/D_3$.

Введем в (3.4) обозначения $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = N^{(0)} \ln \sigma$, $b_1 = -\omega$, $b_2 = b_3 = 0$, тогда с учетом (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{dy^{(1)}}{d\tau} &= \sum_{j=1}^3 \alpha_j^\circ \varphi_j^\circ, \quad y^{(1)}(0) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^\circ b_j^\circ, \quad \varphi_1^\circ = \varphi_1, \quad \varphi_2^\circ = \varphi_2 \\ \varphi_3^\circ &= \varphi_2 c_{23} + \varphi_3, \quad b_1^\circ = b_1, \quad b_2^\circ = b_2, \quad b_3^\circ = b_2 c_{23} + b_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение (3.6) будем искать в виде приближенного канонического разложения

$$y^{(1)}(\tau, \alpha) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^\circ \psi_j^\circ(\tau)$$

где $\psi_j^\circ(\tau)$ — искомые неслучайные функции.

Опуская градус и подставляя $y^{(1)}$ в (3.6), получим $k=3$ детерминистических задач Коши $d\psi_j/d\tau = \varphi_j$, $\psi_j(0) = b_j$ для определения функций $\psi_j(\tau)$ ($j=1, 2, 3$), откуда следует $\psi_1 = -\omega$, $\psi_2 = \tau$, $\psi_3 = (c_{23} + N^{(0)} \ln \sigma)\tau$.

Окончательно решение задачи (3.1) имеет вид

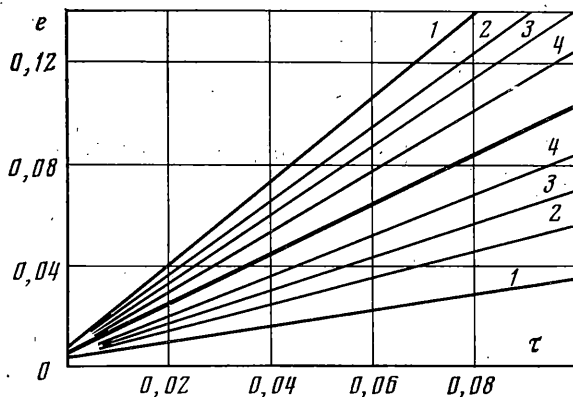
$$y(\tau, \alpha) = y^{(0)}(\tau) + \sum_{j=1}^3 \alpha_j^\circ \psi_j(\tau) \quad (3.7)$$

позволяющий определить все вероятностные характеристики $y(\tau, \alpha)$ по известным вероятностным характеристикам α_j ($j=1, 2, 3$). Например,

первые два момента функции $y(\tau, \alpha)$ могут быть вычислены соответственно по формулам (D_j — дисперсии α_j):

$$\langle y(\tau, \alpha) \rangle = y^{(0)}(\tau), \quad \langle y(\tau_1, \alpha) y(\tau_2, \alpha) \rangle = \sum_{j=1}^3 D_j \psi_j(\tau_1) \psi_j(\tau_2)$$

На фиг. 1 показана зависимость $y^{(0)}(\tau) = \langle e(\tau) \rangle$ при следующих численных значениях параметров: $E^{(0)} = 0,1 \cdot 10^3$, $B^{(0)} = 0,01$, $N^{(0)} = 3,0$, $K_{23} = 0$, $\sigma = 0,5$.



Фиг. 1

На фиг. 2 показана зависимость дисперсии деформации стержня $De(\tau)$ от дисперсий D_j случайных параметров α_j . Кривые 1, 2, 3, 4 (фиг. 2) получены в предположении нормального распределения α_j при $\sigma_j = \sqrt{D_j} = 0,1$, $\sigma_j = 0,07$, $\sigma_j = 0,05$, $\sigma_j = 0,03$, что соответственно означает практический разброс $\alpha_j \sim 30, 21, 15, 9\%$.

Кроме того, на фиг. 1 показаны полосы практического разброса (коэффициент доверия $\beta = 0,997$, ширина полосы $\beta \sqrt{De}$) функции $e(\tau, \alpha)$ при различных значениях σ_j , соответствующих фиг. 2.

В качестве другого примера рассмотрим в предлагаемой постановке решение задачи о выпучивании продольно сжатого стержня в условиях ползучести. Нагрузка q и температура Θ полагаются не зависящими от времени t .

Закон ползучести материала стержня примем в виде

$$\dot{e} = \sigma' / E + B \sigma^N \quad (3.8)$$

Уравнения равновесия стержня имеют вид

$$\begin{aligned} M + qw = 0, \quad M &= \int_{-h}^h \sigma z dz, \\ N_1 + q = 0, \quad N_1 &= \int_{-h}^h \sigma dz \end{aligned} \quad (3.9)$$

где M — изгибающий момент, N_1 — продольное усилие, $w(x, t)$ — поперечный прогиб, $2h$ — толщина стержня.

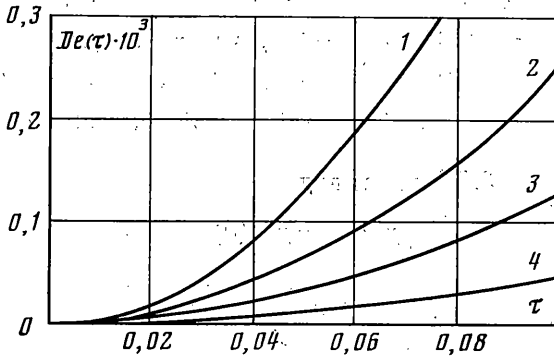
Функцию $w_0(x)$ начальных неуровненностей оси стержня представим одним членом разложения в ряд по собственным функциям упругой задачи [4] $w_0(x) = f_0 \sin(\pi x/L)$, где L — длина стержня.

Принимая гипотезу плоских сечений, получим $\epsilon^* = \epsilon + z\kappa$, где ϵ^* — скорость деформации оси стержня, κ — скорость изменения кривизны оси стержня.

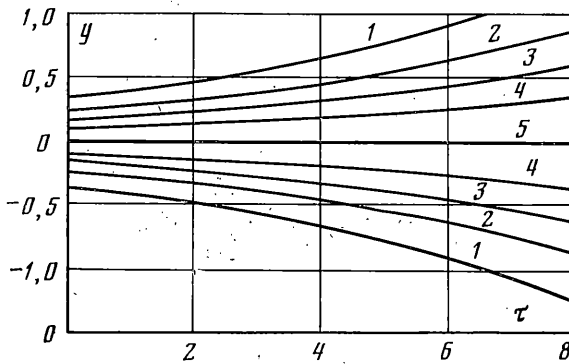
Будем рассматривать малые прогибы $w(x, t)$ и учтем это при выборе приближенного метода сведения математической модели ползучести стержня к задаче Коши. Пренебрежем продольной деформацией ϵ и воспользуемся методом линеаризации уравнения состояния [3]. Варьируя уравнение (3.8), будем иметь

$$\delta \epsilon^* = \delta \sigma / E + BN[\sigma^0]^{N-1} \delta \sigma, \quad \sigma^0 = q/(2h) \quad (3.10)$$

где σ^0 — напряжение в основном (прямолинейном) состоянии.



Фиг. 2



Фиг. 3

Умножая обе части уравнения (3.10) на z и интегрируя в пределах от $-h$ до h , получим

$$\frac{2}{3} h^3 \partial^2 w^* / \partial x^2 = -q w^* / E - BN[\sigma^0]^{N-1} q w \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.11) будем искать в виде $w(x, t) = f(t) \sin(\pi x/L)$. В этом случае функция $f(t)$ будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$df/dt = \omega(1-\omega)^{-1} EBN[\sigma^0]^{N-1} f, \quad \omega = \frac{2}{3} qL^2 / (\pi^2 E h^3) \quad (3.12)$$

Начальное условие для уравнения (3.12) определяется из упругого решения и равно $f(0) = (1-\omega)^{-1} f_0$.

Принимая во внимание факторы, наиболее существенно влияющие на деформирование стержня, и их неизбежный случайный разброс при изготовлении и эксплуатации реальной конструкции, случайными параметрами a_j ($j=1, \dots, 5$) в рассматриваемой задаче будем соответственно полагать f_0, q, E, B, N .

Вводя безразмерные параметры $\tau = tE^{(0)}B^{(0)}N^{(0)}[\sigma^0]^{N^{(0)}-1}$, $y = f/(2h)$, $c = f_0/(2h)$, для функций $y^{(0)}(\tau)$, $y^{(1)}(\tau, \alpha)$ соответственно получим систему уравнений

$$\frac{dy^{(0)}}{d\tau} = \omega^{(0)}(1-\omega^{(0)})^{-1}y^{(0)}, \quad y^{(0)}(0) = (1-\omega^{(0)})^{-1}c^{(0)} \quad (3.13)$$

$$\frac{dy^{(1)}}{d\tau} = Ay^{(1)} + \sum_{j=1}^5 \alpha_j \varphi_j, \quad y^{(1)}(0) = \sum_{j=1}^5 \alpha_j b_j \quad (3.14)$$

$$A = \omega^{(0)}(1-\omega^{(0)})^{-1}, \quad \alpha_1 = f^{(1)}/(2h), \quad \alpha_2 = q^{(1)}/q^{(0)},$$

$$\alpha_3 = E^{(1)}/E^{(0)}, \quad \alpha_4 = B^{(1)}/B^{(0)}, \quad \alpha_5 = N^{(1)}/N^{(0)}$$

$$b_1 = (1-\omega^{(0)})^{-1}, \quad b_2 = y^{(0)}(0)A, \quad b_3 = -b_2, \quad b_4 = b_5 = 0, \quad \varphi_j = c_j y^{(0)}(\tau) \quad (j=1, \dots, 5)$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = (N^{(0)} + A)A, \quad c_3 = -A^2, \quad c_4 = A, \quad c_5 = (1 + N^{(0)} \ln \sigma^0)A$$

Решение задачи (3.13) имеет вид

$$y^{(0)}(\tau) = y^{(0)}(0)e^{A\tau} \quad (3.15)$$

Полагая параметры α_j ($j=1, \dots, 5$) некоррелированными и подставляя $y^{(1)}(\tau, \alpha) = \sum \alpha_j \psi_j(\tau)$ в систему (3.14), получим систему линейных детерминистических задач Коши

$$d\psi_j/d\tau = A\psi_j + \varphi_j, \quad \psi_j(0) = b_j \quad (j=1, \dots, 5)$$

решение которых имеет вид

$$\psi_j = [c_j y^{(0)}(0)\tau + b_j] e^{A\tau}, \quad (j=1, \dots, 5)$$

Окончательное решение задачи запишется в форме

$$y(\tau, \alpha) = y^{(0)}(\tau) + \sum_{j=1}^5 \alpha_j \psi_j(\tau)$$

На фиг. 3 в предположении нормальности распределения параметров α_j показаны полосы практически возможного разброса (ширина полосы $6\sqrt{Dy}$) прогиба $y(\tau, \alpha)$ около $\langle y(\tau, \alpha) \rangle$ (кривая 5) в зависимости от различных значений D_j , соответствующих фиг. 1, 2. Численные значения остальных параметров в примере расчета выбраны следующими: $f_0^{(0)} = 0$, $q^{(0)} = 2$, $E^{(0)} = 0,8 \cdot 10^4$, $B^{(0)} = 8,32 \cdot 10^{-5}$, $N^{(0)} = 3,28$, $2h = 2$, $L = 60$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бологин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1971. 255 с.
2. Дугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1960. 883 с.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Куршин Л. М. Устойчивость при ползучести. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3, с. 125–160.
5. Бологин В. В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 279 с.
6. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 139 с.
7. Куршин Л. М. Об одном возможном подходе к задаче устойчивости стержней в условиях ползучести. — В кн.: Ползучесть и длительная прочность. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1963, с. 29–31.
8. Самарин Ю. П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 88–94.

9. *Потапов В. Д.* О применении метода стохастической линеаризации в задачах устойчивости стержней при ползучести.— Расчеты на прочность: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1975, вып. 16, с. 187–193.
10. *Ржаницын А. Р.* Случайные процессы ползучести.— В кн.: Инженерная механика полимеров и применение пластмасс в промышленности. Тбилиси: Мецниереба, 1969, с. 38–44.
11. *Барашиков А. Я.* Неупругое деформирование материалов как случайный процесс. Строительные конструкции: Респ. межвед. научно-техн. сб. Киев: Будівельник, 1971, вып. 17, с. 108–116.
12. *Соколкин Ю. В.* Нелинейная ползучесть изотропных тел при случайных нагрузках и механических свойствах.— В кн.: Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971, с. 228–234.
13. *Терегулов И. Т.* Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. М.: Наука, 1969. 206 с.
14. *Пугачев В. С., Досупов Б. Г.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие случайные параметры.— Тр. Воен.-возд. инж. акад. им. Жуковского, 1956, вып. 592, с. 14–31.
15. *Досупов Б. Г., Пугачев В. С.* Уравнение, определяющее закон распределения интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих случайные параметры.— Автоматика и телемеханика, 1957, т. 18, № 7, с. 620–630.
16. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.

Москва

Получено в редакцию
11.IV.1980